

Mapeos de características

Estos apuntes están escritos de manera conjunta por Elisa Suarez Barraza (alumna graduada de Maestría de la ESFM del IPN) y Egor Maximenko (profesor de la ESFM del IPN). Fecha de actualización: enero de 2026.

Proponemos la frase “mapeo de características” como un análogo de la frase “feature map” utilizada en inglés.

Nos basamos en varias fuentes bibliográficas. Aronszajn [1] desarrolló el concepto general de espacios de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR). Hay varios libros modernos sobre este tema: Paulsen y Raghupathi, Saitoh y Sawano, etc. En 1982, Saitoh [3] inventó la mayor parte de la teoría que se explica en el presente texto, considerando el caso cuando V es el espacio L^2 sobre un espacio de medida. En el libro [4], él consideró el caso de V general. Saitoh no usaba la frase “feature map”. Boser, Guyon y Vapnik en su famoso artículo [2] consideraron un caso particular de mapeos de características, para L de la forma \mathbb{R}^N o $\ell^2(\mathbb{N})$. Schölkopf y Smola [5, (2.33)] propusieron el concepto abstracto de mapeo de características y demostraron que cada mapeo de características induce un núcleo (en estos apuntes, es la Proposición 7 y su demostración). Steinwart y Christmann [6, Theorem 4.21] describieron el espacio H de manera explícita por medio de las transformaciones lineales T y \tilde{T} (Definiciones 9 y 12). Sus razonamientos son un poco más formales y más claros que los razonamientos de Saitoh.

Objetivos. Mostrar que cada mapeo de características induce un núcleo. Describir de manera explícita el espacio de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR) correspondiente.

Prerrequisitos. Elementos de la teoría de espacios de Hilbert, especialmente la teoría de proyección ortogonal sobre un subespacio cerrado. Elementos de la teoría de EHNR. Es deseable, pero no obligatorio, entender el teorema de Moore–Aronszajn.

En estos apuntes usamos el convenio que el producto interno es lineal respecto al primer argumento.

1 Definición (mapeo de características). Sea X un conjunto. Una función $\varphi: X \rightarrow L$ se llama *mapeo de características* o *mapa de características* si L es un espacio de Hilbert.

Para la Proposición 7, sería suficiente suponer que L sea un espacio con producto interno. En otras palabras, la completez del espacio L no se utiliza en la Proposición 7, pero se utiliza después.

2 Ejemplo. Los mapeos de características surgen de manera natural en muchas situaciones. Por ejemplo, a cada tipo de alimentos x le corresponde el vector $\varphi(x)$ de sus características nutricionales: la cantidad de proteínas, glúcidos, grasas, energía, etc. Este vector se puede ver como un elemento del espacio de Hilbert \mathbb{C}^N o $\ell^2(\mathbb{N})$. Tal vez, en este ejemplo es más natural trabajar en el espacio de Hilbert real \mathbb{R}^N o $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

En estos apuntes, estudiamos el concepto de mapeos de características de manera puramente teórica.

Recordemos el concepto de núcleo (en la teoría de EHN). En vez de la palabra *núcleo*, se usa también la frase *función positivamente definida* (en el sentido no estricto) o *función no negativamente definida*.

3 Definición (núcleo). Sea X un conjunto. Una función $K: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se llama *núcleo*, si para cada $m \in \mathbb{N}$, cada $x_1, \dots, x_m \in X$ y cada $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \overline{\lambda_p} \lambda_q K(x_p, x_q) \geq 0.$$

4 Observación. Hay otras maneras equivalentes de escribir la definición del núcleo: en términos de las formas cuadráticas asociadas a las matrices $[K(x_p, x_q)]_{p,q=1}^m$, o en términos de los determinantes de estas matrices. Sin embargo, en este tema es más cómodo aplicar la Definición 3.

