Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Estos apuntes están escritos por Roberto Moisés Barrera Castelán.

Introducción

Se sabe que el núcleo reproductor fue utilizado por primera vez a principios del siglo veinte por S. Zaremba en su trabajo [10] sobre problemas de valor en la frontera para funciones armónicas y biarmónicas en 1907, siendo el primero que introdujo, en un caso particular, el núcleo correspondiente a una clase de funciones, y enunció su propiedad de reproducción. Sin embargo no desarrolló ninguna teoría ni dió un nombre particular a los núcleos que introdujo.

En 1909, J. Mercer [7] examinó las funciones que satisfacen la propiedad de reproducción en la teoría de ecuaciones integrales, nombrando estas funciones como *núcleos positivos definidos*. Mostró asímismo que estos núcleos positivos definidos tienen buenas propiedades de entre todos los núcleos continuos de ecuaciones integrales.

Desafortunadamente, estos resultados no fueron investigados durante mucho tiempo. Posteriormente, la idea reapareció en las disertaciones de tres matemáticos alemanes G. Szegö (1921) [8], S. Bergman (1922) [2] y S. Bochner (1922) [6]. En particular, S. Bergman introdujo núcleos reproductores en una y varias variables para la clase de funciones armónicas y la clase de funciones analíticas y las nombró *funciones kernel.*

En 1935 H. Moore examinó los núcleos definidos positivos en su análisis general bajo el nombre de matriz Hermitiana positiva. Posteriormente la teoría de núcleos reproductores fue sistematizada por N. Aronszajn alderedor de 1948.

La idea original de Zaremba de aplicar núcleos a la solución de problemas con valores en la frontera fue desarollada por S. Bergman y M. Schiffer. En estas investigaciones, los núcleos probaron ser una herramienta muy poderosa para resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico con valores en la frontera. Más aún, por medio de la aplicación de núcleos a mapeos conformes de dominios múltiplemente conexos, se obtuvieron hermosos y elegantes resultados por S. Bergman y M. Schiffer.

Teorema de existencia y unicidad del núcleo reproductor

Definición 1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X. Sean $f, g \in \mathcal{H}$, se denota por $\langle f, g\rangle$ al producto interno de funciones y por $\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$ a la norma en $\mathcal{H}$. La función complejo valuada $K : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ denotada por

$$K(x, y) = K_y(x)$$

es llamada un *núcleo (o kernel) reproductor* de $\mathcal{H}$ si satisface:

(I) Para toda $y \in X$, $K_y(x) = K(x, y)$ como función de x pertenece a $\mathcal{H}$.

(II) *La propiedad de reproducción*: para toda $x \in X$ y toda $f \in \mathcal{H}$,

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle$$

Ejemplo 2. Sea $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Para un vector $x = (x_1, ..., x_2) \in \mathbb{R}^n$ podemos definir una función (manteniendo la notación) $x : I_n \to \mathbb{R}$ tal que $x(i) = x_i$, para toda $i \in I_n$. Consideremos entonces H_n^2 como el espacio de todas estas funciones (observamos que el rango de toda función en H_n^2 está contenido en $\mathbb{R}^n$). Entonces en H_n^2 introducimos el producto punto habitual en $\mathbb{R}^n$, esto es, si $x(i) = x_i$ y $y(i) = y_i$ para x, y en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

El espacio H_n^2 es un espacio de Hilbert. Ahora bien, si $K_n : I_n \times I_n \to \mathbb{R}^n$ tiene la regla $K_n(i, j) = \delta_{ij}$, entonces K_n es el núcleo reproductor para $\mathbb{R}^n$. La verificación de este hecho es inmediata.

Ejemplo 3. Ahora, si $l_2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ y H^2 es la clase de funciones $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definidas de manera análoga al ejemplo anterior, con producto interior $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, entonces H^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $K(i, j) = \delta_{i,j}$.

Ejemplo 4. En general, sea H un espacio de Hilbert separable sobre el campo escalar complejo, y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, si $x \in H$, entonces existe una única representación $x = \sum_i \alpha_i e_i$. Definimos la función $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con la regla $x(i) = \alpha_i$. Sea F la clase formada por todas las funciones de la forma anterior. Para x, y en F introducimos el producto interior

$$\langle x, y\rangle_F = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i \langle e_i, e_i\rangle_H = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

Entonces la función $K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, cuya regla es $K(i, j) = \delta_{i,j}$, es el núcleo reproductivo de F.

