INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Servicio Social

Apuntes de los temas:

Formulas explicitas de Trench para la inversa de una matriz de Toeplitz banda

Gabino Sánchez Arzate

Proyecto de investigación: IPN-SIP 20160733
(Diagonalización de algunas clases de matrices y operadores de Toeplitz)

Director del proyecto de investigación:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.
Agosto de 2016

Reporte Global.

Justificación.

Una matriz cuadrada se llama matriz de Toeplitz si los elementos de sus diagonales son constantes, algunas áreas donde surgen las matrices de Toeplitz son discretización de ecuaciones diferenciales, procesamiento de señales, procesos estocásticos, entre otras.

En este texto analizaremos la invertibilidad de este tipo de matices, además del calculo de los elementos de su matriz inversa. La mayoría de los resultados presentados en este texto son pertenecientes a William F. Trench, los cuales son presentados por el en [4].

Objetivos.

- Estudiar de forma detallada el articulo de William F. Trench .
- Agregar resultados auxiliares utilizados por William F. Trench en su articulo.
- Programar en GNU OCTAVE, las funciones necesarias para poder calcular la inversa de una matriz de Toeplitz invertible dada.
- Verificar los resultados y algoritmos mediante verificaciones numéricas.

Marco teórico.

Las matrices de Toeplitz son un tipo especial de matrices, por lo cual son un objeto matemático interesante para estudiar, William F. Trench en su articulo sobre la invertibilidad de las matrices de Toeplitz hace uso de diversos recursos matemáticos el cual no menciona en su texto, algunos de estas herramientas son por ejemplo, la teoría de series formales, recurrencias lineales, entre otras. La finalidad de este texto es proporcionar al lector las herramientas faltantes para entender los resultados de [4], sin tener que adentrarse tanto en el estudio de estas.

La invertibilidad de una matriz es una característica importante de cualquier tipo de matriz, dado que si una matriz A es invertible, el sistema $Ax = B$ tiene una única solución, donde x, B son vectores columna. Invertir una matriz mediante el proceso usual implica un proceso de cálculos demasiado considerable , gracias al articulo de William F. Trench este proceso sobre matrices de Toeplitz banda se ve considerablemente reducido, ya que solo es necesario conocer las raices de su símbolo generador y aplicar unos determinantes especiales los cuales son estudiados y mostrados en el texto, además que hemos hecho programas para el calculo de estos en GNU OCTAVE.

Desarrollo

Al inicio del texto se presenta la definición de matriz de Toeplitz, y algunos resultados sobre matrices de Toeplitz triangulares, matrices de Toeplitz tridiagonales. Continuando con la teoría necesaria para comenzar el estudio del articulo de William F. Trench, resultados que el mismo incluye así como agregados por nosotros y un determinantes especial. Continuamos con el estudio de dos números especiales que son α y β los cuales recurren a el determinante especial para poder ser calculados, de ahí pasamos a los resultados principales, en donde abordamos la inversión de las matrices de Toeplitz banda y el calculo de sus elementos, la mayoría de los resultados tienen sus algoritmos de calculo en GNU OCTAVE.

Conclusiones

El realizar este trabajo resulto de gran importancia, por que así pude mejorar aun mas mi escritura en LaTeX, el cual es un sistema de composición de textos ampliamente usado en la comunidad de matemáticos. Así como mejorar mis habilidades de programación en GNU OCTAVE al realizar distintos códigos, y el poder conocer un poco mas acerca de las matrices de Toeplitz y su extensa aplicacion en diversos problemas.

Introducción

Las matrices de Toeplitz son un tipo especial de matrices, las cuales se caracterizan por tener constantes en cada una de sus diagonales.

En este texto se trata de presentar una versión mas explicada de los resultados en [4], en el cual se presenta la relación que existe entre la inversa de una matriz de Toeplitz banda $T_n(\varphi)$ de tamaño n, donde $\varphi \in \mathbb{C}^{2n-1}$ y las raices del polinomio $\varphi(z) = \sum_{\mu=-q}^{p} \varphi_\mu z^{\mu+q}$.

