Biholomorfismo del disco unitario sobre el semiplano superior

Objetivos. Vamos a construir y estudiar la función holomorfa que transforma el disco unitario en el semiplano superior, también su función inversa.

Notaciones.
Denotamos de la siguiente manera el plano complejo extendido, el disco unitario y el semiplano superior:

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}, \qquad \Pi := \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

1. Biholomorfismo del plano complejo que transforma $\mathbb{D}$ en Π.
Encuentre una función de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tal que

$$\varphi(1) = 0, \qquad \varphi(\mathrm{i}) = 1, \qquad \varphi(-1) = \infty.$$

2. Biholomorfismo inverso.
Demuestre que la función $\varphi\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una biyección. Construya su inversa $\psi := \varphi^{-1}$. Indicación: para un $z \in \overline{\mathbb{C}}$ arbitrario resuelva la ecuación $\varphi(w) = z$.

3. Comprobación.
Muestre que $\psi(\varphi(z)) = z$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

4. Comprobación.
Muestre que

$$\psi(0) = 1, \qquad \psi(1) = \mathrm{i}, \qquad \psi(\infty) = -1.$$

5. Valores de $\boldsymbol{\varphi}$ y $\boldsymbol{\psi}$ en otros puntos.
Calcule

$$\varphi(0), \qquad \varphi(-\mathrm{i}), \qquad \psi(1), \qquad \psi(-1).$$

6. Valores de $\boldsymbol{\varphi}$ en puntos reales.
Calcule $\varphi(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$.

7. Valores de $\boldsymbol{\varphi}$ en puntos del intervalo $\mathbf{(-1, 1)}$.
Determine dónde está $\varphi(t)$ cuando $t \in (-1, 1)$.

Derivadas de φ y ψ

8. Expresión de φ a través de una fracción elemental.
Escriba $\varphi(z)$ en forma
$$\varphi(z) = a + \frac{b}{z+c}.$$

9. Derivada de φ.
Para todo $z \in \mathbb{C}$, calcule $\varphi'(z)$.

10. Expresión de ψ a través de una fracción elemental.
Escriba $\psi(w)$ en forma
$$\psi(w) = a + \frac{b}{w+c}.$$

11. Derivada de ψ.
Para todo $w \in \mathbb{C}$, calcule $\psi'(w)$.

12. Comprobación.
De la identidad
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \psi(\varphi(z)) = z$$
sigue que
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \psi'(\varphi(z))\varphi'(z) = 1.$$
Compruebe la última igualdad.

13. Otra comprobación.
De la identidad
$$\forall w \in \mathbb{C} \qquad \varphi(\psi(w)) = w$$
sigue que
$$\forall w \in \mathbb{C} \qquad \varphi'(\psi(w))\psi'(w) = 1.$$
Compruebe la última igualdad.