Representación integral de la forma sesqilineal asociada a una matriz de Toeplitz

1. Espacio $[0, 2\pi]$ con la medida normalizada. Denotamos por μ a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y consideramos el segmento $[0, 2\pi]$ con la medida normalizada $\frac{1}{2\pi}\mu$. Denotamos por $L^2([0, 2\pi], \mu/(2\pi))$ al espacio de funciones cuadrado integrables respecto a esta medida, con el producto interno

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\theta)\overline{b(\theta)}\, d\theta.$$

2. Base ortonormal de Fourier sobre $[0, 2\pi]$ (repaso). Para cada $m \in \mathbb{Z}$ denotamos por φ_m a la función $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla

$$\varphi_m(\theta) = \mathrm{e}^{m\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Demostrar que para cualesquier $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\langle \varphi_p, \varphi_q\rangle = \delta_{p,q}.$$

3. Producto punto en $\mathbb{C}^n$ (repaso). Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{C}^n$, su producto punto se define como

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} u_j\overline{v_j}.$$

El producto punto se puede escribir como el producto matricial

$$\langle u, v\rangle = v^* u,$$

donde v^* es el vector renglón que se obtiene al transponer y conjugar el vector columna v.

4. El polinomio trigonométrico asociado a un vector (repaso). Dado un vector $v = \left[v_j\right]_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$, el *polinomio trigonométrico asociado* al vector v se define como la función

$$V(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} v_j\varphi_j(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} v_j\,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

5. Proposición (producto interno de los polinomios trigonométricos asociados a dos vectores). Sean $u, v \in \mathbb{C}^n$. Denotemos por U y V a los polinomios trigonométricos asociados a u y v:

$$U(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j\,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,\theta}, \qquad V(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} v_j\,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,\theta}.$$

Notamos que U y V son elementos de $L^2([0,2\pi],\mu/(2\pi))$. Demostrar que

$$\langle U,V\rangle = \langle u,v\rangle,$$

esto es,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\theta)\overline{V(\theta)}\,d\theta = \sum_{j=0}^{n-1} u_j\overline{v_j}.$$

6. Forma sesquilineal asociada a una matriz (repaso). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos la función $S_A\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$S_A(u,v) = \langle Au, v\rangle = v^* Au.$$

Demostrar que la función S_A es lineal respecto al primer argumento y lineal conjugada respecto al segundo:

$$S_A(\alpha u + \beta v, w) = \alpha S_A(u,w) + \beta S_A(v,w), \qquad S_A(u, \alpha v + \beta w) = \overline{\alpha} A(u,v) + \overline{\beta} A(u,w).$$

Demostrar que si $A^* = A$, entonces S_A es hermítica:

$$S_A(u,v) = \overline{S_A(v,u)}.$$

Expresar $S_A(u,v)$ en términos de las entradas de A, u, v, como cierta suma doble.

7. Matrices de Toeplitz asociadas a una función (repaso). Sea $g \in L^\infty([0,2\pi])$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ denotemos por g_k al k-ésimo coeficiente de Fourier de la función g:

$$g_k = \langle g, \varphi_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,\theta}\,d\theta.$$

La matriz

$$T_n(g) \coloneqq \left[g_{j-k}\right]_{j,k=0}^{n-1}$$

es la *matriz de Toeplitz* de orden n asociada a la función g. También se dice que g es la función generador de la sucesión de matrices $T_1(g), T_2(g), T_3(g), \ldots$.

8. Proposición (representación integral de la forma sesquilineal asociada a una matriz de Toeplitz). Sea $g \in L^\infty([0,2\pi])$ y sea $n \in \{1,2,\ldots\}$. Demostrar que para cualesquier $u, v \in \mathbb{C}^n$

$$\langle T_n(g)u, v\rangle = \langle gU, V\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)U(\theta)\overline{V(\theta)}\,d\theta,$$

donde U y V son los polinomios trigonométricos asociados a los vectores u y v.