Criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

3 de febrero de 2023

Plan

Objetivo

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$, y sea $v \in \mathbb{C}^n$.

Vamos a demostrar una condición necesaria y suficiente para que $v \in \mathrm{im}(A)$.

Prerrequisitos

- Matrices positivas.
- El producto diádico de dos vectores.
- La proyección ortogonal.
- El teorema sobre el complemento ortogonal de la imagen.

Repaso: definición de matriz positiva

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se escribe $A \geq 0$, si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

Repaso: definición de matriz positiva

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se escribe $A \geq 0$, si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

La expresión $\langle Ax, x \rangle$ también se escribe como $x^* A\, x$.

Repaso: definición de matriz positiva

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se escribe $A \geq 0$, si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

La expresión $\langle Ax, x \rangle$ también se escribe como $x^* A x$.

Otra definición equivalente:

$$A \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad A = B^* B.$$

Repaso: comparación de matrices autoadjuntas

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A^* = A$, $B^* = B$.

Repaso: comparación de matrices autoadjuntas

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A^* = A$, $B^* = B$.

Se escribe $A \leq B$, si $B - A \geq 0$.

Repaso: comparación de matrices autoadjuntas

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A^* = A$, $B^* = B$.

Se escribe $A \leq B$, si $B - A \geq 0$.

Es fácil ver que

$$A \leq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n \qquad \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle.$$

Repaso: el producto diádico de dos vectores

Dados $a, b \in \mathbb{C}^n$,

$$a\,b^* = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \left[\,\overline{b_1},\ \overline{b_2},\ \ldots,\ \overline{b_n}\,\right] = \left[a_r\,\overline{b_s}\right]_{r,s=1}^{n}.$$

Plan

La forma sesquilineal asociada a un producto diádico

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Pongamos

$$S := a\, b^*.$$

Entonces para cada x, y en $\mathbb{C}^n$,

$$\langle S\, x,\ y \rangle = \langle x, b \rangle\, \langle a, y \rangle.$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle$$

Demostración

$$\langle S\, x, y \rangle =$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x =$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$y^* \in$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}),$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}),$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}),$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa,

$$y^*(a\,b^*)x$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa,

$$y^*(a\,b^*)x =$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa,

$$y^*(a\,b^*)x = (y^*a)\,(b^*x)$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa,

$$y^*(a\,b^*)x = (y^*a)\,(b^*x) =$$

Demostración

$$\langle S\,x, y\rangle = y^*\,S\,x = y^*\,(a\,b^*)\,x.$$

En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:

$$y^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Como la multiplicación de matrices es asociativa,

$$y^*(a\,b^*)x = (y^*a)\,(b^*x) = \langle a, y\rangle\,\langle x, b\rangle.$$

La forma cuadrática asociada a un “cuadrado diádico”

Hemos demostrado que

$$\langle (a\, b^*)\, x,\ y \rangle = \langle x, b \rangle\, \langle a, y \rangle.$$

La forma cuadrática asociada a un “cuadrado diádico”

Hemos demostrado que

$$\langle (a\, b^*)\, x,\ y \rangle = \langle x, b \rangle\, \langle a, y \rangle.$$

Corolario

Sean $a, x \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$\langle (a\, a^*)\, x,\ x \rangle = \langle x, a \rangle\, \langle a, x \rangle = \left| \langle x, a \rangle \right|^2.$$

Plan

Criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$, y sea $v \in \mathbb{C}^n$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in \operatorname{im}(A)$;

(b) $\exists c \geq 0 \quad v\, v^* \leq c\, A$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$.

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^*B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle B^*Bu, u\rangle = \langle Bu, Bu\rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\,v^*)x, x\rangle \leq \langle c\,Ax, x\rangle$.

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle B^* Bu, u\rangle = \langle Bu, Bu\rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x\rangle \leq \langle c\, Ax, x\rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x\rangle = |\langle v, x\rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x\rangle|^2 =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle B^* Bu, u\rangle = \langle Bu, Bu\rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x\rangle \leq \langle c\, Ax, x\rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x\rangle = |\langle v, x\rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x\rangle|^2 = |\langle Bu, Bx\rangle|^2$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2\, \|Bx\|^2$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2 \, \|Bx\|^2 \leq$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2\, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x \rangle$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2 \, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x \rangle =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle B^* Bu, u\rangle = \langle Bu, Bu\rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x\rangle \leq \langle c\, Ax, x\rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x\rangle = |\langle v, x\rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x\rangle|^2 = |\langle Bu, Bx\rangle|^2 \leq \|Bu\|^2\, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x\rangle = c\, \langle B^* Bx, x\rangle$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*)x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2 \, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x \rangle = c\, \langle B^* Bx, x \rangle =$$

Demostración, (a)⇒(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \mathrm{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2\, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x \rangle = c\, \langle B^* Bx, x \rangle = c\, \langle Bx, Bx \rangle$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\,v^*)x, x \rangle \leq \langle c\,Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\,v^*)x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2\,\|Bx\|^2 \leq c\,\|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\,Ax, x \rangle = c\,\langle B^* Bx, x \rangle = c\,\langle Bx, Bx \rangle =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b)

Como $A \geq 0$, encontramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = B^* B$.

Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

$$c := \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^* Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \geq 0.$$

Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Queremos mostrar que $\langle (v\, v^*) x, x \rangle \leq \langle c\, Ax, x \rangle$.

$$\langle (v\, v^*) x, x \rangle = |\langle v, x \rangle|^2 = |\langle B^* Bu, x \rangle|^2 = |\langle Bu, Bx \rangle|^2 \leq \|Bu\|^2 \, \|Bx\|^2 \leq c\, \|Bx\|^2.$$

Por otro lado,

$$\langle c\, Ax, x \rangle = c\, \langle B^* Bx, x \rangle = c\, \langle Bx, Bx \rangle = c\, \|Bx\|^2.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A).$

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A).$

Queremos mostrar que $z = 0_n$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z \rangle}_{0} + \langle z, z \rangle$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^{\perp} = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\, v^*) z, z\rangle$ y la suposición $v\, v^* \leq c\, A$:

$$\|z\|^4$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \leq c\,A$:

$$\|z\|^4 =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^{\perp} = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\, v^*) z, z\rangle$ y la suposición $v\, v^* \leq c\, A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \mathrm{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \mathrm{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle \le$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\, v^*) z, z\rangle$ y la suposición $v\, v^* \le c\, A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\, v^*) z, z\rangle \le \langle c\, A\, z,\ z\rangle$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $v = y + z$, donde $y \in \operatorname{im}(A)$, $z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle \le \langle c\,A\,z,\ z\rangle =$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle \le \langle c\,A\,z,\ z\rangle = 0.$$

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \le c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle \le \langle c\,A\,z,\ z\rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $z = 0_n$.

Demostración, (b)⇒(a)

Como $A^* = A$, tenemos que $\quad \operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^*) = \ker(A)$.

Descomponemos v como $\quad v = y + z, \quad$ donde $y \in \operatorname{im}(A), \quad z \in \ker(A)$.

Queremos mostrar que $z = 0_n$. Notamos que

$$\|z\|^2 = \underbrace{\langle y, z\rangle}_{0} + \langle z, z\rangle = \langle y + z, z\rangle = \langle v, z\rangle.$$

Aplicamos fórmula para $\langle (v\,v^*)z, z\rangle$ y la suposición $v\,v^* \leq c\,A$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z\rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z\rangle \leq \langle c\,A\,z,\ z\rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $z = 0_n$. $\qquad$ Luego $\quad v = y \in \operatorname{im}(A)$.

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$ y sea $v \in \mathrm{im}(A)$.

Supongamos que $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

Entonces

$$0 \leq \langle v, u \rangle = \min \left\{ c \in \mathbb{R} : \ v\, v^* \leq c\, A \right\}.$$

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$ y sea $v \in \operatorname{im}(A)$.

Supongamos que $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$.

Entonces

$$0 \leq \langle v, u \rangle = \min \{ c \in \mathbb{R} : \; v\,v^* \leq c\,A \}.$$

En la demostración de la proposición ya vimos que

$$\langle v, u \rangle \in \{ c \in \mathbb{R} : \; v\,v^* \leq c\,A \}.$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle =$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A.$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq 0.$$

Supongamos que $c \geq 0$ y $v\,v^* \leq c\,A$. Entonces

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq 0.$$

Supongamos que $c \geq 0$ y $v\,v^* \leq c\,A$. Entonces

$$\langle v, u\rangle^2 =$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $c \geq 0$ y $v\,v^* \leq c\,A.$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \left| \langle v, u \rangle \right|^2$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \left| \langle v, u \rangle \right|^2 =$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq 0.$$

Supongamos que $c \geq 0$ y $v\, v^* \leq c\, A$. Entonces

$$\langle v, u\rangle^2 = \big|\langle v, u\rangle\big|^2 = \langle (v\, v^*)\, u, u\rangle$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $c \geq 0$ y $v\, v^* \leq c\, A$. Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \left| \langle v, u \rangle \right|^2 = \langle (v\, v^*)\, u, u \rangle \leq$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \bigl| \langle v, u \rangle \bigr|^2 = \langle (v\, v^*)\, u, u \rangle \leq \langle c\, A\, u, u \rangle$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \big| \langle v, u \rangle \big|^2 = \langle (v\, v^*)\, u, u \rangle \leq \langle c\, A\, u, u \rangle =$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\, v^* \leq c\, A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \big| \langle v, u \rangle \big|^2 = \langle (v\, v^*)\, u, u \rangle \leq \langle c\, A\, u, u \rangle = c\, \langle v, u \rangle.$$

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\,v^* \leq c\,A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u \rangle^2 = \left| \langle v, u \rangle \right|^2 = \langle (v\,v^*)\,u, u \rangle \leq \langle c\,A\,u, u \rangle = c\,\langle v, u \rangle.$$

De aquí se sigue que

Demostración

Notamos que

$$\langle v, u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq 0.$$

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad v\,v^* \leq c\,A. \quad$ Entonces

$$\langle v, u\rangle^2 = \left|\langle v, u\rangle\right|^2 = \langle (v\,v^*)\,u, u\rangle \leq \langle c\,A\,u, u\rangle = c\,\langle v, u\rangle.$$

De aquí se sigue que $\langle v, u\rangle \leq c$.