Encontrando que los elementos de $(T_n(\varphi))^{-1}$ se encuentran estrechamente relacionados con los elementos de la matriz inversa de la matriz triangular inferior de Toeplitz formada por los elementos de φ desplazados bajo la diagonal principal, definidos por $(\varphi(z))^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu$, y también a la matriz inversa de la matriz triangular superior de Toeplitz formada por los elementos de φ desplazados sobre la diagonal principal,.

Hemos además tratado de presentar los resultados adicionales acerca de la matrices de Toeplitz y deducirlos de la forma mas natural posible, sin depender tanto de resultados externos y, en caso de requerir de estos los presentamos de la forma mas simple que sea posible apoyándonos de fuentes donde el lector pueda verlos de forma mas detallada.

Además creímos conveniente crear unos algoritmos sencillos para realizar verificaciones numéricas, estos algoritmos se encuentran en el lenguaje OCTAVE y aunque estos son demasiado sencillos esperamos que a alguien le sean de utilidad.

Índice

1. Matrices de Toeplitz Banda

Durante este texto asumiremos que las componentes de los vectores pertenecen a $\mathbb{C}$, a menos que se diga lo contrario.

1.1 Definición. Sea $\varphi \in \mathbb{C}^{2n-1}$, donde $\varphi = [\varphi_j]_{j=-n+1}^{n-1}$. Denotaremos por $T_n(\varphi)$ a la *matriz de Toeplitz de tamaño* $n \times n$ *generada por* φ

$$T_n(\varphi) = \left[\varphi_{j-k}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Es decir una matriz de Toeplitz, es una cuadrada cuyos elementos de sus diagonales (de izquierda a derecha) son constantes. Por ejemplo una matriz de Toeplitz de tamaño $n = 5$ seria la siguiente,

$$T_5(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} & \varphi_{-4} \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} & \varphi_{-3} \\ \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \varphi_{-2} \\ \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} \\ \varphi_4 & \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{bmatrix}$$

1.2 Definición. Llamaremos a φ un polinomio de Laurent, si φ

$$\varphi = \textstyle\sum_{j=-r}^{s} \varphi_j t^j. \tag{1}$$

Diremos que este polinomio es el *símbolo generador* de una matriz de Toeplitz, si los coeficientes del polinomio de Laurent coinciden con los elementos de la matriz de Toeplitz.

Ahora sean φ un polinomio de Laurent y $u \in \mathbb{C}^3$, un vector arbitrario de la forma

$$u = [u_j]_{j=0}^{2},$$

si este multiplica a la matriz $T_3(\varphi)$, se tiene que

$$c = T_3(\varphi) \cdot u = \begin{bmatrix} \varphi_0 u_0 + \varphi_{-1} u_1 + \varphi_{-2} u_2 \\ \varphi_1 u_0 + \varphi_0 u_1 + \varphi_{-1} u_2 \\ \varphi_2 u_0 + \varphi_1 u_1 + \varphi_0 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{2} \varphi_{0-k} u_k \\ \sum_{k=0}^{2} \varphi_{1-k} u_k \\ \sum_{k=0}^{2} \varphi_{2-k} u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

esto da lugar a la siguiente proposición.

1.3 Proposición. *Sean* φ *un polinomio de Laurent y* $u = [u_j]_{j=0}^{n-1}$ *un vector columna, entonces las componentes de* $T_n(\varphi) \cdot u = [c_j]_{j=0}^{n-1}$ *están dados por* $c_j = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{j-k} u_k$.

Demostración. Dado que $(T_n(\varphi))_{j,k} = \varphi_{j-k}$ tenemos que por el producto usual de matrices la entrada c_j es,

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{j-k} u_k.$$

□

1.4 Definición. Sea φ un polinomio de Laurent, decimos que la matriz $T_n(\varphi)$ es una matriz de Toeplitz triangular inferior, si los elementos de φ son tales que $\varphi_{-n} = 0$ para $n \geq 1$, análogamente diremos que una matriz de Toeplitz es una matriz triangular superior si los elementos de φ son tales que $\varphi_n = 0$ para $n \geq 1$.