5 Definición (el núcleo asociado a un mapeo de características). Sean X un conjunto, V un espacio de Hilbert y $\varphi: X \rightarrow V$ una función. Definimos $K: X^2 \rightarrow V$,

$$K(x, y) := \langle \varphi(y), \varphi(x) \rangle_V. \tag{1}$$

6 Observación. En muchas aplicaciones, es suficiente trabajar con funciones reales y espacios de Hilbert reales. En el caso real, la expresión en (1) también se puede escribir en la forma $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle_V$.

7 Proposición (núcleo a partir de un mapeo de características). *La función K de la Definición 5 es un núcleo.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Pongamos

$$v := \sum_{p=1}^m \lambda_p \varphi(x_p).$$

Observamos que la suma doble de la Definición 3 se expresa como el cuadrado de la norma del vector v :

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=1}^m \overline{\lambda_p} \lambda_q K(x_p, x_q) &= \sum_{p,q=1}^m \overline{\lambda_p} \lambda_q \langle \varphi(x_q), \varphi(x_p) \rangle_V \\ &= \left\langle \sum_{q=1}^m \lambda_q \varphi(x_q), \sum_{p=1}^m \lambda_p \varphi(x_p) \right\rangle_V = \langle v, v \rangle_V = \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Por la definición del producto interno, la última expresión es ≥ 0 . □

A veces, es más cómodo tratar el núcleo como una familia de función de una variable. Dado y en X , definimos $K_y: X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$K_y(x) := K(x, y).$$

El teorema de Moore–Aronszajn garantiza la existencia de un único EHNR H cuyo núcleo reproductor es K . Sabemos que H es un espacio de funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$ y que las funciones K_y son elementos de H .

El EHNR asociado a un mapeo de características

En este tema, nuestro objetivo principal es describir de manera más explícita el EHNR H asociado al núcleo K .

8 Repaso. Denotamos por \mathbb{C}^X al conjunto de todas las funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$, considerado con las operadores vectores punto a punto:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x).$$

En los primeros cursos de álgebra lineal se demuestra que \mathbb{C}^X es un espacio vectorial. El vector cero del espacio \mathbb{C}^X es la función constante cero. La denotamos por $0_{\mathbb{C}^X}$.

La idea principal es convertir los elementos de V en ciertos elementos de \mathbb{C}^X .

9 Definición. Definimos $T: V \rightarrow \mathbb{C}^X$,

$$(Tv)(x) := \langle v, \varphi(x) \rangle_V.$$

Denotamos la imagen de T por H :

$$H := T[V], \quad \text{esto es,} \quad H = \{f \in \mathbb{C}^X : \exists v \in V \quad f = Tv\}.$$

Como el producto interno es lineal respecto al primer argumento, concluimos que T es una transformación lineal y su imagen H es un subespacio vectorial de \mathbb{C}^X .

Denotamos por $\varphi[X]$ a la imagen de φ , es decir, al conjunto de los valores de φ :

$$\varphi[X] := \{u \in V : \exists x \in X \quad u = \varphi(x)\}.$$

En la siguiente proposición mostramos que el complemento ortogonal de $\varphi[X]$ coincide con el espacio nulo de T .

10 Proposición. $\ker(T) = \varphi[X]^\perp$.

Demostración. El resultado sale directamente de las definiciones. En efecto, para cada v en V , tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} v \in \ker(T) &\iff Tv = 0_{\mathbb{C}^X} &\iff \forall x \in X \quad (Tv)(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in X \quad \langle v, \varphi(x) \rangle_V = 0 &\iff \forall x \in X \quad v \perp \varphi(x) \\ &\iff \forall u \in \varphi[X] \quad v \perp u &\iff v \in \varphi[X]^\perp. \quad \square \end{aligned}$$

La penúltima equivalencia, donde pasamos de $\varphi(x)$ a u , sale por la definición de $\varphi[X]$. Brevemente, la idea es que cada elemento u de $\varphi[X]$ se puede escribir en la forma $\varphi(x)$ con x en X , y para cada x en X el vector $\varphi(x)$ pertenece a $\varphi[X]$.

