INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# Servicio Social

## Gustavo Antonio Sandoval Angeles

Título del proyecto:
Comportamiento límite de los espectros
de operadores y matrices de Toeplitz

Nombre del profesor:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
2013

# Índice



Mi servicio social consistió de tres partes:

**Ejercicios teóricos:** Estos son de álgebra lineal, de los temas valores y vectores propios, transformaciones y matrices adjuntas, operadores autoadjuntos y transformaciones y matrices normales, se encuentran en la sección 1.

**Matrices de Toeplitz:** Se estudia un caso particular de estas matrices, las matrices tridiagonales, estudiadas en la sección 3. Para estudiarlas se utilizó un poco de la teoría de sucesiones recurrentes, que se ve en la sección 2.

**Tareas individuales:** Estas tareas son pensadas para que cada alumno tenga una tarea diferente a otro, esto puede llegar a ser engorroso, se utiliza el lenguaje de programación Python para hacerlo menos engorroso, como se ve en la sección 4.

# 1. Ejercicios teóricos

## 1.1. Valores y vectores propios

Resolví los siguientes ejercicios que fueron incluidos en listas de problemas de Álgebra III.

**Problema 1.** *Calcule los valores propios y vectores propios de la matriz* $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } b \neq 0.$$

*Solución.* El polinomio característico de $A$ es $t^2 - at - b$ teniendo como raíces a $x = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ y $y = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$ que son los valores propios de $A$. Estas raíces no pueden ser cero, ya que como $b \neq 0$ la matriz $A$ tiene rango 2.

Supongamos que $x \neq y$, veamos cuales son sus vectores propios, recuerde que

$$x^2 - ax - b = 0, \tag{1.1}$$

por otro lado tenemos

$$\begin{pmatrix} a-x & b \\ 1 & -x \end{pmatrix} \underset{F_1 += (x-a)F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & b+ax-x^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix},$$

y por (1.1) se sigue que

$$\begin{pmatrix} a-x & b \\ 1 & -x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -x \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el espacio solución es $\{(c,d) \mid c = xd\}$ y un vector característico de $x$ es $(x,1)$, análogamente un vector característico de $y$ es $(y,1)$.

Ahora como $x \neq y$ tenemos una base para $\mathbb{R}^2$ que consta de vectores propios entonces $A$ es diagonalizable, y podemos construir la matriz cambio de base que hace ver que $A$ es similar a una matriz diagonal, así podemos escribir

$$A = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Note que $x - y = \sqrt{a^2+4b}$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -1 & x \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Ahora supongamos que $x = y$ esto pasa si y solo si $a^2 = -4b$, entonces $x = \frac{a}{2}$ el cual es el único valor propio de $A$ por lo tanto de orden dos, pero su espacio propio es de dimensión uno. Una base para el espacio propio de $x$ es el vector propio $v = (x,1) = \left(\frac{a}{2}, 1\right)$. Sabemos que el espacio propio generalizado del valor propio $x$ tiene dimensión dos y $v$ es un vector que estará en una base que induzca la forma canónica de Jordan, por lo tanto solo nos falta encontrar otro vector $(z, w)$ tal que

$$(A - xI)\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Pero

$$A - xI = \begin{pmatrix} x & b \\ 1 & -x \end{pmatrix} \underset{F_2 - = F_1/x}{\sim} \begin{pmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el conjunto solución de (1.3) es $\{(c, d) \mid xc + bd = x\}$ en particular podemos tomar $(1, 0)$.

Así $\left\{\left(\frac{a}{2}, 1\right), (1, 0)\right\}$ es nuestra base canónica de Jordan.

Ahora podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

□

**Problema 2.** *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *y* $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *definida como*

$$T(X) := AX - XA \qquad \forall\, X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

I. *Muestre que $T$ es un operador lineal.*

II. *Halle la matriz asociada a $T$ respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$:*

$$\beta = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

III. *Encuentre los valores propios de $T$.*

IV. *Dé los vectores propios de $T$.*

V. *Determine si $T$ es diagonalizable.*

*Solución.* $T$ es un operador lineal, en efecto sea $X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ y $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T(cX + Y) &= A(cX + Y) - (cX + Y)A \\ &= A(cX) + AY - (cX)A - YA \\ &= c(AX) - c(XA) + AY - YA \\ &= c(AX - XA) + AY - YA \\ &= cT(X) + T(Y). \end{aligned}$$

Para calcular la matriz asociada a $T$ respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ evaluemos T en ésta base.

$$\begin{aligned}
T(E_1) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_2 + cE_3 \\
T(E_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_1 + (a-d)E_2 + cE_4 \\
T(E_3) &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = bE_1 + (d-a)E_3 - bE_4 \\
T(E_4) &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_2 - cE_3
\end{aligned}$$

Entonces

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

esta es la matriz asociada a $T$ respecto a $\beta$.

Antes de calcular el polinomio característico de $T$ voy a simplificar el determinante de $[T]_\beta - \lambda I$ por medio de operaciones simples de renglones y columnas.

Sea $e = a - d$, tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -\lambda & -c & b & 0 \\ -b & e-\lambda & 0 & b \\ c & 0 & -e-\lambda & -c \\ 0 & c & -b & -\lambda \end{vmatrix} &\underset{C_4 += C_1}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -c & b & -\lambda \\ -b & e-\lambda & 0 & 0 \\ c & 0 & -e-\lambda & 0 \\ 0 & c & -b & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{F_1 += F_4}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -2\lambda \\ -b & e-\lambda & 0 & 0 \\ c & 0 & -e-\lambda & 0 \\ 0 & c & -b & -\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

calculemos el determinante por cofactores desarrollando por la primera fila

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -2\lambda \\ -b & e-\lambda & 0 & 0 \\ c & 0 & -e-\lambda & 0 \\ 0 & c & -b & -\lambda \end{vmatrix} &= 2\lambda \begin{vmatrix} -b & e-\lambda & 0 \\ c & 0 & -e-\lambda \\ 0 & c & -b \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} e-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -e-\lambda & 0 \\ c & -b & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= 2\lambda \left[-bc(e+\lambda) - c(-b(e-\lambda))\right] - \lambda(e-\lambda)(e+\lambda)\lambda \\
&= 2\lambda(-bce - bc\lambda + bce - bc\lambda) - \lambda^2\left(e^2 - \lambda^2\right) \\
&= -4bc\lambda^2 - \left(e^2 - \lambda^2\right)\lambda^2 \\
&= \lambda^2\left(\lambda^2 - e^2 - 4bc\right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Este es el polinomio característico de $T$ y tiene como raíces

$$0,\ 0,\ \sqrt{(a-d)^2+4bc},\ -\sqrt{(a-d)^2+4bc},$$

y a su vez como valores propios de $T$.

Ahora encontraré los vectores propios de $T$.