1.5 Corolario. *Sean* a *y* b *polinomios de Laurent de las matrices triangulares inferiores de Toeplitz* $T_n(a)$ *y* $T_n(b)$ *respectivamente, entonces los elementos del producto* $a \cdot b = ab$*, estan definidos por* $ab_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_{r-k} b_k$ *para* $r \in [\![0, n]\!]$ *.*

1.6 Proposición. *Sean* a *y* b *polinomios de Laurent, tales que sus elementos cumplen que* $a_{-n} = 0$ *y* $b_{-n} = 0$*, para* $n \geq 1$*. Entonces el producto* $T_n(a) \cdot T_n(b)$ *es una matriz triangular de Toeplitz que coincide con* $T_n(ab)$ *y cuyos elementos de la primera columna están determinados por* $(T(ab)_n)_{r,0} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{r-k} b_k$.

Demostración. Sean

$$T_n(a) = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T_n(b) = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}.$$

Se sabe que $T_n(a) \cdot T_n(b)$ es una matriz triangular inferior y además por el producto usual de matrices sus entradas son.

$$\begin{aligned} (T_n(a) \cdot T_n(b))_{rj} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{rk} b_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{r-k} b_{k-j} \quad \text{con } r, j \in [\![0, n-1]\!]. \end{aligned}$$

Ahora vamos a mostrar que $T_n(a) \cdot T_n(b)$ es una matriz de Toeplitz, para esto solo basta probar que

$$(T_n(a) \cdot T_n(b))_{r,j} = (T_n(a) \cdot T_n(b))_{(r+1),(j+1)}, \quad \forall r, j \in [\![0, n-2]\!].$$

Entonces si $r, j \in [\![0, n-2]\!]$, tenemos que

$$\begin{aligned} (T_n(a) \cdot T_n(b))_{(r+1),(j+1)} &= \sum_{k'=0}^{n-1} a_{r+1-k'} b_{k'-(j+1)} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} a_{r-(k'-1)} b_{(k'-1)-j} \\ &= \sum_{k=-1}^{n-2} a_{r-k} b_{k-j} \end{aligned}$$

Pero debemos de notar que $b_{-(j+1)} = 0$ y $a_{r-(n-1)} = 0$ $\forall j, r \in [\![0, n-2]\!]$

$$\begin{aligned}
(T_n(a) \cdot T_n(b))_{(r+1),(j+1)} &= a_{r+1} b_{-(j+1)} + \sum_{k=0}^{n-2} a_{r-k} b_{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} a_{r-k} b_{k-j} + a_{r-(n-1)} b_{(n-1)-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{r-k} b_{k-j} = (T_n(a) \cdot T_n(b))_{r,j}
\end{aligned}$$

Ahora como sabemos que $T_n(a) \cdot T_n(b)$ es una matriz de Toeplitz, donde todos sus elementos son descritos en la primera columna (por ser una matriz triangular), de este hecho tenemos que

$$(T_n(a) \cdot T_n(b))_{r,0} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k$$

de lo cual tenemos que

$$T_n(a) \cdot T_n(b) = T_n(ab) \qquad \square$$

1.7 Definición. Dado φ un polinomio de Laurent diremos que una matriz de Toeplitz $T_n(\varphi)$ es una matriz Toeplitz banda si para dados dos enteros no negativos p y q se tiene que

$$\varphi_r = 0 \quad \text{si } r > p \text{ o } r < -q. \tag{2}$$

A partir de aquí supondremos que las matrices de Toeplitz que manejemos son banda y además supondremos que

$$\varphi_p \varphi_{-q} \neq 0 \text{ y } p + q = k \leq n - 1. \tag{3}$$

Por ejemplo tomemos la matriz $T_5(\varphi)$

$$\begin{bmatrix}
\varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 & 0 \\
\varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 \\
0 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} \\
0 & 0 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_0
\end{bmatrix}$$

la cual es una matriz banda, ya que $\varphi_r = 0$ para $r < -1$ y $2 < r$. A continuación presentamos un algoritmo para crear una matriz de Toeplitz banda a partir de un vector columna $\texttt{coefs}$, el que contiene los coeficientes del símbolo generador de la matriz, q de nota el numero de bandas superiores de la matriz y n el tamaño de esta.

```
function A=bandtoeplitz(coefs,q,n);
  col = zeros(n,1);
  row = zeros(n,1);
  m=length(coefs);
  for i=1:(m-q)
    col(i)=coefs((m-q+1)-i);
  end
  for i=1:q+1
    row(i)=coefs((m-q-1)+i);
  end
  A = toeplitz(col,row);
end
```