Ejemplo 5. Sea t un número real positivo. Definimos la clase H_t de trayectorias continuas $q : [0,t] \to \mathbb{R}$, tal que $q(t) = 0$ y $q'(s)$ existe casi dondequiera y es cuadrado integrable (en el sentido de Riemann). Entonces la expresión

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \int\limits_0^t q_1'(s) q_2'(s)\, ds,$$

para cualesquiera q_1 y q_2 en H_t, define un producto interior. En efecto, para q_1 y q_2 en H_t, la integral $\int_0^t q_1'(s)q_2'(s)ds$ es un número real, las propiedades de linealidad y simetría se siguen inmediatamente de este hecho. Ahora, es claro que $q = 0 \in H_t$, entonces si $q = 0$, $\langle q, q \rangle = 0$. Por otra parte, si $\langle q, q \rangle = 0$, i.e. $\int_0^t [q'(s)]^2\, ds = 0$, se sigue que q' es cero casi dondequiera, luego q es constante en $[0,t]$ (por continuidad), pero $q(t) = 0$, entonces $q(s) = 0$ para todo $s \in [0,t]$.

Tenemos que el espacio H_t posee núcleo reproductor. En efecto la función $K : [0,t] \times [0,t] \to \mathbb{R}$ dada por $K(s_1, s_2) = t - \max\{s_1, s_2\}$ define el núcleo reproductivo para H_t.

En primer lugar, es claro que $K(\cdot, s_2)$ pertenece a H_t, para cada $s_2 \in [0,t]$. Ahora, sea $s_2 \in [0,t]$, entonces $\dfrac{d}{ds}K(s, s_2) = 0$ si $s < s_2$ y $\dfrac{d}{ds}K(s, s_2) = -1$ si $s_2 < s$, de tal forma que, para $q \in H_t$, tenemos,

$$\langle q(\cdot), K(\cdot, s_2) \rangle = \int\limits_0^t q'(s) \frac{d}{ds} K(s, s_2)\, ds = -\int\limits_{s_2}^t q'(s)\, ds = q(s_2).$$

Ejercicio 6. Sea

$$K(s,t) = \min(s,t) + \frac{s\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left| \frac{k}{1-k} \right|^2, \quad s, t \in [0,1].$$

Demuestre que

$$\frac{d}{ds} K(s,t) = \begin{cases} 1 + \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & 0 \le s < t, \\ \frac{\overline{k}}{1+\overline{k}} & t < s \le 1. \end{cases}$$

Ejemplo 7 (Itratescu)**.** Sea F el espacio de todas las funciones continuas complejas sobre $[0,1]$, cuya derivada existe casi dondequiera y tal que

i) $\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt < \infty$, para toda $f \in F$.

ii) Existe $k \neq 1$ en $\mathbb{C}$ tal que $f(0) = kf(1)$, para toda $f \in F$.

Bajo la suma y el producto escalar habituales, F es una clase lineal. Mientras que para cualesquiera funciones f y g en F, la expresión

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)\,ds$$

define un producto interior en F. En efecto, es evidente que $\int_0^1 f'(t)\overline{g'}(t)dt$ existe y es un número complejo. Las propiedades de linealidad y antisimetría se siguen de forma inmediata. Es claro además que si $f = 0$ entonces $\langle f, f\rangle = 0$. Y por otra parte, si $\langle f, f\rangle = 0$, i.e. $\int_0^1 |f'(t)|^2 dt = 0$, entonces (por continuidad) $f'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, la función f es pues una constante, digamos c. Por hipótesis, $c = f(0) = kf(1) = kc$, de aquí que $c = 0$, pues $k \neq 1$.

