Criterio de que una función pertenece al espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

3 de febrero de 2023

Plan

Contenido

Objetivo

Dado un EHNR H sobre X y una función $f\colon X \to \mathbb{C}$,
demostrar condiciones necesarias y suficientes para que $f \in H$.

Prerrequisitos

- Descripción de la imagen de una matriz positiva.
- Interpolación en EHNR.
- Convergencia de redes.

Plan

Repaso: la imagen de una matriz positiva

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$ y sea $v \in \mathbb{C}^n$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in \operatorname{im}(A)$,

(b) existe $C \geq 0$ tal que $v\,v^* \leq C\,A$.

Repaso: la imagen de una matriz positiva

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A \geq 0$ y sea $v \in \mathbb{C}^n$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $v \in \operatorname{im}(A)$,

(b) existe $C \geq 0$ tal que $v\,v^* \leq C\,A$.

Proposición

Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $u \in \mathbb{C}^n$, $v = Au$. Entonces

$$0 \leq \langle v, u \rangle = \min \left\{ C \in \mathbb{R} : \ vv^* \leq C\,A \right\}.$$

Plan

Notación: el problema de interpolación

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$.

Notación: el problema de interpolación

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$.

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$.

Notación: el problema de interpolación

Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$.

Sea $f\colon X \to \mathbb{C}$.

Decimos que f interpola (x, v), si

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad f(x_j) = v_j.$$

Notación: EHNR

Suponemos que X es un conjunto y H es un EHNR sobre X, es decir, $H \leq \mathbb{C}^X$.

Notación: EHNR

Suponemos que X es un conjunto y H es un EHNR sobre X, es decir, $H \leq \mathbb{C}^X$.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Notación: EHNR

Suponemos que X es un conjunto y H es un EHNR sobre X, es decir, $H \leq \mathbb{C}^X$.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada $Y \subseteq X$, denotamos por H_Y el subespacio cerrado generado por

$$\{K_y\colon\ y \in Y\}.$$

Notación: EHNR

Suponemos que X es un conjunto y H es un EHNR sobre X, es decir, $H \leq \mathbb{C}^X$.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada $Y \subseteq X$, denotamos por H_Y el subespacio cerrado generado por

$$\{K_y : \ y \in Y\}.$$

Denotamos por P_Y la proyección ortogonal sobre H_Y.

Notación: EHNR

Suponemos que X es un conjunto y H es un EHNR sobre X, es decir, $H \leq \mathbb{C}^X$.

Denotamos por K el núcleo reproductor de H.

Para cada $Y \subseteq X$, denotamos por H_Y el subespacio cerrado generado por

$$\{K_y : \ y \in Y\}.$$

Denotamos por P_Y la proyección ortogonal sobre H_Y.

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X^m$,

$$G_K(x) := \left[K(x_r, x_s)\right]_{r,s=1}^{m}.$$

Repaso: interpolación en EHNR

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$.

Supongamos que $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $v = G_K(x)\alpha$,

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Entonces:

- g interpola (x, v),
- $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$,
- si $f \in H$ y f interpola (x, v), entonces $\|g\| \leq \|f\|$.

Demostración: g interpola (x, v)

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r)$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \dots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) =$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r)$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) =$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j =$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j =$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j = (G_K(x)\alpha)_r$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j = (G_K(x)\alpha)_r =$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j = (G_K(x)\alpha)_r = v_r.$$

Demostración: g interpola (x, v)

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Sea $r \in \{1, \ldots, m\}$. Calculemos el valor de g en x_r:

$$g(x_r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{x_j}(x_r) = \sum_{j=1}^{n} K(x_r, x_j)\,\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} (G_K(x))_{r,j}\,\alpha_j = (G_K(x)\alpha)_r = v_r.$$

Hemos mostrado que g interpola (x, v).

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\,\langle g, K_j\rangle.$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\,\langle g, K_j\rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, g(x_j)$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, g(x_j) =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, v_j$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, v_j =$$

Demostración: $\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$

Estamos suponiendo que

$$G_K(x)\,\alpha = v, \qquad g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}.$$

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \left\langle g, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, \langle g, K_j \rangle.$$

Usamos la propiedad reproductora y la propiedad $g(x_j) = v_j$:

$$\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, g(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\, v_j = \langle v, \alpha \rangle.$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v).