11 Proposición. $\ker(T)$ es un subespacio cerrado de V . $\ker(T)^\perp$ es el subespacio cerrado de V generado por el conjunto $\varphi[X]$:

$$\varphi[X] \subseteq \text{cl}(\ell(\varphi[X])) = \ker(T)^\perp.$$

Demostración. Esta proposición se sigue fácilmente de la Proposición 10. Vamos a explicarlo de manera detallada.

1. Notamos que el codominio de T no tenemos topología, por eso no podemos afirmar que T es continuo y no podemos usar el argumento que el núcleo de una transformación lineal continua es un conjunto cerrado. Tenemos que razonar de otra manera. Por la Proposición 10, $\ker(T) = \varphi[X]^\perp$. Por ser un complemento ortogonal de un subconjunto de V , $\ker(T)$ es cerrado.

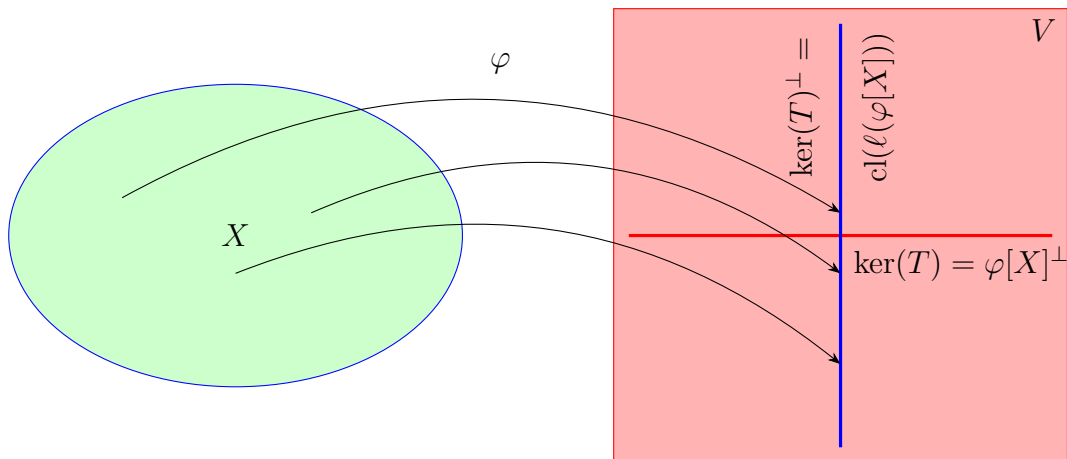
2. Pasando al complemento ortogonal en la igualdad $\ker(T) = \varphi[X]^\perp$, obtenemos

$$(\varphi[X]^\perp)^\perp = \ker(T)^\perp.$$

Por la teoría de la proyección ortogonal en un espacio de Hilbert, el complemento ortogonal del complemento ortogonal de $\varphi[X]$ es el subespacio cerrado generado por $\varphi[X]$:

$$\text{cl}(\ell(\varphi[X])) = (\varphi[X]^\perp)^\perp = \ker(T)^\perp.$$

3. Obviamente, $\varphi[X]$ está contenido en $\text{cl}(\ell(\varphi[X]))$. □



12 Definición (la transformación lineal \tilde{T}). Definimos $\tilde{T}: \ker(T)^\perp \rightarrow H$ como la función T restringida (comprimida) al dominio $\ker(T)^\perp$ y codominio H :

$$\tilde{T}v := Tv.$$

13 Proposición. \tilde{T} es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Como T es lineal, \tilde{T} también es lineal. Tenemos que verificar que \tilde{T} es inyectiva y sobre.