Ahora bien para cualquier para s, t en $[0,1]$, la función

$$K(s,t) = \min(s,t) + \frac{s\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2$$

del ejercicion anteriores el núcleo reproductor de la clase F. Efectivamente, si $t \in [0,1]$ tenemos que,

$$K(0,t) = \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2,$$

mientras que

$$\begin{aligned} kK(1,t) &= k\left(t + \frac{\overline{k}}{1-\overline{k}} + \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2\right) \\ &= kt\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) + \frac{|k|^2}{1-\overline{k}}\left(1 + \frac{k}{1-k}\right) \\ &= \frac{tk}{1-k} + \left|\frac{k}{1-k}\right|^2, \end{aligned}$$

por tanto $K(0,t) = kK(1,t)$. Luego, se sigue por el ejercicio anterior que para $f \in F$ y

$t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\langle f(\cdot), K(\cdot,t)\rangle &= \int_0^1 f'(s)\overline{\frac{d}{ds}}K(s,t)\,ds \\
&= \left(1+\frac{k}{1-k}\right)\int_0^t f'(s)ds + \frac{k}{1-k}\int_t^1 f'(s)\,ds \\
&= \frac{1}{1-k}(f(t)-f(0)) + \frac{k}{1-k}(f(1)-f(t)) \\
&= \frac{1}{1-k}(f(t)-kf(1)+kf(1)-kf(t)) \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

por tanto K es el núcleo reproductor de la clase F.

Proposición 8. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X y $K_x : X \longrightarrow \mathbb{C}$ un núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$. Entonces, para $x \in X$*

$$\|K_x\|^2 = K(x,x)$$

.

Demostración. La hipótesis implica que al aplicar la propiedad de reproducción a la función K_x en y se obtiene, para $x, y \in X$

$$K_x(y) = \langle K_x, K_y\rangle,$$

y por (i)

$$K(y,x) = \langle K_x, K_y\rangle.$$

Por las relaciones de arriba, para todo $x \in X$ se obtiene

$$\|K_x\| = \langle K_x, K_x\rangle^{\frac{1}{2}} = K(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

□

Definición 9. Un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X es llamado un *Espacio de Hilbert con núcleo reproductor* (a menudo abreviado *EHNR*) si existe un núcleo reproductor K de $\mathcal{H}$.

Teorema 10. *Si un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X admite un núcleo reproductor K(x,y), entonces este está determinado de manera única por el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sea $K(x,y)$ un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. Suponga que existe otro núcleo $K'(x,y)$ reproductor de $\mathcal{H}$. Entonces por la proposición anterior, se tiene que para todo $y \in X$,

$$\begin{aligned}\|K_y - K'_y\|^2 &= \langle K_y - K'_y, K_y - K'_y\rangle \\ &= \langle K_y - K'_y, K_y\rangle - \langle K_y - K'_y, K'\rangle \\ &= (K_y - K'_y)(y) - (K_y - K'_y)(y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $K_y = K'_y$, esto es, $K_y(x) = K'_y(x) \quad \forall x \in X$. Esto quiere decir que para todos $x, y \in X$

$$K(x,y) = K'(x,y)$$

□

El siguiente resultado da una forma muy útil para saber cuándo un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X admite un núcleo reproductor.

Teorema 11 (Criterio de *EHNR*: Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductor)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X. Entonces existe un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ sí y sólo si para todo $x \in X$, el* funcional de evaluación $\mathrm{Ev} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *definido mediante la regla*

$$(\mathrm{Ev}\, f)(x) := f(x)$$

es lineal y acotado i.e., $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración. Suponga que $\mathcal{H}$ admite un núcleo reproductor K. Es evidente por su definición, que Ev es lineal. Ahora, por la propiedad de reproducción y la desigualdad de Schwarz para el producto escalar, se tiene que para toda $x \in X$,

$$|f(x)| = |\langle f, K_x\rangle| \leq \|f\|\,\|K_x\| = \|f\|\langle K_x, K_x\rangle^{\frac{1}{2}} = \|f\|K(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

Esto es, $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ahora suponga que para todo $x \in X$ $\mathrm{Ev} : f \in \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ es lineal y acotado, esto es, $\mathrm{Ev} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces por el Teorema de representación de Riesz–Frechét, para todo $x \in X$, existe una única función $g_x \in \mathcal{H}$, tal que

$$(\mathrm{Ev}\ f)(x) = f(x) = \langle f, g_x\rangle.$$

Luego al poner K_x en lugar de g_x, entonces se sigue que para todo $y \in X$,

$$K_x(y) = g_x(y).$$

Por lo que K es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$ □

Definición 12. Sea X un conjunto arbitrario y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ un núcleo sobre X. El núcleo es llamado *Hermitiano* si para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ y cualesquiera números complejos $a_1, \ldots, a_n$ se cumple