Para el $0$ notemos que los vectores propios son $A$ y la matriz identidad $I_{2\times 2} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Si

$$\alpha = \sqrt{(a-d)^2+4bc} \neq 0 \tag{1.6}$$

y $e = a - d$ encontraré el espacio solución de

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -c & b & 0 \\ -b & e-\alpha & 0 & b \\ c & 0 & -e-\alpha & -c \\ 0 & c & -b & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

procederé por Gauss–Jordan

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -c & b & 0 \\ -b & e-\alpha & 0 & b \\ c & 0 & -e-\alpha & -c \\ 0 & c & -b & -\alpha \end{pmatrix} \underset{F_1+=F_4}{\overset{F_3=-F_3}{\sim}} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ -b & e-\alpha & 0 & b \\ -c & 0 & e+\alpha & c \\ 0 & c & -b & -\alpha \end{pmatrix} \underset{F_3-=\frac{c}{\alpha}F_1}{\overset{F_2-=\frac{b}{\alpha}F_1}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 2c \\ 0 & c & -b & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Para continuar hay que tomar algunos casos:

Caso 1 Si $e-\alpha \neq 0$

$$\underset{F_4-=\frac{c}{e-\alpha}F_2}{\overset{F_1=-F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 2c \\ 0 & 0 & -b & -\alpha-\frac{2bc}{e-\alpha} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Caso 1.1 Si $e+\alpha \neq 0$ podemos aplicar a la matriz (1.9) la siguiente operación

$$\underset{F_4+=\frac{b}{e+\alpha}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 2c \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-\frac{2bc}{e-\alpha}+\frac{2bc}{e+\alpha} \end{pmatrix}.$$

Note que

$$-\alpha - \frac{2bc}{e-\alpha} + \frac{2bc}{e+\alpha} = \frac{-\alpha\left(e-\alpha\right)\left(e+\alpha\right) - 2bc\left(e+\alpha\right) + 2bc\left(e-\alpha\right)}{e^2 \text{-} \alpha^2}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\left(\alpha^2 - e^2\right) - 2bce - 2bc\alpha + 2bc\alpha + 2bce - 2bAc\alpha \\ &= \alpha\left(\alpha^2 - e^2\right) - 4bc\alpha \end{aligned}$$

recordemos que $\alpha^2 - 4bc - e^2 = 0$ entonces $\alpha^2 - e^2 = 4bc$ por lo tanto

$$-\alpha - \frac{2bc}{e-\alpha} + \frac{2bc}{e+\alpha} = 0,$$

así que el sistema queda

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y una solución del sistema (1.7) es $\left(\alpha^2 - e^2, -2b\left(e+\alpha\right), 2c\left(e-\alpha\right), e^2-\alpha^2\right)$ recuerde que este es un vector en $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C})$ es decir que se puede ver como matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 - e^2 & -2b\left(e+\alpha\right) \\ 2c\left(e-\alpha\right) & e^2 - \alpha^2 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Caso 1.2 Si $e + \alpha = 0$ entonces $e = -\alpha = -\sqrt{e^2 + 4bc}$ por lo tanto $4bc = 0$, se sigue que $b = 0$ o $c = 0$.

Caso 1.2.1 Si $b = 0$ la matriz (1.9) queda

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \underset{F_3 += \frac{2c}{\alpha}F_4}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

una solución del sistema (1.7) es $(0,0,1,0)$ visto como matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Caso 1.2.2 Si $c = 0$ la matriz (1.9) queda

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e-\alpha & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & -\alpha \end{pmatrix}$$

una solución del sistema (1.7) es $\left(-b\left(e-d\right), -2b^2, \alpha\left(\alpha-e\right), b\left(e-\alpha\right)\right)$ matricialmente se ve

$$\begin{pmatrix} -b\left(e-d\right) & -2b^2 \\ \alpha\left(\alpha-e\right) & b\left(e-\alpha\right) \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Caso 2 Si $e-\alpha = 0$ entonces $e+\alpha \neq 0$, también $e = \alpha = \sqrt{e^2+4bc}$ por lo tanto $4bc = 0$, se sigue que $b = 0$ o $c = 0$.

Caso 2.1 Si $b = 0$ la matriz (1.8) queda

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e+\alpha & 2c \\ 0 & c & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Una solución del sistema (1.7) es

$$\left(-c\left(e+\alpha\right), \alpha\left(e+\alpha\right), -2c^2, c\left(e+\alpha\right)\right)$$

o

$$\begin{pmatrix} -c\left(e+\alpha\right) & \alpha\left(e+\alpha\right) \\ -2c^2 & c\left(e+\alpha\right) \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Caso 2.2 Si $c = 0$ la matriz (1.8) queda

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -b & -\alpha \end{pmatrix} \underset{F_4 += \frac{b}{e+\alpha}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & e+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 += \frac{2b}{\alpha}F_4}{\overset{F_1 += F_4}{\sim}} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Una solución del sistema (1.7) es $(0, 1, 0, 0)$ o

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Note que la solución (1.11) es un múltiplo de (1.12) cuando $b = 0$ y pasa lo mismo para (1.14) y (1.13) respectivamente cuando $c = 0$.

Ahora sí, tenemos el vector característico de $\alpha$.
Si $e - \alpha \neq 0$ y $e + \alpha \neq 0$ entonces el vector característico de $\alpha$ es (1.10)
Si $e - \alpha \neq 0$ y $e + \alpha = 0$ entonces el vector característico de $\alpha$ es (1.12)
Si $e - \alpha = 0$ entonces el vector característico de $\alpha$ es (1.13)

Análogamente para $\beta = -\sqrt{e^2 + 4bc} = -\alpha$ tenemos las mismas posibilidades pero en lugar de $\alpha$ ponemos $\beta$.

Lo anterior fue para cuando $\sqrt{e^2 + 4bc} \neq 0$.
Ahora, si $\sqrt{(a-d)^2 + 4bc} = \sqrt{e^2 + 4bc} = 0$.
Además supongamos que $A$ es matriz escalar o $A$ es la matriz cero $0_{2x2} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ entonces cualquier vector puede ser vector característico, ya que cualquier matriz conmuta con la matriz escalar o con la matriz cero, es decir cualquier matriz de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ es vector característico.
Pero si $A$ no fuera matriz escalar ni la matriz cero en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, note que $(a-d)^2 = -4bc$ entonces $c \neq 0$ o $b \neq 0$, ya que si $b = c = 0$ $A$ sería matriz escalar o matriz cero.
Supongamos que $c \neq 0$ así

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto el rango de $T$ es al menos $1$, se sigue que el espacio propio de $0$ no puede ser de dimensión 4.
Usando un argumento similar para $b \neq 0$ se tiene la misma conclusión. Por lo tanto A no es diagonalizable

Recapitulando.
Si $\sqrt{e^2 + 4bc} \neq 0$ entonces $T$ es diagonalizable.
Si $\sqrt{e^2 + 4bc} = 0$ y $A$ es matriz escalar o $A$ es la matriz cero en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ entonces $T$ es diagonalizable.
De otra forma $T$ no es diagonalizable.