1. Mostremos que \tilde{T} es inyectiva. Supongamos que $v \in \ker(\tilde{T})$. Por la definición de \tilde{T} , esto significa que $v \in \ker(T)^\perp$ y $Tv = 0$. Luego

$$v \in \ker(T)^\perp \cap \ker(T) = \{0_V\}.$$

2. Mostremos que \tilde{T} es sobre. Sea $f \in H$. Por la definición de H , existe v en V tal que $Tv = f$. Como $\ker(T)$ es un subespacio cerrado de V , sabemos que V es la suma ortogonal de $\ker(T)$ y $\ker(T)^\perp$. Por lo tanto, existe un único par de vectores u y w tal que

$$v = u + w, \quad u \in \ker(T), \quad w \in \ker(T)^\perp.$$

En otras palabras, el vector u es la proyección ortogonal de v sobre $\ker(T)$ y w es la proyección ortogonal de v sobre $\ker(T)^\perp$. Notamos que

$$f = Tv = T(u + w) = Tu + Tw = 0_{\mathbb{C}^X} + Tw = Tw = \tilde{T}w.$$

Hemos mostrado que f pertenece a la imagen de \tilde{T} . □

14 Proposición (K en términos de T y φ). Para cada y en X ,

$$K_y = T(\varphi(y)). \quad (2)$$

Demostración. En efecto, para cada x, y en X ,

$$K_y(x) = K(x, y) = \langle \varphi(y), \varphi(x) \rangle_V = T(\varphi(y))(x). \quad \square$$

15 Definición. En el espacio H definidos el producto interno de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle_H := \langle \tilde{T}^{-1}f, \tilde{T}^{-1}g \rangle_V. \quad (3)$$

16 Teorema. H es un EHNR. Su núcleo reproductor es K .

Demostración. 1. Como V es un espacio de Hilbert y \tilde{T} es un isomorfismo de espacios vectoriales, es fácil que la función definida por (3) efectivamente es un producto interno y H es un espacio de Hilbert. En otras palabras, hemos usado la biyección \tilde{T} para transferir la estructura del espacio V al espacio H .

2. Para cada y en X , por la Proposición 14, tenemos que $K_y \in T[V] = H$.

3. Probemos que K tiene la propiedad reproductora. Sean $f \in H$, $y \in X$. Usando la Proposición 13, encontramos v en $\ker(T)^\perp$ tal que