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle =$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j)$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) =$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \dots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j =$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}.$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}. \quad$ Por el teorema de Pitágoras,

Demostración: $\|g\| \le \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}. \quad$ Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2$$

Demostración: $\|g\| \le \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}.\quad$ Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 =$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $g \in H_Y$, $f - g \in H_Y^{\perp}$. Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g\|^2$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}.\quad$ Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g\|^2 \geq$$

Demostración: $\|g\| \leq \|f\|$

Sea $f \in H$ tal que f interpola (x, v). Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\langle f - g,\, K_j \rangle = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0.$$

Sean

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}).$$

Tenemos que $\quad g \in H_Y, \quad f - g \in H_Y^{\perp}. \quad$ Por el teorema de Pitágoras,

$$\|f\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g\|^2 \geq \|g\|^2.$$

Repaso: interpolación en EHNR

Teorema

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe f en H tal que f interpola (x, v);

(b) existe $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que la función $g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$ interpola (x, v);

(c) $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración.

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle =$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j)$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) =$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j)$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) =$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \mathrm{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j =$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0,$$

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0,$$

así que $h \in H_Y^{\perp}$.

Repaso: unicidad de la función interpolante en la clase H_Y

Proposición

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ puntos diferentes a pares, $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{C}$,

$$Y := \{x_1, \ldots, x_m\}, \qquad H_Y := \operatorname{lin}(\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_m}\}).$$

Sean $f, g \in H_Y$ tales que f interpola (x, v) y g interpola (x, v). Entonces $f = g$.

Demostración. Pongamos $h := f - g$. Entonces $h \in H_Y$ y al mismo tiempo

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle h, K_{x_j} \rangle = h(x_j) = f(x_j) - g(x_j) = v_j - v_j = 0,$$

así que $h \in H_Y^{\perp}$. Concluimos que $h = 0_H$.

Plan

Repaso: aproximación de elementos de EHNR por redes

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

Repaso: aproximación de elementos de EHNR por redes

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$.

Repaso: aproximación de elementos de EHNR por redes

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$.

Más aún, $\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

Repaso: aproximación de elementos de EHNR por redes

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$.

Más aún, $\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

Proposición

Sea $g \in H$. Entonces la red $(P_Y g)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ converge a g.

Repaso: aproximación de elementos de EHNR por redes

$\mathcal{F}_X :=$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X.

$\mathcal{F}_X$ es un conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$.

Más aún, $\mathcal{F}_X$ es un conjunto dirigido.

Proposición

Sea $g \in H$. Entonces la red $(P_Y g)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ converge a g.

En el siguiente teorema no usamos esta proposición, pero usamos una idea similar.

Plan

Notación para el "producto tensorial" de dos funciones

Sea X un conjunto y sean $f, g \colon X \to \mathbb{C}$.

Definimos $f \boxtimes g \colon X^2 \to \mathbb{C}$,

$$(f \boxtimes g)(t, u) := f(t)\, g(u).$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^m.$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s}$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} =$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^m.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s)$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\, v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) =$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) = f(x_r)\overline{f(x_s)}$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f \boxtimes \overline{f}}(x) = v\, v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f \boxtimes \overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) = f(x_r)\overline{f(x_s)} =$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) = f(x_r)\overline{f(x_s)} = v_r\,\overline{v_s}$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\big(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\big)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) = f(x_r)\overline{f(x_s)} = v_r\,\overline{v_s} =$$

La matriz de Gram asociada a $f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean $f\colon X \to \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{f\boxtimes\overline{f}}(x) = v\,v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := f(x) := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^m.$$

Demostración. Para cada r, s en $\{1, \ldots, m\}$,

$$\left(G_{f\boxtimes\overline{f}}(x)\right)_{r,s} = (f \boxtimes \overline{f})(x_r, x_s) = f(x_r)\overline{f(x_s)} = v_r\,\overline{v_s} = (v\,v^*)_{r,s}.$$

La matriz de Gram asociada a $c^2 K - f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean X un conjunto, $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo, $f \in \mathbb{C}^X$, $c \geq 0$.
Sean $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{c^2 K - f \boxtimes \overline{f}}(x) = c^2\, G_K(x) - v\, v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}.$$

La matriz de Gram asociada a $c^2 K - f \boxtimes \overline{f}$

Lema

Sean X un conjunto, $K\colon X^2 \to \mathbb{C}$ un núcleo, $f \in \mathbb{C}^X$, $c \geq 0$.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x \in X^m$. Entonces

$$G_{c^2 K - f \boxtimes \overline{f}}(x) = c^2\, G_K(x) - v\, v^*, \qquad \text{donde} \qquad v := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^m.$$

Se sigue del lema anterior.