$\square$

## 1.2. Transformaciones lineales en espacios con producto interno

### 1.2.1. Transformación adjunta y matriz adjunta

**Problema 3.** *Consideremos el espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con producto interno*

$$\langle X, Y\rangle := tr\left(X^t Y\right).$$

*Para cualquier matriz fija $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definamos la transformación $M_A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$ por la regla de correspondencia*

$$M_A\left(X\right) := AX.$$

*Encuentre la transformación $\left(M_A\right)^*$*

*Solución.* Recordemos que la adjunta de una transformación lineal $T$, en un espacio vectorial con producto interno $V$, es otra transformación lineal $T^*$ en $V$ tal que $\langle T\left(x\right), y\rangle = \langle x, T^*\left(y\right)\rangle$ para toda $x$ e $y$ en $V$.

Así basta con ver

$$\langle M_A\left(X\right), Y\rangle = \langle AX, Y\rangle = tr\left(\left(AX\right)^t Y\right) = tr\left(X^t\left(A^tY\right)\right) = \langle X, A^tY\rangle \quad \forall \quad X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

porlo lo tanto $\left(M_A\right)^* = M_{A^t}$.

□

**Problema 4.** *Consideremos el espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ con producto interno*

$$\langle X, Y\rangle := tr\left(X^* Y\right).$$

*Para cualquier matriz fija $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ definamos la transformación lineal $M_A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\right)$ por la regla de correspondencia*

$$M_A := AX.$$

*Encontrar la tranformación $\left(M_A\right)^*$.*

*Solución.* Análogamente al problema anterior, basta con notar

$$\langle M_A\left(X\right), Y\rangle = \langle AX, Y\rangle = tr\left(\left(AX\right)^* Y\right) = tr\left(X^*\left(A^*Y\right)\right) = \langle X, A^*Y\rangle \quad \forall \quad X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

porlo lo tanto $\left(M_A\right)^* = M_{A^*}$.

□

**Problema 5.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ . Denotemos por $c_0,\ c_1, \ldots,\ c_{n-1},\ c_n = 1$ a los coeficientes del polinomio característico de $A$:*

$$C_A(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

*Calcule los coeficientes del polinomio característico de la matriz $A^*$.*

*Solución.* Recordemos que un polinomio mónico esta totalmente determinado por sus raíces, y que las raíces del polinomio característico son valores propios, por lo tanto

$$C_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

donde $\lambda_i$ son los valores propios de $A$.

Por otro lado sabemos que si $\lambda_i$ es un valor propio de $A$, entonces $\overline{\lambda_i}$ es valor propio de $A^*$.

Tenemos que

$$C_{A^*}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - \overline{\lambda_i}\right) = \overline{\prod_{i=1}^{n} \left(\overline{\lambda} - \lambda_i\right)} = \overline{C_A\left(\overline{\lambda}\right)}$$

pero

$$\overline{C_A\left(\overline{\lambda}\right)} = \overline{c_0 + c_1\overline{\lambda} + \ldots + c_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \overline{\lambda}^n} = \overline{c_0} + \overline{c_1}\lambda + \ldots + \overline{c_{n-1}}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

así el polinomio característico de $A^*$ es

$$C_{A^*}(\lambda) = \overline{c_0} + \overline{c_1}\lambda + \ldots + \overline{c_{n-1}}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

□

### 1.2.2. Operadores y matrices autoadjuntos

**Problema 6** (Conmutador de operadores autoadjuntos)**.** *Sea $V$ un espacio euclidiano o unitario y sean $S, T \in \mathcal{L}(V)$ transformaciones autoadjuntas. Demuestre que su conmutador $ST - TS$ tiene forma $iU$, donde $U$ es una transformación autoadjunta. En otras palabras, demuestre que la transformación $\frac{1}{i}(ST - TS)$ es autoadjunta.*

*Solución.* Basta con ver quien es la adjunta de $\frac{1}{i}(ST - TS)$

$$\left(\frac{1}{i}(ST - TS)\right)^* = \overline{\frac{1}{i}}(ST - TS)^* = \frac{1}{-i}(T^*S^* - S^*T^*) = \frac{1}{i}(S^*T^* - T^*S^*)$$

y como $S$ y $T$ son autoadjuntos, es decir $T = T^*$ y $S = S^*$, tenemos la igualdad requerida

$$\left(\frac{1}{i}(ST - TS)\right)^* = \frac{1}{i}(ST - TS).$$

□

**Problema 7.** *Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tal que $A$ no sea autoadjunta y $A^2$ sea autoadjunta.*

*Solución.* Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es claro que no es autoadjunta y $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si es autoadjunta.

□

**Problema 8.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}),\ A = A^*$. Demuestre que $I + iA$ es invertible.*

*Solución.* Supongamos que no es invertible, es decir existe un vector $x$ tal que

$$(I + iA)x = 0$$

entonces

$$Ax = \frac{-1}{i}x$$

por lo tanto $\frac{-1}{i}$ es un valor propio de $A$.

Pero como $A$ es autoadjunta todos sus valores propios son números reales, lo cual es una contradicción, ya que $\frac{-1}{i}$ no es real.

□

### 1.2.3. Transformaciones y matrices normales

**Problema 9.** *Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que sea normal pero no sea diagonal ni autoadjunta.*

*Solución.* Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ es claro que no es autoadjunta ni diagonal, y

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

además

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $A$ es normal.

□

**Problema 10.** *Dé un ejemplo de una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tal que $A$ no sea normal y $A^2$ sea normal.*

*Solución.* Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ entones $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que si es normal.

Veamos que $A$ no es normal

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $A$ no es norma.

□

**Problema 11.** *Sea $V$ un espacio unitario y con dimensión finita, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal. Demuestre que para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$*

$$ker\left(T^k\right) = ker\left(T\right).$$

*Solución.* Es claro que $ker\left(T\right) \subset ker\left(T^k\right)$.

Ahora sea $x \in ker\left(T^k\right)$.

Como $V$ es unitario y de dimensión finita, y además $T$ es normal entonces existe una base $\beta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ortonormal formada de vectores propios de $T$.

Así podemos escribir a $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ y tenemos

$$0 = T^k\left(x\right) = T^k\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T^k\left(x_i\right)$$

, como los $x_i$ son vectores propios de $T$ entonces $T^k\left(x_i\right) = \lambda_i^k x_i$, se sigue

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k x_i$$

entonces $a_i \lambda_i = 0$ para toda $i$, si $\lambda_i \neq 0$ entonces $a_i = 0$, es decir los unicos $a_i$ libres son los que pertenecen a los valores propios que son cero por lo tanto $x$ está en el $ker\left(T\right)$.