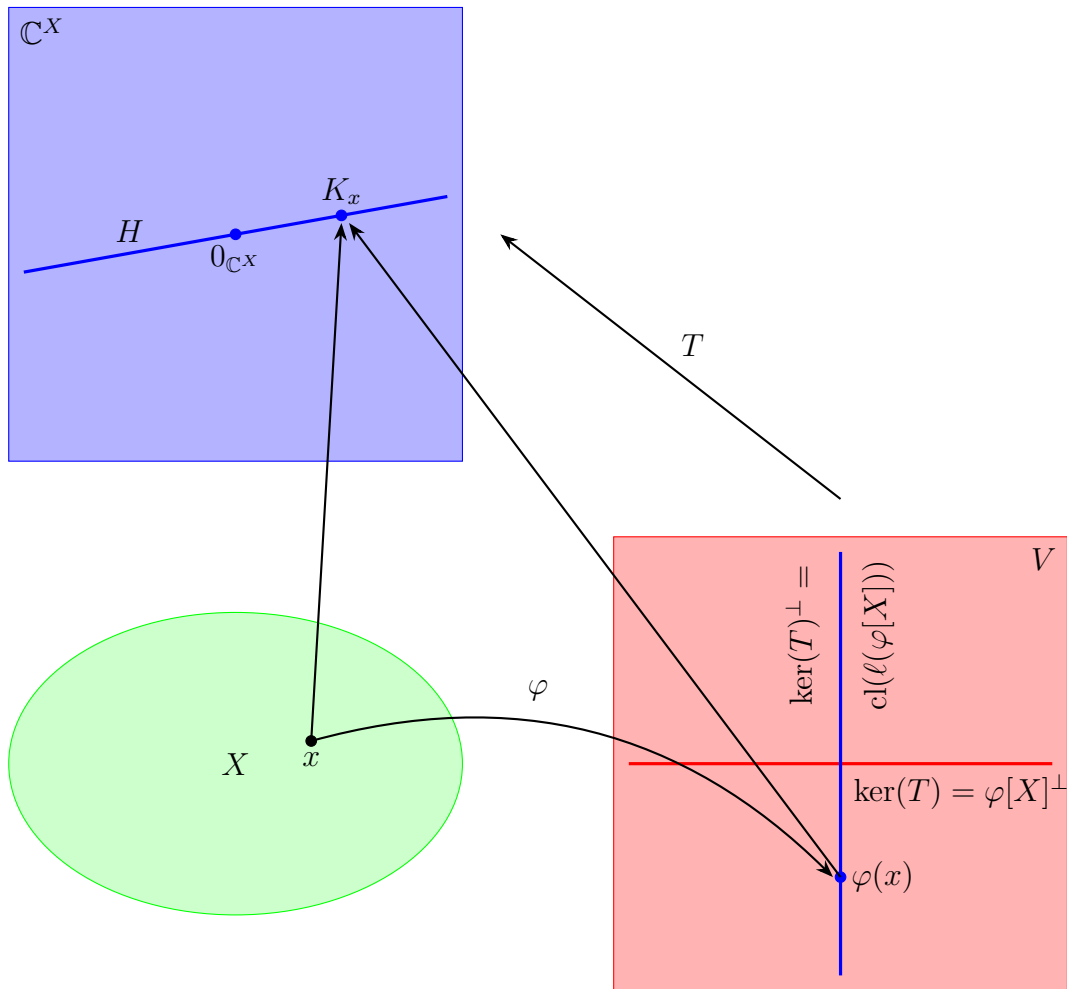
$$f = Tv = \tilde{T}v.$$

Además, usando las Proposiciones 14 y 11, escribimos K_y como

$$K_y = T(\varphi(y)) = \tilde{T}(\varphi(y)).$$

Luego

$$\langle f, K_y \rangle_H = \langle v, \varphi(y) \rangle_V = (Tv)(y) = f(y). \quad \square$$



17 Corolario. Para cada f en H , $\|f\|_H$ es el elemento mínimo del conjunto

$$\{\|v\|_V : v \in V, Tv = f\}. \quad (4)$$

Demostración. Usaremos la Proposición 13 y las ideas de su demostración, pero las escribiremos con otras palabras.

Sea $f \in H$. Pongamos $u := \tilde{T}^{-1}f$. Entonces $u \in \ker(T)^\perp$, $\|f\|_H = \|u\|_V$ y $Tu = f$,

Por lo anterior, $\|f\|_H$ es un elemento del conjunto (4).

Sea v cualquier vector de V tal que $Tv = f$. Pongamos $w := v - u$. Luego

$$Tw = T(v - u) = Tv - Tu = f - f = 0_{C^X},$$

así que $w \in \ker(T)$. Hemos mostrado que v tiene descomposición ortogonal

$$v = u + w, \quad u \in \ker(T)^\perp, \quad w \in \ker(T).$$

Por el teorema de Pitágoras,

$$\|v\|_V^2 = \|u\|_V^2 + \|w\|_V^2 \geq \|u\|_V^2.$$

Por lo tanto, $\|v\|_V \geq \|u\|_V = \|f\|_H$. Hemos mostrado que cualquier elemento del conjunto (4) es mayor o igual a $\|f\|_H$. \square

18 Definición. Definimos $U: V \rightarrow H$ como el operador T con el codominio restringido:

$$Uv := Tv \quad (v \in V).$$

19 Proposición (descripción de la transformación adjunta). *El operador $U^*: H \rightarrow V$ es una isometría lineal, su imagen es $\text{cl}(\ell(\varphi[X]))$, y para cada x en X ,*

$$U^*K_x = \varphi(x).$$

Demostración. 1. Para cada v en V ,

$$\langle v, U^*K_x \rangle_V = \langle Uv, K_x \rangle_H = (Uv)(x) = (Tv)(x) = \langle v, \varphi(x) \rangle_V.$$

Como la igualdad se cumple para cada v en V , concluimos que $U^*K_x = \varphi(x)$.

