Operador adjunto a un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert

Estos apuntes están escritos por Roberto Moisés Barrera Castelán.

Denótese por $\mathcal{B}(H)$ el espacio de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert H. Se puede demostrar, que $\mathcal{B}(H)$ es un espacio de Banach con respecto a la norma de operadores.

Teorema 1. *Teorema del operador adjunto Sea $T \in \mathcal{B}(H)$. Existe un único operador $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

para todo $x, y \in H$.

Demostración. Sea $y \in H$. La relación $x \to \langle T(x), y \rangle \in \mathcal{B}(H)$. Por las propiedades del producto interno, es claramente lineal. Sea $x \in H$ con $\|x\| \leq 1$, como $T \in B(H)$ y por la Desigualdad de Cauchy–Schwarz se tiene

$$|\langle T(x), y \rangle| \leq \|T\| \|y\| \leq M \|X\| \|y\| \leq M \|y\|,$$

donde M es una cota para $\|T\|$. Luego es acotado y por lo tanto continuo. Por el Teorema de Riez-Fréchet existe un único $z \in H$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, z \rangle, \forall x \in H$$

Defínase $T^*(y) = z$. Entonces T^* es una función de H en H y se satisface la condición (4). Además para todas $x, y, v \in H$ y $\lambda, \mu \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\lambda y + \mu v) \rangle &= \langle T(x), \lambda y + \mu v \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle T(x), y) \rangle + \overline{\mu} \langle T(x), v \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle x, T^*(y) \rangle + \overline{\mu} \langle x, T^*(v) \rangle \\
&= \langle x, \lambda T^*(y) + \mu T^*(v) \rangle,
\end{aligned}$$

por lo tanto $T^*(\lambda y + \mu v) = \lambda T^*(y) + \mu T^*(v)$ y así T^* es lineal.

Para ver que T^* es acotado obsérvese que para toda $y \in H$, por la Desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\|T^*(y)\|^2 &= \langle T^*(y), T^*(y) \rangle \\
&= \langle T(T^*(y)), y) \rangle \\
&\leq \|T(T^*(y))\| \|y\| \leq \|T\| \|T^*(y)\| \|y\|.
\end{aligned}$$

Si $\|T^*(y)\| < 0$ se obtiene que $\|T^*(y)\| \le \|T\|\|y\|$, y esta desigualdad también se tiene si $\|T^*(y)\| = 0$. Se sigue que T^* es un operador lineal acotado y $\|T^*\| \le \|T\|$. Finalmente se mostrará que T^* es único. Si $T^*, P \in \mathcal{B}(H)$ son tales que satisfacen la igualdad (2), entonces

$$\langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle, \quad \forall x, y \in H \Longrightarrow T^*(y) = P(y), \quad \forall y \in H$$

Por lo tanto $T^* = P$. El operador T^* es llamado el adjunto de T. $\square$

Proposición 2. *El mapeo $T \to T^*$ tiene las siguientes propiedades:*

(a) $(aS + bT)^* = \overline{a}S^* + \overline{b}T^*$ *para todo* $a, b \in K$ *y* $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

(b) $(ST)^* = T^*S^*$ *para todo* $S, T \in \mathcal{B}(H)$.

(c) $(T^*)^* = T$ *para todo* $T \in \mathcal{B}(H)$.

(d) $\|T^*\| = \|T\|$ *para todo* $T \in \mathcal{B}(H)$.

Demostración. Los incisos b), c) y d) quedan como **Ejercicio**.

a): Sean $a, b \in K$, $S, T \in \mathcal{B}(H)$ y $x, y \in H$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, (aS + bT(y))^*\rangle &= \langle (aS + bT)(x), y\rangle \\
&= a\langle S(x), y\rangle + b\langle T(x), y\rangle \\
&= a\langle x, S^*(y)\rangle + b\langle x, T^*(y)\rangle \\
&= \langle x, \overline{a}S^*(y)\rangle + \langle x, \overline{b}T^*(y)\rangle \\
&= \langle x, (\overline{a}S^* + \overline{b}T^*)(y)\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora damos un ejemplo de un operador lineal acotado en un espacio con producto interno que no tiene un adjunto.

Ejemplo 3. Como en los apuntes del tema "Teorema de representación de Riesz–Fréchet" denotemos por X al espacio de sucesiones finitas y por $f\colon X \to \mathbb{C}$ al funcional lineal acotado definido por la regla

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Notemos que

$$f(e_j) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora definamos $T\colon X \to X$,

$$T(a) := (f(a), 0, 0, \ldots) \qquad (a \in X).$$

Claramente este operador es lineal, acotado y tal que

$$Te_n = (n^{-1}, 0, 0, \ldots) \quad n \in \mathbb{N}$$

de modo que

$$\langle Te_n, e_1 \rangle = \frac{1}{n}.$$

Supongamos que $T^* \in \mathcal{B}(H)$ existe. Entonces

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \qquad \forall x, y \in X$$

por lo que

$$\langle e_n, T^*e_1 \rangle = \langle Te_n, e_1 \rangle = \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por eso, si hacemos $T^*e_1 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la última ecuación daría

$$\overline{b_n} = \langle e_n, T^*e_1 \rangle = \frac{1}{n},$$

es decir,

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pero entonces $T^*e_1 = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin X$ y por lo tanto debemos concluir que T^* no existe.