□

**Problema 12.** *Sea $V$ un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal y nilpotente. Lo último significa que $T^k = 0$ para algún $k$. Demuestre que $T = 0$.*

*Solución.* Por el problema anterior

$$V = ker\left(0\right) = ker\left(T^k\right) = ker\left(T\right)$$

por lo tanto $T = 0$.

□

**Problema 13.** *Sea $V$ un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal y sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ un polinomio. Demuestre que la transformación $f(T)$ es normal.*

*Solución.* **Nota 1.** Sean $T,\, S \in \mathcal{L}(V)$, sabemos que $(TS)^* = S^*T^*$ entonces $(T^n)^* = (T^*)^n$.

**Nota 2.** Sea $\beta$ base de $V$ y $a$ un escalar, recordemos que $aI\,[T]_\beta = [T]_\beta\, aI$ entonces $aT = Ta$.

**Nota 3.** Como $TT^* = T^*T$ entonces $T^n (T^*)^m = (T^*)^m T^n$.

Escribamos a $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, así $f(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ y $(f(T))^* = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,(T^i)^*$ por la nota 1 tenemos

$$(f(T))^* = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,(T^*)^i .$$

Ahora multilpiquemos

$$f(T)(f(T))^* = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} T^{i-j} \overline{a_j}\,(T^*)^j$$

por nota 2

$$f(T)(f(T))^* = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{i} a_{i-j} \overline{a_j} T^{i-j}\,(T^*)^j$$

y por la nota 3

$$\begin{aligned} f(T)(f(T))^* &= \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{i} \overline{a_j} a_{i-j}\,(T^*)^j\, T^{i-j} = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{i} \overline{a_j}\,(T^*)^j\, a_{i-j} T^{i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,(T^*)^i \sum_{i=0}^{n} a_i T^i = (f(T))^* f(T) \end{aligned}$$

por lo tanto $f(T)$ es normal.

$\square$

**Problema 14** (vectores propios de una transformación normal asociados a diferentes valores propios son ortogonales entre si)**.** *Sea $V$ un espacio unitario, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ una transformación normal, sean $u,\, v \in V$ tales que $T(u) = \lambda u$, $T(v) = \mu v$, $\lambda \neq \mu$. Demuestre que $u \perp v$.*

*Solución.* Basta con notar que

$$\lambda\langle u,\, v\rangle = \langle \lambda u,\, v\rangle = \langle T(u),\, v\rangle = \langle u,\, T^*(v)\rangle = \langle u,\, \overline{\mu} v\rangle = \mu\langle u,\, v\rangle$$

entonces

$$(\lambda - \mu)\,\langle u,\, v\rangle = 0$$

como $\lambda \neq \mu$ entonces $\langle u,\, v\rangle = 0$, es decir $u \perp v$.

$\square$

# 2. Sucesiones recurrentes

El concepto de *sucesión recurrente* es una amplia generalización del concepto de progresión aritmética o geométrica. También comprende como casos particulares las sucesiones de cuadrados o cubos de los números naturales, las sucesiones de las cifras de la descomposición decimal de los numeros racionales y, en general, todas las sucesiones periódicas. La teoría de estas sucesiones es un capitulo de la disciplina matemática llamada *Calculo de diferencias finitas*[2].

Escribiremos las sucesiones en la forma

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots \tag{2.1}$$

o brevemente $\{u_n\}$. Si existe un número natural $k$ y unos números $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\ldots$, $a_k$ (reales o complejos) tales que desde un cierto número $n$ y para todos los números siguientes se tiene

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \ \forall\ n \geqq 1 \tag{2.2}$$

la sucesión (2.1) se llama *sucesión recurrente de orden k* y la relación (2.2), *ecuación recurrente de orden $k$*.

Por lo tanto, lo que caracteriza la sucesión recurrente es que todo término suyo (desde el $k$-ésimo) se expresa con la misma combinación lineal de los $k$ elementos anteriores. La palabra «recurrente» se emplea aquí precisamente porque para determinar el término posterior hay que recurrir a los anteriores. Veamos algunos ejemplos de sucesiones recurrentes.

*Ejemplo 1. Progresión geométrica.* Consideremos la progresión geometrica

$$u_1 = a, \quad u_2 = aq, \quad u_3 = aq^2, \ldots, \quad u_n = aq^{n-1}, \ldots,$$

en este caso la ecuación (2.2) da

$$u_{n-1} = qu_n.$$

Aquí $k = 1$ y $a_1 = q$. O sea, la progresión geométrica es una *sucesión recurrente de primer orden*.

□

*Ejemplo 2. Progresión aritmética.* En el caso de una progresión aritmética

$$u_1 = a, \quad u_2 = a + d, \quad u_3 = a + 2d, \ldots, \quad u_n = a + (n-1)d, \ldots$$

tenemos

$$u_{n+1} = u_n + d,$$

o sea, una relación que no tiene el aspecto de la ecuación (2.2). Pero considerando dos relaciones correspondientes a dos valores sucesivos de $n$

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \text{ y } u_{n+1} = u_n + d,$$

y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

es decir,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$

que es una ecuación de tipo (2.2).Aquí $k = 2$, $a_1 = 2$ y $a_2 = -1$. Por lo tanto, la progresión aritmética es una *sucesiñon recurrente de segundo orden*.

□

*Ejemplo 3.* Consideremos la sucesión de Fibonacci

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Tomando $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$, obtenemos

$$u_3 = 1,\ u_4 = 2,\ u_5 = 3,\ u_6 = 5,\ u_7 = 8,\ \ldots$$

Por definición la sucesión de Fibonacci es una *sucesión recurrente de segundo orden*.

□

*Ejemplo 4.* Para el ejemplo siguiente tomemos la sucesión de los cuadrados de los números naturales

$$u_1 = 1^2, \quad u_2 = 2^2, \quad u_3 = 3^2, \ldots, \quad u_n = n^2, \ldots \tag{2.3}$$

Aquí $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ y, por lo tanto,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \tag{2.4}$$

Aumentando $n$ en uno, obtenemos

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3. \tag{2.5}$$

Por consiguiente, restando (2.4) de (2.5), encontramos

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2$$

o sea,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2. \tag{2.6}$$

Aumentando $n$ en uno en la igualdad (2.6), tenemos

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2, \tag{2.7}$$

de donde, restando (2.6) de (2.7)

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

es decir,

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Hemos obtenido una ecuación recurrente de tercer orden. Por lo tanto, la sucesión (2.3) es una *sucesión recurrente de tercer orden*.

$\square$

Análogamente se puede probar que la sucesión de los cubos de los números naturales $1^3$, $2^3$, $3^3$, $\dots$, $\dots$ es una sucesión recurrente de de cuarto orden. Sus términos verifican la ecuación

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n.$$

¿Podremos encontrar una función para los elementos de una *sucesión recurrente de orden k* más directa, es decir sin recurrir a la recursividad?. A continuación se responde esta pregunta para *sucesiones recurrentes de segundo orden*.