$$\sum_{i,j}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) \in \mathbb{R}$$

y K es llamado *positivo definido* si

$$\sum_{i,j}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) > 0.$$

Equivalentemente, la última desigualdad significa que para toda familia de números complejos de soporte finito $\{a_x\}_{x \in X}$ tenemos

$$\sum_{x \in X}^{n} \overline{a_j} a_i K(x_j, x_i) > 0.$$

A menudo se denota esto brevemente como $[K(x, y)] > 0$ en X, o equivalentemente, diremos que K es una *matriz positiva definida en el sentido de E. H. Moore.*
Teorema 13. *El núcleo reproductor $K(x, y)$ de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de funciones sobre un conjunto X es una matriz positiva definida en el sentido de E. H. Moore.*

Demostración. Se tiene

$$0 \leq \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i K_{x_i}, \sum_{j=1}^{n} a_j K_{x_j} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} \langle K_{x_j}, K_{x_i} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{a_j} \langle K(x_i, x_j). \qquad \square$$

Ejercicio 14. Propiedades del núcleo reproductor Sea $\mathcal{H}$ un *EHNR* y sea K su núcleo reproductor. Entonces para todos $x, y \in X$, K satisface:

(*a*) $K(x, x) > 0$.

(*b*) $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

(*c*) $|K(x, x)|^2 \leq K(x, x) K(y, y)$, (Desigualdad de Schwarz).

(*d*) Sea $x_0 \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (*i*) $K(x_0, x_0) = 0$.
- (*ii*) $K(x, x_0) = 0 \quad \forall x \in X$.
- (*iii*) $f(x_0) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

Espacio de Hilbret inducido por un núcleo positivo definido

El siguiente teorema puede pensarse como el inverso del Teorema 4.
Teorema 15. *Para todo núcleo positivo definido $K(x,y)$ en X, existe un único espacio de Hilbert $\mathcal{H}_K$ de funciones en X, que admite el núcleo reproductor $K(x,y)$.*

Demostración. Se denota por $\mathcal{H}_0$ el espacio de funciones f en X tal que existe un conjunto finito de puntos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de X y números complejos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i K(x, y_i),$$

para todo $x \in X$. Sea $g(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \mu_j K(\cdot, x_j) \in \mathcal{H}_0$. Se define ahora el producto interno de las funciones f y g en $\mathcal{H}_0$ como

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \overline{\mu_j} \langle K(\cdot, y_j), K(\cdot, x_i)\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \overline{\mu_j} K(x_i, y_j).$$

Entonces,

$$\langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle K(\cdot, x_i), K(\cdot, x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i K(x, x_i) = f(x)$$

para toda $x \in X$, esto es, $\mathcal{H}_0$ admite la propiedad de reproducción. Esto implica que la definición anterior de producto interno *no* depende de las representaciones de las funciones f y g en $\mathcal{H}_0$. Más aún, es fácil ver que $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$ es lineal en la primera variable y Hermitiana. Como K es positiva definida se sigue que $\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}_0} > 0$ para toda $f \in \mathcal{H}_0$, por eso se tiene la desigualdad de Schwarz para $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0}$. Además, si $\langle f, f\rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$, entonces $\|f\| = 0$ y así, por la propiedad de reproducción anterior, se sigue que para todo $x \in X$,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|K(\cdot, x)\| = 0,$$

lo que implica que $f = 0$. Por lo tanto, $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathcal{H}_0})$ es un espacio pre-Hilbert Ahora se

denota por $\mathcal{H}$ la completación abstracta de $\mathcal{H}_0$ a un espacio de Hilbert. Se mostrará que $\mathcal{H}$ tiene una única representación como un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Considere cualquier sucesión de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_0$. Entonces, para toda $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |\langle f_m, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} - \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| \\ &= |\langle f_m - f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0}| \\ &=\leq \|f_m - f_n\|_{\mathcal{H}_0} K(x,x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De manera que, existe la función $f\colon X \to \mathbb{C}$ tal que para toda $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Más aún, se tiene que

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_0}$$

y que para cualesquiera sucesiones de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}_0$, al denotar por f y g respectivamente, los correspondientes límites puntuales de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene que