2. Mostremos que U^* es una isometría. Para cada f de la forma

$$f = \sum_{p=1}^m \lambda_p K_{y_p},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \|U^*f\|_V^2 &= \left\| \sum_{p=1}^m \lambda_p \varphi(y_p) \right\|_V^2 = \sum_{p,q=1}^m \lambda_p \bar{\lambda}_q \langle \varphi(y_p), \varphi(y_q) \rangle_V = \sum_{p,q=1}^m \lambda_p \bar{\lambda}_q K(y_q, y_p) \\ &= \sum_{p,q=1}^m \lambda_p \bar{\lambda}_q \langle K_{y_p}, K_{y_q} \rangle_H = \langle f, f \rangle_H = \|f\|_H^2. \end{aligned}$$

Como estas combinaciones lineales forman un subconjunto denso en H , concluimos que la igualdad $\|U^*f\|_V = \|f\|_H$ se cumple para cada f en H .

3. Es fácil ver que $U^*f = \tilde{T}^{-1}f$ para cada f en H . De aquí se sigue que U^* es una isometría y la imagen de U^* es $\text{cl}(\ell(\varphi(X)))$. \square

Cada EHNR está asociado a varios mapeos de características

20 Proposición (de un EHNR a un mapeo de características). *Sea X un conjunto y sea H un EHNR sobre X . Denotemos por K al núcleo reproductor de H . Definimos $\varphi: X \rightarrow H$,*

$$\varphi(x) := K_x.$$

Entonces, φ es un mapeo de características y K es el núcleo asociado.

Demostración. En efecto, para cada x, y en X ,

$$\langle \varphi(y), \varphi(x) \rangle_H = \langle K_y, K_x \rangle_H = K_y(x) = K(x, y). \quad \square$$

21 Proposición (de un núcleo a un mapeo de características). *Sea X un conjunto y sea K un kernel sobre X . Entonces, existe un espacio de Hilbert V y un mapeo de características $\varphi: X \rightarrow V$ tal que K está asociado a φ .*

Demostración. En efecto, por el teorema de Moore–Aronszajn, existe un único EHNR H sobre X cuyo núcleo reproductor es K . Aplicamos la Proposición 20 y obtenemos el resultado requerido. \square

22 Observación. Dado un EHNR H sobre X o un núcleo K sobre X , le corresponden muchos mapeos de características, porque hay muchas maneras de elegir el espacio de Hilbert V y la función φ . Por ejemplo, si ya está dado un mapeo de características $\varphi: X \rightarrow V$, entonces podemos encajar V en un espacio más grande, digamos, $V \oplus \mathbb{C}$, y extender φ de manera trivial, sin cambiar el núcleo asociado K .

En la Proposición 20, se utiliza $V = H$. En algunos ejemplos, V se puede elegir como $L^2(\Omega, \mu)$ sobre un espacio de medida (Ω, μ) o como $\ell^2(\mathbb{N})$, y el mapeo de características puede ser útil para entender algunas propiedades de H .

Referencias

- [1] Aronszajn, N. (1950): Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337–404. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7>.
- [2] Boser, B.E.; Guyon, I.M.; Vapnik, V.N. (1992): A training algorithm for optimal margin classifiers. COLT '92: Proceedings of the fifth annual workshop on Computational learning theory, pp. 144–152. <https://doi.org/10.1145/130385.130401>.

- [3] Saitoh, S. (1982): Integral transforms in Hilbert spaces. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 58(8): 361–364. <https://doi.org/10.3792/pjaa.58.361>.
- [4] Saitoh, S. (1997): Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York.
- [5] Schölkopf, B.; Smola, A.J. (2002): Learning with Kernels — Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond. The MIT Press, Cambridge, MA.
- [6] Steinwart, I.; Christmann, A. (2008): Support Vector Machines. Springer, New York, NY.