Sean $a_1$, $a_2$ números reales o complejos y sea $\{u_n\}$ una *sucesión recurrente de segundo orden* tal que

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n. \tag{2.8}$$

Ahora sea

$$v_n = u_{n-1} \qquad \forall\, n \geqq 1 \text{ y } v_1 = 0,$$

note que $u_n = v_{n+1}$, entonces (2.8) puede verse como

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 v_{n+1}. \tag{2.9}$$

Y por otro lado

$$v_{n+2} = u_{n+1}. \tag{2.10}$$

Ahora (2.9) y (2.10) se ven

$$\begin{array}{ccccccc} u_{n+2} & = & a_1 & u_{n+1} & + & a_2 & v_{n+1}, \\ v_{n+2} & = & 1 & u_{n+1} & + & 0 & v_{n+1}, \end{array}$$

y matricialmente queda

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ v_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \geqq 1$$

O también

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \geqq 2. \tag{2.11}$$

Ahora usando (2.11) demostraré que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \geqq 3. \tag{2.12}$$

Procederé por inducción sobre $n \geqq 3$.

Para $n = 3$ se sigue de (2.11) tomando a $n = 2$.

*Hipótesis de inducción* supongamos que (2.12) se cumple para algún $n \geqq 3$ demostraré que se cumple para $n+1$, es claro ya que

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

y por hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(n+1)-2} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto (2.12) se cumple y además nos da una forma de calcular $u_n$ que sólo depende de $n$. Aunque multiplicar una matriz $n-2$ veces puede ser tedioso, por eso usaré álgebra lineal para hacer esto más simple.

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, sabemos que si $A$ es *diagonalizable* entonces existe $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ invertible y $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ diagonal tal que $A = PDP^{-1}$. En este caso

$$A^n = PD^nP^{-1}. \tag{2.13}$$

Y además como $D$ es diagonal es muy facil calcular $D^n$, en particular si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

tendremos que

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Bueno esto sirve si la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es *diagonalizable.*

Pero si no es así, sabemos que si el polinomio característico de una matriz se puede descomponer en factores de grado uno, esta matriz tiene una *forma canónica de Jordan*[3]. Y como esto siempre lo podemos hacer si trabajamos en el campo de los complejos, entonces para cualquier matriz tenemos una *forma canónica de Jordan* .

En particular si la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*no es diagonalizable* sabemos que existe $P \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ invertible y $J \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ matriz con bloques de Jordan tal que $A = PJP^{-1}$. Análogamente que en el caso de que $A$ fuera *diagonaizable* es fácil ver que $A^n = PJ^nP^{-1}$.

Sólo resta calcular $J^n$.

Como $J$ es una matriz con bloques de jordan de tamaño dos por dos existe $\lambda$ numero complejo tal que

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Por demostrar que

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Procederé por inducción.

Para $n = 1$ es claro ya que

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1\lambda^0 \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix}.$$

*Hipótesis de inducción*: supongamos que existe $n\epsilon\mathbb{N}$ tal que

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

veré si se cumple para $n + 1$

$$J^{n+1} = J^n J,$$

y por *hipótesis de inducción* ,

$$J^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\,\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},$$

por lo tanto se cumple para $n + 1$. Así 2.14 queda demostrada.

Por lo tanto si $A$ no es diagonoalizable

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2.15}$$

De esta forma si tengo una *sucesión recurrente de segundo orden* $\{u_n\}$, podré encontrar una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que $f(n) = u_n$.

*Ejemplo.* La sucesión de Fibonacci $\{u_n\}$ tiene como *ecuación recurrente de segundo orden* $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ y la ecuación (2.12) queda

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \forall\, n \geqq 3$$

Además note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

y (2.13) queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

$\square$

# 3. Matrices de Toeplitz

En el álgebra lineal, una matriz de Toeplitz, denominada así en honor a Otto Toeplitz, es una matriz cuadrada con todas sus diagonales de izquierda a derecha paralelas numéricamente. Una matriz de Toeplitz presenta la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & k \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ j & h & g & f & a \end{pmatrix}$$

Estrictamente $T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es *matriz de Toeplitz* si $T = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ se tiene que $a_{i,j} = a_{i+1,j+1}$.

Si $T = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ es matriz de toeplitz y además $a_{0,i} = a_{i,0} = 0 \qquad \forall\, i \geqq 2$ y $a_{1,0}a_{0,1} \neq 0$ a $T$ le llamaremos *matriz de toeplitz tridiagonal* y se ve

$$T = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Solo trabajé con matrices de Toeplitz tridiagonales.

## 3.1. Determinante de una matriz de Toeplitz tridiagonal

Sea $T_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una *matriz de Toeplitz tridiagonal*

$$T_n = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

Denotemos como $D_n$ al determinante de $T_n$, procedamos a calcular el determinante por medio de los cofacotores empezando por la primera fila

$$D_n = a\det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{matrix}}_{n-1}\end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix} c & b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & & & \\ 0 & c & a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{matrix}}_{n-1}\end{pmatrix}$$

note que la primera matriz es idéntica a $T_n$, pero con menor tamaño, así que la denotaremos como $T_{n-1}$ y a su determinante como $D_{n-1}$, para el determinante de la segunda matriz volvemos a proceder por cofactores, pero ahora por la primera columna ya que es la que más ceros tiene obteniendo

$$D_n = a\,D_{n-1} - bc\det\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ \vdots & & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{matrix}}_{n-2}\end{pmatrix},$$

y hemos encontrado una formula para el determinante de $T_n$

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2} \qquad \forall\, n \geqq 3$$

ó

$$D_{n+2} = aD_{n+1} - bcD_n \qquad \forall\, n \geqq 1. \tag{3.1}$$

Tomando a $D_1 = a$ y $D_2 = a^2 - bc$, además tomemos la convención $D_0 = 1$.

Antes de continuar dos pequeños ejemplos.

*Ejemplo 1.* Si $a = 0$, note que (3.1) se vería $D_{n+2} = -bcD_n$, no es dificil ver que

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-bc)^k & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

□

*Ejemplo 2.* Ahora si $0 \neq a = b = c$, (3.1) se ve

$$D_{n+2} = aD_{n+1} - a^2 D_n \tag{3.2}$$

entonces

$$D_{n+3} = aD_{n+2} - a^2 D_{n+1} \tag{3.3}$$

substituyendo (3.2) en (3.3)

$$D_{n+3} = -a^3 D_n$$

se sigue facilmente que

$$D_m = \begin{cases} (-a^3)^k & \text{si } m = 3k \\ a\,(-a^3)^k & \text{si } m = 3k+1 \\ 0 & \text{si } m = 3k+2 \end{cases}$$

□

La formula (3.1) es una *sucesión recurrente de segundo orden* que se vio en la Sección 2 y se vio como solucionar este tipo de sucesiones.