Criterio de pertenencia al EHNR

Teorema

Sean X un conjunto, H un EHNR sobre X, K el núcleo reproductor de H, $f \in \mathbb{C}^X$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in H$;

(b) existe $c \geq 0$ tal que $\quad c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo;

(c) existe $c \geq 0$ tal que para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X,
existe $g \in H$ tal que $\|g\| \leq c$ y $f(x_j) = g(x_j)$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Definimos $L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Definimos $L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$. En otras palabras,

$$L\colon X^2 \to \mathbb{C}, \qquad L(t,u) := c^2\, K(t,u) - f(t)\overline{f(u)}.$$

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Definimos $L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$. En otras palabras,

$$L\colon X^2 \to \mathbb{C}, \qquad L(t,u) := c^2\, K(t,u) - f(t)\overline{f(u)}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Queremos mostrar que $G_L(x) \geq 0$.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Definimos $L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$. En otras palabras,

$$L\colon X^2 \to \mathbb{C}, \qquad L(t,u) := c^2\, K(t,u) - f(t)\overline{f(u)}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Queremos mostrar que $G_L(x) \geq 0$.

Sea $v := \left[f(x_j)\right]_{j=1}^{m}$.

Demostración, (a)⇒(b), inicio

Supongamos que $f \in H$. Pongamos $c := \|f\|$.

Definimos $L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$. En otras palabras,

$$L\colon X^2 \to \mathbb{C}, \qquad L(t,u) := c^2\, K(t,u) - f(t)\overline{f(u)}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$. Queremos mostrar que $G_L(x) \geq 0$.

Sea $v := \big[f(x_j)\big]_{j=1}^m$. Entonces, por el lema,

$$G_L(x) = c^2 G_K(x) - v\, v^*.$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR,

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \le$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 =$$

Demostración, (a)$\Rightarrow$(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \le \|f\|^2 = c^2.$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \mathrm{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^*$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^* \leq$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^* \leq \langle v, \alpha \rangle\, G_K(x)$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^* \leq \langle v, \alpha \rangle\, G_K(x) \leq$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^* \leq \langle v, \alpha \rangle\, G_K(x) \leq c^2\, G_K(x).$$

Demostración, (a)⇒(b), final

Por la construcción de v, la función f interpola (x, v).

Por el teorema de interpolación en EHNR, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^n$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$. Entonces

$$\langle v, \alpha \rangle \leq \|f\|^2 = c^2.$$

Por el criterio de pertenencia a la imagen de una matriz positiva,

$$v\,v^* \leq \langle v, \alpha \rangle\, G_K(x) \leq c^2\, G_K(x).$$

En otras palabras, $G_L(x) = c^2\, G_K(x) - v\,v^* \geq 0$.

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $c \geq 0$ y $L := c^2\,K - f \boxtimes \overline{f}$ es un núcleo.

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $c \geq 0$ y $L \coloneqq c^2\, K - f \boxtimes \overline{f}$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r) \big]_{r=1}^{m}.$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c), inicio

Supongamos que $\quad c \ge 0 \quad$ y $\quad L := c^2\,K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r)\big]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2\,G_K(x) - v\,v^*$$

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $\quad c \ge 0 \quad$ y $\quad L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r)\big]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2\, G_K(x) - v\, v^* =$$

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $c \geq 0$ y $L := c^2 K - f \boxtimes \overline{f}$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \left[f(x_r) \right]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2 G_K(x) - v\, v^* = G_L(x)$$

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r) \big]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2\, G_K(x) - v\, v^* = G_L(x) \geq$$

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad L := c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r)\big]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2 G_K(x) - v\, v^* = G_L(x) \geq 0.$$

Demostración, (b)⇒(c), inicio

Supongamos que $\quad c \geq 0 \quad$ y $\quad L := c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo.

Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_m \in X$ diferentes a pares.

