Cambio holomorfo de variable en una integral compleja de área

Objetivos. Establecer la fórmula de cambio holomorfo de variable en una integral sobre un conjunto abierto del plano complejo.

Requisitos. Fórmula de cambio de variables, relación entre la derivada de una función holomorfa y las derivadas parciales de sus partes real e imaginaria.

Fórmula general del cambio de variables.
En general, si D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ es una función continua y $g\colon D \to \mathbb{R}^n$ es una función continuamente derivable, entonces

$$\int\limits_D f(g(p))\,|\det(g'(p))|\,d\mu(p) = \int\limits_{g(D)} f(q)d\mu(q),$$

donde μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $g'(p)$ es la matriz de las derivadas parciales de la función vectorial g en el punto p. El determinante $\det(g'(p))$ se llama *jacobiano*.

1. Representación vectorial real de una función compleja (repaso).
Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\varphi\colon D \to \mathbb{C}$. Defina las funciones reales $u, v\colon D \to \mathbb{R}^2$ de tal manera que

$$\varphi(x + \mathrm{i}\,y) = u(x, y) + \mathrm{i}\,v(x, y).$$

Respuesta:

$$u(x, y) := \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad v(x, y) := \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

2. Derivadas parciales de las partes real e imaginaria una función holomorfa (repaso).
Sea D un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea $\varphi \in H(D)$. Exprese las derivadas parciales de las funciones u, v a través de la derivada de la función φ:

$$u_x(x, y) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad u_y(x, y) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

$$v_x(x, y) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad v_y(x, y) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

3. Jacobiano de una función holomorfa.
Sea D un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea $\varphi \in H(D)$. Definamos la función vectorial real $g\colon D \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\varphi(x + \mathrm{i}\, y)) \\ \operatorname{Im}(\varphi(x + \mathrm{i}\, y)) \end{bmatrix}.$$

Exprese el jacobiano $\det(g')$ de la función g a través de la derivada φ' de la función φ.

4. Cambio holomorfo de variable en una integral compleja de área.
Sea D un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, sea $\varphi \in H(D)$ y sea $f \in C(D)$. Demuestre que

$$\int\limits_{D} f(\varphi(z))\, |\varphi'(z)|^2 \, d\mu(z) = \int\limits_{\varphi(D)} f(w)\, d\mu(w).$$

donde μ es la medida de Lebesgue del plano $\mathbb{C}$.