2. Matrices tridiagonales centradas de Toeplitz

2.1 Definición. Sea φ un polinomio de Laurent, diremos que $T_n(\varphi)$ es una matriz de Toeplitz tridiagonal centrada, si los elementos de φ son tales que $\varphi_r = 0$ con $r \in [\![-1, 1]\!]^C$

Por ejemplo, si $n = 3$, la matriz de Toeplitz tridiagonal centrada es

$$T_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{bmatrix}$$

cuyo símbolo generador es $\varphi(t) = \varphi_1 t + \varphi_0 + \varphi_{-1} t^{-1} = t^{-1}(\varphi_1 t^2 + \varphi_0 t + \varphi_{-1})$, supongamos que las raíces del polinomio $\varphi(t)$ son z_1 y z_2 (ambas distintas de cero). Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^{-1}\varphi_1(t - z_1)(t - z_2) \\ \Rightarrow \varphi_0 &= -\varphi_1(z_1 + z_2) \\ \Rightarrow \varphi_{-1} &= \varphi_1(z_1 z_2) \end{aligned}$$

es decir

$$T_3(\varphi) = \begin{bmatrix} -\varphi_1(z_1 + z_2) & \varphi_1(z_1 z_2) & 0 \\ \varphi_1 & -\varphi_1(z_1 + z_2) & \varphi_1(z_1 z_2) \\ 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1 + z_2) \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \det(T_3(\varphi)) &= \begin{vmatrix} -\varphi_1(z_1 + z_2) & \varphi_1(z_1 z_2) & 0 \\ \varphi_1 & -\varphi_1(z_1 + z_2) & \varphi_1(z_1 z_2) \\ 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1 + z_2) \end{vmatrix} \\ &= -\varphi_1^3 \left(z_1^3 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_2^3 \right) \\ &= -\varphi_1^3 \left(\sum_{k=0}^{3} z_1^{3-k} z_2^k \right) \end{aligned}$$

Veamos otro caso ahora para $n = 4$, se tiene que la matriz de Toeplitz tridiagonal es

$$T_4(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{bmatrix}$$

de igual manera su símbolo generador es

$$\varphi(t) = \varphi_1 t + \varphi_0 + \varphi_{-1} t^{-1} = t^{-1}(\varphi_1 t^2 + \varphi_0 t + \varphi_{-1})$$

y supongamos que este tiene raíces z_1 y z_2 (ambas distintas de cero). Entonces tenemos que

$$T_4(\varphi) = \begin{bmatrix} -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) & 0 & 0 \\ \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) & 0 \\ 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) \\ 0 & 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) \end{bmatrix}$$

donde su determinante es

$$\begin{aligned} \det(T_4) &= \begin{vmatrix} -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) & 0 & 0 \\ \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) & 0 \\ 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) & \varphi_1(z_1z_2) \\ 0 & 0 & \varphi_1 & -\varphi_1(z_1+z_2) \end{vmatrix} \\ &= \varphi_1^4\left(z_1^4 + z_1^3z_2 + z_1^2z_2^2 + z_1z_2^3 + z_2^4\right) \\ &= \varphi_1^4\left(\sum_{j=0}^{4} z_1^{4-k}z_2^k\right), \end{aligned}$$

lo que da lugar a la siguiente proposición.