La ecuación (2.12) queda

$$\begin{pmatrix} D_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} D_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geqq 3.$$

Note que

$$\begin{pmatrix} D_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - bc \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esto nos va a servir para facilitar los calculos; ahora tenemos la ecuación

$$\begin{pmatrix} D_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \geqq 3.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

y como $bc \neq 0$ esta matriz es igual a la que se estudia en el Problema 1 de la Sección 1.1 ahí se vio que $x = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ y $y = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ son las raíces del polinomio característico de $A$, además estas raíces no pueden ser cero.

Si $A$ es diagonalizable, la ecuación (1.2) se ve

$$A = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a-4bc}} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -1 & x \end{pmatrix},$$

y (2.13) queda

$$\begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{a^2-4bc}} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -1 & x \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$D_n = \frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{\sqrt{a^2-4bc}} = \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{a^2-4bc}} \qquad \forall\, n \geqq 3 \tag{3.5}$$

Ahora si $A$ no es diagonalizable, recuerde que $a^2 = 4bc$ y la ecuación (1.2) se ve

$$A = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

y (2.15) queda

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\right)^n & n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{a}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n = (n+1)\,x^n \qquad \forall\, n \geq 3. \tag{3.6}$$

Observe que (3.5) se puede escribir como

$$D_n = \frac{x-y}{\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}\left(x^n + x^{n-1}y + \cdots + y^n\right)$$

pero $x - y = \sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}$ entonces otra forma de escribir (3.5) es

$$D_n = x^n + x^{n-1}y + \cdots + y^n \tag{3.7}$$

en particular si $x = y$ la ecuación (3.6) es igual a (3.7) por lo tanto la ecuación (3.7) no depende de que $A$ sea o no diagonalizable.

Antes de calcular los valores propios de una matriz de Toeplitz tridiagonal voy a recordar las raíces n-ésimas de la unidad, las cuales me van a servir para calcular estos valores propios.

### 3.1.1. Raíces $n$-ésimas de la unidad

Las raíces n-ésimas de la unidad son todos los números complejos que resultan 1 cuando son elevados a una potencia dada n. Se puede demostrar que están localizados en el círculo unitario del plano complejo y que en ese plano forman los vértices de un polígono regular de n lados con un vértice sobre 1.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces las raíces del polinomio $z^n = 1$ en los complejos son $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ con $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

*Ejemplo.* Sea $a \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, calcular las raíces del polinomio

$$P(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n \tag{3.8}$$

note que $P(x) = \left(\frac{1}{a^n}\right)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \cdots + 1\right)$ por lo tanto solo falta calcular las raíces del polinomio $Q(y) = y^n + y^{n-1} + \cdots + 1$ donde $y = \frac{x}{a}$.
Recuerde que $y^{n+1} - 1 = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \cdots + 1)$ por lo tanto las raices de $Q(y)$ son $e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces las raices de $P(x)$ son $ae^{i\frac{2\pi k}{n+1}}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$.

□

## 3.2. Valores propios de una matriz de Toeplitz tridiagonal

Sea $T_n$ como en la Sección 3.1 queremos enconrar su polinomio característico es decir el determinante de $T_n - \lambda I_n$ que por (3.7) sabemos que

$$D_n = x^n + x^{n-1}y + \cdots + y^n$$

donde $x = \frac{a-\lambda+\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2}$ y $y = \frac{a-\lambda-\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2}$ en la Sección 3.1 vimos que $x$ y $y$ no son cero por lo tando

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{y^n}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + 1\right) \\ P(x) &= \left(\frac{x}{y}\right)^n + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + 1 \end{aligned}$$

, como se vio en la Sección 3.1.1 las raíces de $P(x)$ son $ye^{i\frac{2\pi k}{n+1}}$ con $k = 1, 2, \ldots, n$, es decir

$$\frac{a-\lambda+\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2} = \left(\frac{a-\lambda-\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}$$

Ahora solo falta despejar a $\lambda$, de lo anterior se sigue

$$\begin{aligned}
\sqrt{(a-\lambda)^2-4bc}\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right) &= (a-\lambda)\left(e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}-1\right)\\
\left((a-\lambda)^2-4bc\right)\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)^2 &= (a-\lambda)^2\left(e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}-1\right)^2\\
\left(\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)^2-\left(e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}-1\right)^2\right)(a-\lambda)^2 &= 4bc\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)^2\\
4e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}(a-\lambda)^2 &= 4bc\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)^2\\
a-\lambda &= \pm\sqrt{\frac{bc}{e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}}}\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lambda &= \pm\sqrt{bc}e^{-i\frac{\pi k}{n+1}}\left(1+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)+a\\
\lambda &= \pm\sqrt{bc}\left(e^{-i\frac{\pi k}{n+1}}+e^{i\frac{2\pi k}{n+1}}\right)+a\\
\lambda &= \pm 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)+a
\end{aligned}$$

Recuerde que $k=1,2,\ldots,n$ así parece que tenemos $2n$ valores propios lo cual no es posible. Note que

$$-\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi k}{n+1}\right)=\cos\left(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1}\right)$$

Es decir si tomamos la raíz como negativa el $k$-ésimo valor va a ser igual al $(n+1-k)$-ésimo valor cuando tomemos la raíz positiva.

Se sigue que la matriz de Toeplitz tridiagonal tiene $n$ valores propios todos distintos y por tanto es diagonalizable.

# 4. Tareas individuales

## 4.1. Lenguaje de programación Python

Python es un lenguaje de programación creado por Guido van Rossum a principios de los años 90. Se trata de un lenguaje interpretado o de script, con tipado dinámico, fuertemente tipado, multiplataforma y orientado a objetos.

Aprendí los siguientes temas de este leguaje[**?**]: "*Tipos básicos*", "*Colecciones*", "*Control de flujo*", "*funciónes*", "*Orientacion a objetos*", "*Revistando objetos*" y "*Programación funciónal*".

## 4.2. Programas del lenguaje Python

Realice unos programas en el lenguaje de programación Python que a partir de un problema base genera problemas aleatorios, es decir si tenemos un problema con ciertos valores numéricos este programa genera el mismo problema pero con diferentes valores numéricos, además de dar la solución para que sea mas fácil calificar dichos problemas.

Cabe mensionar que estudié el archivo matrix.py que realizo mi prestatario el Dr. Egor Maximenko que consta de 679 lineas y alrededor de 60 funciónes. Este archivo implementa matrices como una clase en Python para las cuales se tiene de diferentes funciónes que ayudan a calcular la inversa de una matriz, operaciones con matrices, calculo de determinantes por diferentes métodos, generación de matrices de forma aleatoria, etc.

En este archivo agregue las siguientes funciónes.