Definimos v como antes:

$$v := \big[f(x_r)\big]_{r=1}^{m}.$$

Entonces

$$c^2\, G_K(x) - v\, v^* = G_L(x) \geq 0.$$

Por la descripción de la imagen de una matriz positiva, $\quad v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Demostración, (b)⇒(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Demostración, (b)⇒(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Por la teoría de interpolación en EHNR, g interpola (x, v) y

$$\|g\|^2$$

Demostración, (b)⇒(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Por la teoría de interpolación en EHNR, g interpola (x, v) y

$$\|g\|^2 =$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Por la teoría de interpolación en EHNR, g interpola (x, v) y

$$\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle$$

Demostración, (b)$\Rightarrow$(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Por la teoría de interpolación en EHNR, g interpola (x, v) y

$$\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle \leq$$

Demostración, (b)⇒(c), final

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{im}(G_K(x))$.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}^m$ tal que $v = G_K(x)\,\alpha$.

Sea

$$g := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j K_{x_j}$$

Por la teoría de interpolación en EHNR, g interpola (x, v) y

$$\|g\|^2 = \langle v, \alpha \rangle \leq c^2.$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Por la suposición, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ existe g_Y en H tal que

$$\|g_Y\| \leq c \qquad \text{y} \qquad \Big(\forall t \in Y \qquad g_Y(t) = f(t)\Big).$$

Demostración, (c)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Por la suposición, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ existe g_Y en H tal que

$$\|g_Y\| \leq c \qquad \text{y} \qquad \Bigl(\forall t \in Y \qquad g_Y(t) = f(t)\Bigr).$$

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$h_Y \coloneqq P_Y(g_Y).$$

Demostración, (c)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Por la suposición, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ existe g_Y en H tal que

$$\|g_Y\| \leq c \qquad \text{y} \qquad \Big(\forall t \in Y \qquad g_Y(t) = f(t)\Big).$$

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$h_Y := P_Y(g_Y).$$

Entonces $\quad \|g_Y\| \leq \|h_Y\| \leq c.$

Demostración, (c)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Por la suposición, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ existe g_Y en H tal que

$$\|g_Y\| \leq c \qquad \text{y} \qquad \Big(\forall t \in Y \qquad g_Y(t) = f(t)\Big).$$

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$h_Y := P_Y(g_Y).$$

Entonces $\quad \|g_Y\| \leq \|h_Y\| \leq c. \quad$ Más aún, para cada t en Y, $\quad g_Y(t) = h_Y(t) = f(t).$

Demostración, (c)⇒(a), inicio

Supongamos que se cumple la condición (c). Fijamos el número $c \geq 0$ de la condición (c).

Por la suposición, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ existe g_Y en H tal que

$$\|g_Y\| \leq c \qquad \text{y} \qquad \Big(\forall t \in Y \qquad g_Y(t) = f(t)\Big).$$

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$,

$$h_Y := P_Y(g_Y).$$

Entonces $\|g_Y\| \leq \|h_Y\| \leq c$. Más aún, para cada t en Y, $g_Y(t) = h_Y(t) = f(t)$.

Mostremos que la red $(g_Y)_{Y \in \mathcal{F}_X}$ es de Cauchy y converge a la función f.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Sabemos que $M \leq c < +\infty$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Sabemos que $M \le c < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon^2}{8M+1}$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Sabemos que $M \le c < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon^2}{8M+1}$.

Usando la definición de sup, encontramos Y_0 en $\mathcal{F}_X$ tal que $\|h_{Y_0}\| \ge M - \delta$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Sabemos que $M \leq c < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon^2}{8M+1}$.

Usando la definición de sup, encontramos Y_0 en $\mathcal{F}_X$ tal que $\|h_{Y_0}\| \geq M - \delta$.

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $Y_0 \subseteq Y$, tenemos que

$$P_{Y_0}(h_Y) = h_{Y_0}.$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

$$M := \sup_{Y \in \mathcal{F}_X} \|g_Y\|.$$

Sabemos que $M \le c < +\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $\delta := \dfrac{\varepsilon^2}{8M+1}$.

Usando la definición de sup, encontramos Y_0 en $\mathcal{F}_X$ tal que $\|h_{Y_0}\| \ge M - \delta$.