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{n,m\to\infty} \langle f_n, g_m\rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

Nótese que de la expresión del límite puntual se obtiene una representación concreta de $\mathcal{H}$ como un espacio de funciones sobre X. Además, K tiene la propiedad de reproducción con respecto a $\mathcal{H}$. En efecto, sea $f \in \mathcal{H}$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ fuertemente. Entonces para todo $x \in X$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, K_x\rangle_{\mathcal{H}_0} = \left\langle \lim_{n\to\infty} f_n, K_x \right\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Resta probar la unicidad del espacio $\mathcal{H}$. Suponga que $\mathcal{H}_1$ es otro espacio de Hilbert con el mismo espacio núcleo reproductor K. Por definición, para todo $x \in X$, $K_x \in \mathcal{H}_1$ y entonces se tiene $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$. También, para todas $f, g \in \mathcal{H}_0$, en virtud de la propiedad de reproducción se sigue que,

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} \ldots (*)$$

Si $f \in \mathcal{H}_1$ es tal que $0 = \langle f, K_x\rangle_{\mathcal{H}_1} = f(x)$ para toda $x \in X$, entonces $f = 0$. Por lo tanto, la familia $\{K_x\colon\ x \in X\}$ es total en $\mathcal{H}_1$. Por lo tanto para toda $f \in \mathcal{H}_1$, puede tomarse una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_0$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Por lo tanto, la utima expresión $(*)$ es válida en $\mathcal{H}_0$. Ahora, como se tiene $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1$ y $(*)$, se obtiene $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$. También, de la construcción de $\mathcal{H}$, se obtiene $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$. Así se tiene $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$.

Finalmente, se debe mostrar que los productos internos y las normas son iguales $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_1$. Considérense cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}_1$ y $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{H}_0$ que convergen a f y g respectivamente. Entonces

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Y por eso las normas en $\mathcal{H}$ y en $\mathcal{H}_1$ son iguales. □

Proposición 16. *Sea F un espacio de funciones con producto interior definido. Si F posee núcleo reproductor entonces cualquier subespacio cerrado F_1 de F también posee núcleo reproductor. Más aún, si K es el n. r. de F y K_1 es el de F_1, entonces $K_1(\cdot, y) = P_{F_1}(K(\cdot, y))$, para toda $y \in E$.*

Demostración. Sea K el n.r. de F. Consideremos un subespacio cerrado F_1 de F. Si $y \in E$, donde E es el conjunto donde están definidas las funciones de F, entonces la correspondencia lineal $f \mapsto f(y)$ es acotada para toda $f \in F$, en particular para $f \in F_1$. Entonces, según el teorema de existencia, existe K_1 n.r. correspondiente a la clase F_1. □

Ejemplo 17. Este ejemplo fue presentado en el trabajo de Zaremba [10]. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Sea H_D^2 la clase de todas las funciones complejas sobre D armónicas y cuadrado integrables (respecto a x e y) sobre $\bar{D}$. El espacio H_D^2, con producto

$$\langle f, g\rangle = \int\int_{\overline{D}} f(z)\overline{g(z)}dxdy, \qquad z = x + iy,$$

con $f, g \in H_D^2$ es un subespacio cerrado de $L_{\overline{D}}^2$.

Sea $z_0 \in D$, probaremos que el funcional $f \mapsto f(z_0)$ es continuo. Tomemos pues f en H_D^2. Ahora, como D es abierto, existe $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_{z_0}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset D$, y dado que f es una función armónica,

$$f(z_0) = \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} f(z)dxdy,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)|dxdy \\
&\leq \frac{1}{(\pi r)^2}\left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} |f(z)|^2dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\int_{\overline{D}_{z_0}(r)} 1dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(\pi r)^2}\|f\|(\pi r^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^{3/2}r}\|f\|,
\end{aligned}$$

y la constante $1/\pi^{3/2}r$ solo depende de z_0. El funcional $f \mapsto f(z_0)$ es entonces acotado y por ello continuo, luego, existe el núcleo K para H_D^2.

