Representación de funcionales lineales continuos en espacios de Hilbert (teorema de Riesz–Fréchet)

Estos apuntes están escritos por Roberto Moisés Barrera Castelán.

Teorema 1 (Teorema de representación de Riesz–Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea F un funcional lineal continuo en H. Entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$\forall x \in H \qquad F(x) = \langle x, y \rangle.$$

Más aún $\|y\| = \|F\|$.

Demostración. Si F es el funcional lineal cero el Teorema es válido poniendo $y = 0$. Supongamos entonces que F no es el funcional lineal cero y sea

$$M \coloneqq \operatorname{Ker} F = \{x \in H : \ F(x) = 0\}.$$

M es un subespacio propio cerrado de H pues F es continuo y $M = F^{-1}(0)$. Entonces $H = M \oplus M^\perp$. Como F no es el funcional cero $M^\perp \neq 0$. Sea $z \in M^\perp$, $z \neq 0$ tal que $F(z) = 1$ ($z = \frac{w}{F(w)}$ con $w \neq 0$). Para todo $x \in H$ se tiene

$$x = (x - F(x)z) + F(x)z \tag{1}$$

donde $x - F(x)z \in M$, y $F(x)z \in M^\perp$ pues $z \in M^\perp$. Multiplicamos ambos lados de la igualdad (1) por z y usando el hecho de que $z \perp M$ obtenemos

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= \langle (x - F(x)z) + F(x)z, z \rangle \\ &= \langle (x - F(x)z), z \rangle + \langle F(x)z, z \rangle = \langle F(x)z, z \rangle \\ &= F(x)\|z\|^2 \end{aligned}$$

para toda $x \in H$. Sea $y = \frac{z}{\|x\|^2}$, entonces

$$\langle x, y \rangle = \frac{\langle x, z \rangle}{\|x\|^2} = F(x), \quad \forall x \in H.$$

Supóngase que existen $y, y' \in H$ tales que $\langle x, y \rangle = F(x) = \langle x, y' \rangle \quad \forall x \in H$. Entonces

$$0 = \langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, -y' \rangle = \langle x, y - y' \rangle, \forall x \in H$$

$\Rightarrow \quad y - y' = 0$, por lo tanto $y = y'$. Esto termina de probar la primera afirmación del Teorema. Si $\|x\| \leq 1$, entonces por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|F(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$$

y por lo tanto $\|F\| \leq \|y\|$. Por otro lado, $x = \frac{y}{\|y\|}$ es un vector unitario $\Rightarrow \quad \|F\| \geq |F(x)| = \frac{|\langle y, y \rangle|}{\|y\|} = \frac{\langle y, y \rangle}{\|y\|} = \frac{\|y\|^2}{\|y\|} = \|y\|$. Así $\|F\| = \|y\|$. $\square$

El siguiente resultado es muy fácil de demostrar y se deja como ejercicio.

Proposición 2. *Todo vector y que pertenece a un espacio con producto interno X define un funcional lineal acotado $f_y\colon X \to \mathbb{C}$, $x \to \langle x, y\rangle$, tal que $\|f_y\| = \|y\|$. En particular, $f_y \in X^* \quad \forall y \in X$, donde X^* es el dual de X.*

Ahora demostraremos con un ejemplo que el teorema de representación de Riesz–Fréchet no se cumple en espacios con producto interno arbitrarios.

Ejercicio 3. Para cada sucesión de números complejos $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ denotemos por $\operatorname{supp}(a)$ al *soporte de a* que consiste de todos los índices $n \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \neq 0$:

$$\operatorname{supp}(a) = \big\{j \in \mathbb{N}\colon\ a_j \neq 0\big\}.$$

Denotemos por X al conjunto de todas las *sucesiones finitas*:

$$X \coloneqq \big\{a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\colon\ \operatorname{supp}(a) \text{ es finito}\big\}.$$

Muestre que X es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\ell^2(\mathbb{N})$, pero X no es cerrado en X.

Ejercicio 4. Sea X el espacio vectorial de *sucesiones finitas* definido en el ejercicio anterior. Dotamos X con el producto interno estándar (inducido de $\ell^2(\mathbb{N})$):

$$\langle a, b\rangle \coloneqq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_j} \qquad (a, b \in X).$$

Entonces X es un espacio con producto interno. Muestre que X no es completo y por lo tanto no es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 5. Considere X como en el ejercicio anterior. Entonces para $a = (a_n)_{n\geq 1} \in X$ vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\,\|a\|_2$$

y por lo tanto $f\colon X \to \mathbb{C}$ definido por la regla

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

es un funcional lineal acotado sobre X. Ahora supongamos que el teorema de representación de Riesz se cumple para X. Entonces existe un único elemento $b \in X$ tal que

$$f(a) = \langle a, b\rangle, \forall a \in X.$$

Pero para $e_i = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}} \in X$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, tenemos

$$\langle e_j, b\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{ij}\overline{b_i} = \overline{b_j} = f(e_j) = \frac{1}{j}$$

es decir,

$$b_j = \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

lo que es una contradicción pues $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} \notin X$.