2.2 Proposición. *Dado φ un polinomio de Laurent tal que $\varphi_r = 0$ si $r \in [\![-1,1]\!]^{\complement}$, entonces $T_n(\varphi)$ la matriz de Toeplitz tridiagonal centrada, cuyo símbolo generador es $\varphi(t)$ el cual tiene raíces z_1 y z_2 (ambas distintas de cero), entonces el determinante de $T_n(\varphi)$ esta dado por*

$$\det(T_n(\varphi)) = (-1)^n\varphi_1^n \sum_{j=0}^{n} z_1^{n-j}z_2^j \quad \textit{para } n \geq 2.$$

Demostración. Sea $T_n(\varphi)$ una matriz de Toeplitz tridiagonal centrada cuyo símbolo generador es

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \textstyle\sum_{j=-1}^{1} \varphi_j t^j \\ &= t^{-1}(\varphi_1 t^2 + \varphi_0 t + \varphi_{-1}). \end{aligned}$$

Y supongamos que las raíces de este polinomio son raíces z_1 y z_2 (ambas distintas de cero), entonces tenemos por otra parte que

$$\varphi(t) = t^{-1}\varphi_1(t-z_1)(t-z_2) = t^{-1}(\varphi_1 t^2 - \varphi_1(z_1+z_2)t + \varphi_1(z_1z_2)),$$

de lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi_0 = -\varphi_1(z_1+z_2) \\ &\Rightarrow \varphi_{-1} = \varphi_1(z_1z_2). \end{aligned}$$

Si $n = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\det(T_n(\varphi)) &= \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} \\ \varphi_1 & \varphi_0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\varphi_1(z_1 + z_2) & \varphi_1(z_1 z_2) \\ \varphi_1 & -\varphi_1(z_1 + z_2) \end{vmatrix} \\
&= \varphi_1^2 (z_1 + z_2)^2 - \varphi_1^2 z_1 z_2 \\
&= \varphi_1^2 (z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_2) \\
&= \varphi_1^2 (z_1^2 z_2^0 + z_1 z_2 + z_1^0 z_2^2) \\
&= (-1)^2 \varphi_1^2 \left(\sum_{j=0}^{2} z_1^{2-j} z_2^j \right).
\end{aligned}$$

Supongamos que se cumple que

$$\det(T_n(\varphi)) = (-1)^n \varphi_1^n \sum_{j=0}^{n} z_1^{n-j} z_2^j,$$

para $n \geq 2$. Ahora para $n+1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\det(T_{n+1}(\varphi)) &= \begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_0 \end{vmatrix} \\
&= \varphi_0 \det(T_n(\varphi)) - \varphi_{-1} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_0 & \varphi_{-1} & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1 & \varphi_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_0 \end{vmatrix} \\
&= \varphi_0 \det(T_n(\varphi)) - \varphi_{-1}(\varphi_1 \det(T_{n-1}(\varphi)) \\
&= \left[-\varphi_1(z_1 + z_2) \left((-1)^n \varphi_1^n \sum_{j=0}^{n} z_1^{n-j} z_2^j \right) \right] - \varphi_1(\varphi_1 z_1 z_2 \det(T_{n-1}(\varphi))) \\
&= (-1)^{n+1} \varphi_1^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} z_1^{(n+1)-j} z_2^j + \sum_{j=0}^{n} z_1^{n-j} z_2^{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} z_1^{n-j} z_2^{j+1} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \varphi_1^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} z_1^{(n+1)-j} z_2^j + z_1^0 z_2^{n+1} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \varphi_1^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} z_1^{(n+1)-j} z_2^j. \qquad \square
\end{aligned}
$$

El siguiente algoritmo calcula el determinante de una matriz de Toeplitz tridiagonal dado los coeficientes del símbolo generador sg y el tamaño de la matriz n.

```
function c=detri(sg,n);
  r=roots(sg);
  aux=0;
  for j=0:n
    aux=(r(1)**(n-j))(r(2)**j)+aux;
  end
  c=((-sg(1))**n)*aux;
end
```