**fillrandDiagonal** Hace que la matriz sea diagonal con números enteros aleatorios que están entre dos números sin tomar al cero, además uno puede pedirle a esta función que repita algunos valores.

```
def fillrandDiagonal3(self,repeated ,maxvalue, randgen):
  self.setidentity()
  n = self._n if self._n<self._m else self._m
  repeated = repeated + (1,)
  maxvalue = maxvalue if maxvalue > (n/2+1) else n
  valores = range(1,maxvalue + 1) + range(-maxvalue,0)
  D = []
  while(len (D)<n):
    j = randgen.randint(0,len(valores)-1)
    D = D + [valores[j]]*repeated[0]
    repeated = repeated[1:] if len(repeated)>1 else (1,)
    valores = valores[:j] + valores[j+1:]
  D.sort()
  self.setdiag(D)
```

**baseKernel** Esta función ve a una matriz como transformación lineal y calcula una base para el kernel de dicha transformación.

```
def baseKernel(self):
  """da listas de listas de la base del kernel """
  copia = self.copy()
  copia.rowreduce()
  base = []
    """caso trivial"""
   for j in xrange(copia._n):
     i = 0
     while(i<copia._m):
      if copia._entries[i][j] != 0:
        break
      i += 1
    if i == copia._m :
      a = Vector(self._n)
      a._entries[j] = 1
      base.append(a)
         n = 0
  while(n<copia._n):
    if copia._entries[0][n] != 0:
      break
    n += 1
  n = copia._n - n - 1
         j = self._n - 1
  while(n>0):
    v = Vector(self._n)
    v[j] = 1
    if not(v in base) :
      for k in xrange(copia._m) :
        for i in xrange(copia._n) :
          if copia._entries[k][i] != 0 :
            v[i] = v[i]-(v*copia[k])
            break
      if set(v._entries) != set([0]):
        base.append(v)
    j -= 1
    n -= 1
  return base
```

**vectoresPropios** Regresa los vectores propios de una matriz para hacer esto utiliza la función “baseKernel”.

```
def vectoresPropios(self,ValP):
  """solo sirve si _m es igual a _n"""
  I = Matrix(self._m,self._n)
  I.setidentity()
  w = []
  v = Matrix(self._m,1)
  aux = self.copy()
  for i in range(len(ValP)):
    w += (aux - Fraction(ValP[i])*I).baseKernel()
  return w
```

**conmutador** Esta función llena una matriz cuadrada dos por dos con números enteros de tal forma que la Sección **??** no sea tan difícil de hacer, es decir que (1.6) sea un numero entero no muy grande o a lo más raíz de 2 y claro diferente de cero.

```
def conmutador(self,randgen):
  a = (2,4,9,16,25,49,64,81,100,121,144,169)
  if(self._n<2 or self._m<2):
    return
  while(1):
    self.fillrandint(-10,10,randgen)
    for k in range(12):
      if((self._entries[1][1]-self._entries[0][0])**2
      +4*self._entries[1][0]*self._entries[0][1]==a[k]):
        return a[k]**0.5
```

**JordanMatrix** Esta función regresa una matriz de tantos bloques de Jordan como uno quiera y con los valores propios que uno quiera.

```
def JordanMatrix(blocks,values):
  N = 0
  for k in range(len(blocks)):
    for i in range(len(blocks[k])):
      N += blocks[k][i]

  R = Matrix(N,N)
  n = 0
  while(n<N):
    block = blocks.pop()
    val = values.pop()
    while(len(block)):
      tam = block.pop()
      while(True):
        R[n,n] = val
        n += 1
        tam -= 1
        if(tam): R[n-1,n] = 1
        else: break
  return R
```

También hice un programa que cuenta cuantas matrices en $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ que puedo generar son "buenas". Estas matrices las voy a generar usando $97$ matrices invertibles $U\epsilon\,\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$, que saqué de un archivo que me paso mi prestatario y otras $10$ matrices $D\epsilon\,\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z})$, que obtuve usando la función **fillrandDiagonal,** las matrices que consideré fueron $UDU^{-1}$. Una matriz buena es cuando tiene a lo mas un cero en alguna de sus entradas, el menor numero en sus entradas es mayor a -25 y el mayor es menor a 25.

```
import random from texout
import * from matrix
import * import pickle

randgen = random.Random()
fgm = open("goodmatrices31.txt", "rt")
goodmatrices = pickle.load(fgm) fgm.close()

AUX = [] E = set()

while(len(E)<10):
  D = Matrix(3,3)
  D.fillrandDiagonal3((1,),5,randgen)
  E.add(D)
A = []
print "cantidad de matrices"
print len(goodmatrices)
while(len(E)>0):
  D = E.pop()
  fgm = open("goodmatrices31.txt", "rt")
  goodmatrices = pickle.load(fgm)
  fgm.close()
  for i in xrange(len(goodmatrices)):
    (U,Uin) = goodmatrices.pop()
    C = U*D*Uin
    aux = [entry for entry in C._all_entries()]
     maxval = max(aux)
    minval = min(aux)
    if (C.countzeros()<2  and maxval<25 and minval>-25) :
      A.append(C)

B = set(A)
print "de las cuales " + str(len(B)) + " SON BUENAS"
```

Además hice un programa que a partir de la función **conmutador** genera un archivo pdf donde biene el operador conmutador en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ que se vio en la Sección 1.1 pero con nuemoros enteros conocidos.

```
from __future__ import print_function
from exercisescreator import *
from matrix import *
import pickle

class TestGoodMatricesCreator(ExercisesCreator):
    title = "Valores propios operador conmutador"
    skills = ["Valores propios"]
    task = "Sea $A\\in M_{2x2}(\\bC)$ y definimos a T:"+\
    "$M_{2x2}(\\bC) \\rightarrow M_{2x2}(\\bC)$ el operador"+\
    "lineal definido como T(X) = XA$-$AX para todo X"+\
    "$\in M_{2x2}$."+\
    "Resolver los siguientes incisos."+\
    "\\begin{enumerate}"+\
    "\item Hallar la matriz de T respecto a la base"+\
    "$\\left \\{E_1 = {#E1#},E_2 = {#E2#},"+\
    "E_3 = {#E3#},E_4 = {#E4#}\\right \\}$."+\
    "\\item Encuentre los valores propios de T en terminos"+\
    "de A."+\
    "\item Dé los vectores propios de T."+\
    "\\end{enumerate}"+\
    "\\[A={#A#}.\\]"
    answer = "\\begin{enumerate}\item \\[T={#T#}.\\]"+\
    "\\item \\[R={#R#}.\\] \ "+\
    "\item Los vectores propios de T.\end{enumerate}"+\
    "\\[{#VecP1#}, {#VecP2#},{#VecP3#},{#A#}.\\]"
    def TryToCreateExercise(self):
      ed = ExerciseData()
      ed.A = Matrix(2,2)
      ed.R = ed.A.mio(self.randgen)

      ed.E1 = Matrix(2,2)
      ed.E2 = Matrix(2,2)
      ed.E3 = Matrix(2,2)
      ed.E4 = Matrix(2,2)
      ed.E1[0,0] = 1
      ed.E2[0,1] = 1
```

```
      ed.E3[1,0] = 1
      ed.E4[1,1] = 1

      ed.T = Matrix(4,4)
      ed.T[0,1] = ed.A[1,0]
      ed.T[0,2] = -ed.A[0,1]
      ed.T[1,0] = ed.A[0,1]
      ed.T[1,1] = ed.A[1,1] - ed.A[0,0]
      ed.T[1,3] = -ed.A[0,1]
      ed.T[2,0] = -ed.A[1,0]
      ed.T[2,2] = ed.A[0,0]-ed.A[1,1]
      ed.T[2,3] = ed.A[1,0]
      ed.T[3,1] = -ed.A[1,0]
      ed.T[3,2] = ed.A[0,1]

      VecP = ed.T.vectoresPropios(ed.R)
      ed.VecP1 = VecP[0][0]*ed.E1 + VecP[0][1]*ed.E2
      + VecP[0][2]*ed.E3 + VecP[0][3]*ed.E4
      ed.VecP2 = VecP[1][0]*ed.E1 + VecP[1][1]*ed.E2
      + VecP[1][2]*ed.E3 + VecP[1][3]*ed.E4
      ed.VecP3 = VecP[2][0]*ed.E1 + VecP[2][1]*ed.E2
      + VecP[2][2]*ed.E3 + VecP[2][3]*ed.E4

      return [ed.A.countzeros()==0, ed]
TestGoodMatricesCreator(todo = "all",
filename = "Task_OperadorConmutador", nexercises = 10)
```