Para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $Y_0 \subseteq Y$, tenemos que

$$P_{Y_0}(h_Y) = h_{Y_0}.$$

En efecto, las funciones $P_{Y_0}(h_Y)$, h_{Y_0} pertenecen al subespacio H_{Y_0}
y toman los mismos valores $f(t)$ en los puntos $t \in Y_0$.

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0,$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 =$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto,

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M,$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 =$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 = \|h_Y\|^2 - \|h_{Y_0}\|^2$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 = \|h_Y\|^2 - \|h_{Y_0}\|^2 =$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 = \|h_Y\|^2 - \|h_{Y_0}\|^2 = \big(\|h_Y\| + \|h_{Y_0}\|\big)\big(\|h_Y\| - \|h_{Y_0}\|\big)$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 = \|h_Y\|^2 - \|h_{Y_0}\|^2 = \big(\|h_Y\| + \|h_{Y_0}\|\big)\big(\|h_Y\| - \|h_{Y_0}\|\big) \leq$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $P_{Y_0}(h_F) = h_{Y_0}$. Luego

$$\langle h_Y - h_{Y_0}, h_{Y_0} \rangle = 0, \qquad \|h_Y\|^2 = \|h_Y - h_{Y_0}\|^2 + \|h_{Y_0}\|^2 \geq \|h_{Y_0}\|^2.$$

Por lo tanto, $\quad M - \delta \leq \|h_{Y_0}\| \leq \|h_Y\| \leq M, \quad \|h_Y\| - \|h_{Y_0}\| \leq \delta,$

$$\|h_Y - h_{Y_0}\|^2 = \|h_Y\|^2 - \|h_{Y_0}\|^2 = \big(\|h_Y\| + \|h_{Y_0}\|\big)\big(\|h_Y\| - \|h_{Y_0}\|\big) \leq 2M\delta.$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\|$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\|$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq 2\sqrt{2M\delta}$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq 2\sqrt{2M\delta} =$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \le \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \le \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \le 2\sqrt{2M\delta} = 2\sqrt{\frac{2M\,\varepsilon^2}{8M+1}}$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq 2\sqrt{2M\delta} = 2\sqrt{\frac{2M\,\varepsilon^2}{8M+1}} <$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq 2\sqrt{2M\delta} = 2\sqrt{\frac{2M\,\varepsilon^2}{8M+1}} < \varepsilon.$$

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \leq \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \leq \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \leq 2\sqrt{2M\delta} = 2\sqrt{\frac{2M\,\varepsilon^2}{8M+1}} < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, hemos mostrado que la red $(h_F)_{F\in\mathcal{F}_X}$ es de Cauchy.

Demostración, (c)⇒(a), continuación

Hemos mostrado que si $Y \in \mathcal{F}_X$ y $Y_0 \subseteq Y$, entonces $\|h_Y - h_{Y_0}\| \le \sqrt{2M\delta}$.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_X$ tales que $Y_0 \subseteq Y_1$, $Y_0 \subseteq Y_2$. Entonces

$$\|h_{Y_1} - h_{Y_2}\| \le \|h_{Y_1} - h_{Y_0}\| + \|h_{Y_2} - h_{Y_0}\| \le 2\sqrt{2M\delta} = 2\sqrt{\frac{2M\,\varepsilon^2}{8M+1}} < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, hemos mostrado que la red $(h_F)_{F \in \mathcal{F}_X}$ es de Cauchy.

H es completo, por eso existe $a \in H$ tal que

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y = a.$$

Demostración, (c)$\Rightarrow$(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Por otro lado, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq Y$ tenemos que $h_Y(t) = f(t)$.

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Por otro lado, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq Y$ tenemos que $h_Y(t) = f(t)$.
Por la definición de la convergencia de redes, esto implica que

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = f(t).$$

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Por otro lado, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq Y$ tenemos que $h_Y(t) = f(t)$.
Por la definición de la convergencia de redes, esto implica que

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = f(t).$$

Hemos demostrado que $a = f$.

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Por otro lado, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq Y$ tenemos que $h_Y(t) = f(t)$.
Por la definición de la convergencia de redes, esto implica que

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = f(t).$$

Hemos demostrado que $a = f$. Por eso $f \in H$ y $f = \lim\limits_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y$.

Demostración, (c)⇒(a), final

Queremos mostrar que $a = f$.