3. Determinante D

Suposición A. Los distintos ceros de (1) son $z_1, \ldots, z_m$, con multiplicidades $\mu_1, \ldots, \mu_m$; donde , $m \leq k$, $1 \leq \mu_j$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$, y donde

$$\mu_1 + \ldots + \mu_m = k.$$

3.1 Definición. Si $j_1, \ldots, j_k$ son enteros, sea

$$C(z; j_1, \ldots, j_k) = \mathrm{col}[z^{j_1}, \ldots, z^{j_k}]$$

y sea $C^{(l)}(z; j_1, \ldots, j_k)$ la l-ésima derivada de este vector columna. Ahora definimos el determinante $D(j_1, \ldots, j_k)$ de tamaño $k \times k$ donde: Las primeras columnas μ_1 son $C^{(l)}(z_1; j_1, \ldots, j_k)$ ($l \in [\![0, \mu_1 - 1]\!]$); las siguientes μ_2 columnas son $C^{(l)}(z_2; j_1, \ldots, j_k)$ ($l \in [\![0, \mu_2 - 1]\!]$), etc...

Para ejemplificar supongamos que z_1, z_2 y z_3, son raíces de multiplicidad 2, 3 y 1 respectivamente, entonces se tiene que el determinante $D(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ es,

$$D(0,1,2,3,4,5) = \begin{vmatrix} z_1^0 & 0 & z_2^0 & 0 & 0 & z_3^0 \\ z_1^1 & z_1^0 & z_2^1 & z_2^0 & 0 & z_3^1 \\ z_1^2 & 2z_1^1 & z_2^2 & 2z_2^1 & 2z_2^0 & z_3^2 \\ z_1^3 & 3z_1^2 & z_2^3 & 3z_2^2 & 6z_2^1 & z_3^3 \\ z_1^4 & 4z_1^3 & z_2^4 & 4z_2^3 & 12z_2^2 & z_3^4 \\ z_1^5 & 5z_1^4 & z_2^5 & 5z_2^4 & 20z_2^3 & z_3^5 \end{vmatrix}$$

3.2 Definición. Se dice que una matriz V de tamaño $n \times n$, es de Vandermonde si su entrada (j, k) (que denotaremos por $V_{j,k}$), es de la forma $V_{j,k} = \alpha_j^k$ con $j, k \in [\![0, n-1]\!]$.

Por ejemplo una matriz de Vandermonde de tamaño 5×5, es de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 & \alpha_0^4 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \alpha_1^4 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \alpha_2^4 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & \alpha_3^4 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 & \alpha_4^4 \end{bmatrix}.$$

Pero notemos que el determinante de esta matriz coincide, con el determinante $D(0, 1, 2, 3, 4)$, cuando las raíces son de multiplicidad 1.

3.3 Lema. *El determinante de una matriz de Vandermonde,* V *de tamaño* $n \times n$ *esta definido por*

$$\det(V) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_j)\,.$$

Véase [3]. Otro ejemplo del determinante D es, si (1) tiene k distintas raíces, entonces

$$D(j_1,\ldots,j_k) = \det(z_s^{j_r})_{r,s=1}^{k}.$$

Donde si $j_l = l$, $\forall l \in [\![1,k]\!]$, tenemos que

$$\begin{aligned} D(1,\ldots,k) &= \begin{vmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_k^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^k & z_2^k & \cdots & z_k^k \end{vmatrix} \\ &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{k} (z_i - z_j)\,. \end{aligned}$$

A continuación un algoritmo crea las columnas $C^{(l)}(z; j_1,\ldots,j_k)$, donde se recibe un entero $0 \leq l$ un vector z que contiene las raíces y un vector J que son los j_ν con $\nu \in [\![1,k]\!]$

```
function r=colC(l,z,J);
  n=length(J);
  for i=1:n
    r(i)=bincoeff(J(i),l)*factorial(l)*(z**(J(i)-l));
  end
end
```

El siguiente algoritmo, es el del determinante $D(j_1,\ldots,j_k)$ donde se recibe vector z que contiene las raíces, el vector m son las multiplicidades de las raíces y un vector J que son los j_ν con $\nu \in [\![1,k]\!]$

```
function r=detD(z,m,J);
  n=length(z);
  aux=1;
  for i=1:n
    for l=0:(m(i)-1)
      A(:,aux)=colC(l,z(i),J);
      aux=aux+1;
    end
  end
  r=det(A);
end
```