Ejemplo 18. Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario sobre $\mathbb{C}$. Consideremos el espacio F de todas las funciones complejas analíticas sobre $\mathbb{D}$ y cuadrado integrables. En F el producto interior queda definido con la expresión habitual

$$\langle f, g\rangle = \iint\limits_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dxdy, \qquad z = x + iy.$$

Entonces F es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$. En efecto, sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en F convergente a una función $f \in L^2(\mathbb{D})$, y z_0 un elemento en $\mathbb{D}$, entonces existe un número $r > 0$ tal que el disco $\overline{D}_r(z_0) = \{z : |z_0 - z| \le r\} \subset D$, y por hipótesis toda función en F es también armónica, luego para toda n, m naturales,

$$\begin{aligned} |f_n(z_0) - f_m(z_0)| &\le \frac{1}{(\pi r)^2} \iint\limits_{\overline{D}_r(z_0)} |f_n(z) - f_m(z)|dxdy \\ &\le \frac{1}{(\pi r)^2} \iint\limits_{D} |f_n(z) - f_m(z)|\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy–Bunyakovski–Schwarz, tenemos

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \le \frac{1}{r\pi^{3/2}}\|f_n - f_m\|,$$

luego, $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número $g(z_0)$. La función g definida en $\mathbb{D}$ por $g(z) = \lim f_n(z)$ es analítica (por ser límite de funciones analíticas), entonces $g = f$ casi seguramente, con lo cual F es cerrado.

Bergman fue quien descubrió que esta clase tiene núcleo reproductor. En efecto, para $z \in \overline{D}$ y $f \in F$ puede probarse de manera análoga al ejemplo anterior que

$$|f(z)| \le \frac{1}{r\pi^{3/2}}\|f\|,$$

donde r solo depende de z, entonces el funcional $f \mapsto f(z)$ es continuo, luego F posee núcleo reproductor.

Ejemplo 19. Sea D como en el ejemplo anterior. Definimos ahora la clase F de funciones complejas f sobre D analíticas tales que

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

existe y es finito. Entonces la expresión

$$\langle f,g\rangle=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(re^{it})\overline{g}(re^{it})dt$$

define un producto interior en F.

Sea z en D, si $f\in F$ entonces, por ser analítica, $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias de la forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,$$

y si $|z|\leq r<1$, entonces

$$|f(z)|^2\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2|z|^{2n}\leq\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n},$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta,$$

por tanto

$$|f(z)|\leq\|f\|.$$

Luego el funcional $f\mapsto f(z)$ es continua para cada $z\in D$, entonces F posee núcleo reproductor. Este espacio es conocido como el espacio H^2 de Hardy.

Referencias

[1] ARONSZAJN, NACHMAN (1950). Theory of Reproducing Kernels. *Transactions of the American Mathematical Society* 68 (3): 337–404.

[2] BERGMAN, STEFAN (1950, 1970) *The Kernel Function and Conformal Mapping*, American Mathematical Society.

[3] BERGMAN, STEFAN; SCHIFFER, MENAHEM MAX (1953). *Kernel Functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, Academic Press.

[4] BERGMAN, STEFAN; HERIOT (1961). Application of the method of the kernel function for solving boundary value problems. Numerische Mathematik 3.

[5] BERGMAN, STEFAN (1969) *Integral operators in the theory of linear partial differential equations*, 2nd ed. Springer 1961.

[6] BOCHNER, SALOMOM; GUNNING, ROBERT C., ED. (1992) *Collected papers.* Parts 1, 2, 3, 4. Providence, R.I.: American Mathematical Society.

[7] MERCER, J. (1909). Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, Philosophical Transactions of the Royal Society A 209 (441-458): 415-446.

[8] SZEGŐ, GÁBOR; PÓLYA, GEORGE (1925, 1972). *Problems and theorems in analysis*, 2 Vols, Springer-Verlag.

[9] SZEGŐ, GÁBOR; GRENANDER, ULF (1958). *Toeplitz forms and their applications*, Chelsea.

[10] ZAREMBA, STANISLAW (1907). Zarys pierwszych zasad teoryi liczb calkowitych (in Polish). Kraków: Akademia Umiejetności.

[11] ZHU, KEHE (2007). *Operator theory in function spaces. Second edition.* Series: Mathematical surveys and monographs, Volume 138, 348 pages. American Mathematical Society.
ISBN 978-0-8218-3965-2.
`http://www.ams.org/bookpages/surv-138`