Sea $t \in X$. La convergencia en H implica la convergencia puntual, luego

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = a(t).$$

Por otro lado, para cada Y en $\mathcal{F}_X$ con $\{t\} \subseteq Y$ tenemos que $h_Y(t) = f(t)$. Por la definición de la convergencia de redes, esto implica que

$$\lim_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y(t) = f(t).$$

Hemos demostrado que $a = f$. Por eso $f \in H$ y $f = \lim\limits_{Y \in \mathcal{F}_X} h_Y$.

Como la norma en H es una función continua, $\|f\| \leq c$.

Sobre el número c en el teorema

Hemos mostrado que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in H$;

(b) existe $c \geq 0$ tal que $\quad c^2\, K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo;

(c) existe $c \geq 0$ tal que para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X, existe $g \in H$ tal que $\|g\| \leq c$ y $f(x_j) = g(x_j)$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$.

Sobre el número c en el teorema

Hemos mostrado que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in H$;

(b) existe $c \geq 0$ tal que $\quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad$ es un núcleo;

(c) existe $c \geq 0$ tal que para cada m en $\mathbb{N}$ y cada $x_1, \ldots, x_m$ en X,
existe $g \in H$ tal que $\|g\| \leq c$ y $f(x_j) = g(x_j)$ para cada j en $\{1, \ldots, m\}$.

Vamos a mostrar que $\|f\|$ es el mínimo de los números c que satisfacen (b) y (c).

Sobre el número c en el teorema

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces $\|f\| = \min(B) = \min(C)$, donde

$$B := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad \text{es núcleo} \Big\},$$

$$C := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad \forall Y \in \mathcal{F}_X \quad \exists g \in H \quad \Big(\|g\| \leq c \quad \wedge \quad (\forall t \in Y \quad g(t) = f(t)) \Big) \Big\}.$$

Sobre el número c en el teorema

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces $\|f\| = \min(B) = \min(C)$, donde

$$B := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad \text{es núcleo} \Big\},$$

$$C := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad \forall Y \in \mathcal{F}_X \quad \exists g \in H \quad \Big(\|g\| \leq c \quad \wedge \quad (\forall t \in Y \quad g(t) = f(t)) \Big) \Big\}.$$

Demostración.

Sobre el número c en el teorema

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces $\|f\| = \min(B) = \min(C)$, donde

$$B := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad \text{es núcleo} \Big\},$$

$$C := \Big\{ c \geq 0 \colon \quad \forall Y \in \mathcal{F}_X \quad \exists g \in H \quad \Big(\|g\| \leq c \quad \wedge \quad (\forall t \in Y \quad g(t) = f(t)) \Big) \Big\}.$$

Demostración. En la demostración (a)$\Rightarrow$(b), hemos mostrado que $\|f\| \in B$.

Sobre el número c en el teorema

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces $\|f\| = \min(B) = \min(C)$, donde

$$B := \Big\{c \geq 0 \colon \quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad \text{es núcleo}\Big\},$$

$$C := \Big\{c \geq 0 \colon \quad \forall Y \in \mathcal{F}_X \quad \exists g \in H \quad \Big(\|g\| \leq c \quad \wedge \quad (\forall t \in Y \quad g(t) = f(t))\Big)\Big\}.$$

Demostración. En la demostración (a)$\Rightarrow$(b), hemos mostrado que $\|f\| \in B$.

En la demostración (b)$\Rightarrow$(c), hemos mostrado que $B \subseteq C$.

Sobre el número c en el teorema

Proposición

Sea $f \in H$. Entonces $\|f\| = \min(B) = \min(C)$, donde

$$B := \left\{c \geq 0 : \quad c^2 K - f \boxtimes \overline{f} \quad \text{es núcleo}\right\},$$

$$C := \left\{c \geq 0 : \quad \forall Y \in \mathcal{F}_X \quad \exists g \in H \quad \Big(\|g\| \leq c \quad \wedge \quad (\forall t \in Y \quad g(t) = f(t))\Big) \right\}.$$

Demostración. En la demostración (a)$\Rightarrow$(b), hemos mostrado que $\|f\| \in B$.

En la demostración (b)$\Rightarrow$(c), hemos mostrado que $B \subseteq C$.

En la demostración (c)$\Rightarrow$(a), hemos mostrado que si $c \in C$, entonces $\|f\| \leq c$.