Descripción de la imagen de una matriz positiva

Objetivos. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $A \geq 0$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que $v \in \operatorname{im}(A)$.

Prerrequisitos. Matrices positivas.

1 Definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrices autoadjuntas: $A^* = A$, $B^* = B$. Se escribe $A \leq B$, si $B - A \geq 0$, es decir, si $B - A$ es positiva.

2 Proposición (la forma sesquilineal asociada al producto diádico)**.** *Sean $a, b, u, v \in \mathbb{C}^n$. Entonces*
$$\langle (a\, b^*)u, v\rangle = \langle a, v\rangle\, \langle u, b\rangle.$$

Demostración. Primero, escribimos el producto interno en $\mathbb{C}^n$ en términos de la multiplicación de matrices:
$$\langle (a\, b^*)u, v\rangle = v^*(a\, b^*)u.$$
En la última expresión tenemos el producto de 4 matrices:
$$v^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad a \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}), \qquad b^* \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C}), \qquad u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$
Ahora usamos el hecho que multiplicación de matrices es asociativa:
$$v^*(a\, b^*)u = (v^* a)\,(b^* u) = \langle a, v\rangle\, \langle u, b\rangle. \qquad \square$$

3 Corolario (la forma cuadrática asociada al "cuadrado diádico")**.** *Sean $a, u \in \mathbb{C}^n$. Entonces*
$$\langle (a\, a^*)u, u\rangle = |\langle a, u\rangle|^2.$$

4 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$, y sea $v \in \mathbb{C}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $v \in \operatorname{im}(A)$;

(b) existe $c \geq 0$ tal que $v\, v^* \leq c\, A$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que $v \in \operatorname{im}(A)$. Sea $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$. Pongamos

$$c \coloneqq \langle v, u \rangle.$$

Supongamos que $A = B^*B$, donde $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$c = \langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle B^*Bu, u \rangle = \langle Bu, Bu \rangle = \|Bu\|^2 \ge 0.$$

Demostremos que $c\,A - v\,v^* \ge 0$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Entonces

$$\langle A\alpha, \alpha \rangle = \langle B^*B\alpha, \alpha \rangle = \langle B\alpha, B\alpha \rangle = \|B\alpha\|^2.$$

Por otro lado, aplicamos el Corolario 3 y la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$\langle (v\,v^*)\alpha, \alpha \rangle = |\langle v, \alpha \rangle|^2 = |\langle B^*Bu, \alpha \rangle|^2 = |\langle Bu, B\alpha \rangle|^2 \le \|Bu\|^2\,\|B\alpha\|^2 \le c\,\|B\alpha\|^2.$$

De aquí se sigue que

$$\langle \big(c\,A - v\,v^*\big)\alpha, \alpha \rangle = c\,\langle A\alpha, \alpha \rangle - \langle (v\,v^*)\alpha, \alpha \rangle \ge 0.$$

(b)⇒(a). Como $A^* = A$, tenemos que

$$\ker(A) = \operatorname{im}(A)^\perp.$$

Descomponemos v como

$$v = y + z, \qquad y \in \operatorname{im}(A), \qquad z \in \ker(A).$$

Luego

$$\langle v, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \underbrace{\langle y, z \rangle}_{0} + \langle z, z \rangle = \|z\|^2.$$

Aplicamos la Proposición 2 y la suposición que $x\,x^* \le cA$:

$$\|z\|^4 = |\langle v, z \rangle|^2 = \langle (v\,v^*)z, z \rangle \le \langle cAz, z \rangle = 0.$$

Hemos mostrado que $z = 0_n$. Luego $v = y \in \operatorname{im}(A)$. □

5 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \ge 0$ y sea $v \in \operatorname{im}(A)$. Supongamos que $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = Au$. Entonces*

$$0 \le \langle v, u \rangle = \min\big\{c \in \mathbb{R}\colon\ v\,v^* \le c\,A\big\}.$$

Demostración. Primero, notamos que

$$\langle v, u \rangle = \langle Au, u \rangle \ge 0.$$

En la demostración de la Proposición 4 vimos que

$$\langle v, u \rangle \in \big\{c \in \mathbb{R}\colon\ v\,v^* \le c\,A\big\}.$$

Ahora supongamos que $c \ge 0$ y $v\,v^* \le c\,A$. Entonces, por el Corolario 3,

$$\langle v, u \rangle^2 = \big|\langle v, u \rangle\big|^2 = \langle (v\,v^*)\,u, u \rangle \le \langle cAu, u \rangle = c\langle v, u \rangle.$$

De aquí se sigue que $\langle v, u \rangle \le c$. □