A continuación pongo un ejemplo de tareas individuales que se generaron con ayuda de estás funciónes.

## Una variante de la tarea indivudual del tema "Valores y vectores propios"

---

Esta tarea vale 24 % de la calificación parcial.

**Ejercicio 1.** *3 %.*
Muestre que la matriz $A$ es **diagonalizable** y calcule la matriz **exponencial** $\exp(A)$. Plan:

I. Calcule los valores propios. Para cada uno de los valores propios construya una base del subespacio propio correspondiente.

II. Construya una matriz diagonal $D$ y una matriz invertible $P$ tales que $P^{-1}AP = D$. Haga la comprobación de la última igualdad.

III. Calcule la matriz $\exp(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** *3 %.*
Calcule $f(A)$ usando el **teorema de Cayley–Hamilton**. Instrucciones:

I. Calcule el polinomio característico de la matriz $A$ y compruebe que para la matriz $A$ se cumple el teorema de Cayley–Hamilton.

II. Encuentre un polinomio $g$ de grado $< 2$ tal que $g(A) = f(A)$. Calcule $g(A)$.

III. Para comprobar la respuesta calcule $f(A)$ directamente.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 23.$$

**Ejercicio 3.** *2 %.*
Haga la comprobación del **teorema de mapeo espectral** para la matriz $A$ y el polinomio $f$:

I. Calcule el espectro $\mathrm{Sp}(A)$ de la matriz $A$ y el conjunto $f(\mathrm{Sp}(A))$.

II. Calcule la matriz $f(A)$ y su espectro $\mathrm{Sp}(f(A))$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = x^2 - x + 3.$$

**Ejercicio 4.** *4 %.*
Calcule los **valores y vectores propios** de la matriz $A$. Plan:

I. Calcule el polinomio característico y el espectro de la matriz $A$.

II. Para cada uno de los valores propios de $A$ calcule una base del subespacio propio correspondiente.

III. Determine si $A$ es diagonalizable. Haga la comprobación para los vectores propios.

IV. Calcule el polinomio mínimo $\mu_A$ de la matriz $A$ y haga la comprobación $\mu_A(A) = \mathbf{0}_{3,3}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** *4 %.*
Haga el análisis espectral de la matriz $A$ según el mismo plan.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** *4 %.*
Haga el análisis espectral de la matriz $A$ según el mismo plan.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 7.** *4 %.*
Haga el análisis espectral de la matriz $A$ según el mismo plan.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -6 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

## Una variante de la tarea indivudual del tema "Forma canónica de Jordan"

Nombre: Calificación:

---

Esta tarea vale 18 % de la calificación parcial.

**Ejercicio 1.** *2 %.*
**Polinomio de una matriz de Jordan.** Calcule $f(A)$ de dos maneras diferentes:

I. Por definición del polinomio de una matriz, es decir, como cierta combinación lineal de las potencias de $A$.

II. Aplicando la fórmula para el polinomio de un bloque de Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = -x^3 - 2x^2 + 2x + 2.$$

**Ejercicio 2.** *4 %.*
Muestre que la matriz $A$ no es diagonalizable, calcule su **forma canónica de Jordan** y la función **exponencial** $f(t) \coloneqq \exp(tA)$. Plan:

I. Calcule los valores propios, los vectores propios y los vectores propios generalizados.

II. Construya una matriz de Jordan $J$ y una matriz invertible $P$ tales que $P^{-1}AP = J$. Haga la comprobación de la última igualdad.

III. Calcule la función $f(t) \coloneqq \exp(tA)$.

IV. Haga las comprobaciones: $f(0) = I_2$, $f'(t) = A\exp(tA)$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3.** *4 %.*
Calcule la **forma canónica de Jordan** $J = \mathrm{JCF}(A)$ de la matriz $A$ y construya una matriz invertible $P$ tal que $P^{-1}AP = J$. Haga la comprobación de la igualdad $AP = PJ$. Escriba el polinomio mínimo de $A$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 4.** *4 %.*
Haga la tarea del ejercicio anterior para la siguiente matriz $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** *2 %.*
Calcule la **forma canónica de Jordan** y el polinomio mínimo de la matriz $A$. Para simplificar los cálculos está dado el espectro de $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 4 & -1 \\ 8 & -9 & 8 & -2 \\ 5 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{3, 4\}.$$

**Ejercicio 6.** *2 %.*
Calcule la **forma canónica de Jordan** y el polinomio mínimo de la matriz $A$. Para simplificar los cálculos está dado el espectro de $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{2\}.$$

# Referencias


[1] Raúl Gonzáles Duque
*Python para todos*
http://mundogeek.net/tutorial-python/

[2] A. I. Markushevich
*Sucesiones Recurrentes*
Serie: Lecciones populares de matemáticas
Editorial Mir. Moscú, 1974 (1981)
Colección Lecciones Populares de Matemáticas
Traducción al español de Carlos Vega

[3] Stephen H. Friedberg
*Álgebra Lineal*
Illinois State University
Primera edición México 1982
Publicaciones Cultural S.A.

[4] LaTeX
http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX

[5] Manual de LaTeX
http://www.fceia.unr.edu.ar/lcc/cdrom/Instalaciones/LaTex/latex.html

[6] Sintaxis para la inclusión de fórmulas matemáticas en los foros.
http://rinconmatematico.com/instructivolatex/formulas.htm