3.4 Lema. *Suponga que* $j \in [\![1,k]\!]$ *y* $j_1,\ldots,j_{l-1},j_{l+1},\ldots,j_k$ *son enteros fijos y que* $k = m$ *(es decir* $\mu_j = 1,\ \forall j \in [\![1,m]\!]$*). Entonces la secuencia*

$$e_r = D\left(j_1,\ldots,j_{l-1},r,j_{j+1},\ldots,j_k\right) \quad -\infty < r < \infty\ ,$$

satisface la ecuación

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} = 0 \ .$$

Demostración. Se tiene que la expansión por cofactores del determinante

$$D\left(j_1, \ldots, j_{l-1}, r, j_{j+1}, \ldots, j_k\right),$$

sobre la l-ésima fila, es

$$e_r = \sum_{j=1}^{m} \hat{A}_{lj} A_{lj} \ ,$$

donde A_{lj} representa la entrada (l, j) de la matriz del determinante y $\widehat{A_{lj}}$ el cofactor correspondiente a esta entrada, entonces

$$\begin{aligned} e_r &= \sum_{j=1}^{m} \hat{A}_{lj} A_{lj} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} z_j^r, \text{ dado que } A_{lj} = z_j^r, \ \forall j \in [\![1, m]\!]. \end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} &= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} \\ &= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \left(\sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} z_j^{\nu+r} \right) \\ &= \sum_{\nu=-q}^{p} \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} \varphi_\nu z_j^{\nu+r} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=-q}^{p} \widehat{A_{lj}} \varphi_\nu z_j^{\nu+r} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} \left(\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu z_j^{\nu+r} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} z^{r-q} \left(\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu z_j^{\nu+q} \right) \ . \end{aligned}$$

Donde el polinomio $P(z) = \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu z^{\nu+q}$ tiene como raíces a z_j, con $j \in [\![1, m]\!]$, lo cual implica que $P(z_j) = 0$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$,

$$\therefore \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} = 0 \ . \qquad \square$$

3.5 Lema. *Si un polinomio* $P(z)$ *tiene una raíz* z_0 *de multiplicidad* $1 < \mu_0$*, entonces la* l*-ésima derivada del polinomio* $P^{(l)}(z)$*, con* $l \in [\![1, \mu_0 - 1]\!]$ *tiene como raíz a* z_0*.*

3.6 Lema. *Suponga que* $l \in [\![1, k]\!]$ *y* $j_1, \ldots, j_{l-1}, j_{l+1}, \ldots, j_k$ *son enteros fijos. Entonces la secuencia*

$$e_r = D(j_1, \ldots, j_{l-1}, r, j_{l+1}, \ldots, j_k) \qquad -\infty < r < \infty \tag{4}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} = 0. \tag{5}$$

Demostración. De la expansión del determinante en (4) en términos de los cofactores de la l-ésima fila

$$e_r = \sum_{j=1}^{m} \hat{A}_{lj} A_{lj} \ ,$$

notemos que si una raíz $\mu_j > 2$ entonces aparecerán las columnas $C^{(l)}(z_j; j_1, \ldots, j_k)$ con $l \in [\![0, \mu_j - 1]\!]$, entonces

$$e_r = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\eta=0}^{\mu_j - 1} \hat{A}_{lj} (r)^{(\eta)} z_j^{r-\eta} \text{ dado que } A_{lj} = (r)^{(\eta)} z_j^{r-\eta} \tag{6}$$

donde

$$(r)^{(0)} = 1, \qquad (r)^{(\eta)} = r\,(r-1)\cdots(r-\eta+1), \ 1 \leq \eta,$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} &= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} \widehat{A_{lj}}(\nu+r) z_j^{\nu+r-\eta} \right) \\
&= \sum_{\nu=-q}^{p} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} \widehat{A_{lj}} \varphi_\nu (\nu+r)^{(\eta)} z_j^{\nu+r-\eta} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} \sum_{\nu=-q}^{p} \widehat{A_{lj}} \varphi_\nu (\nu+r)^{(\eta)} z_j^{\nu+r-\eta} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} \left(\sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu (\nu+r)^{(\eta)} z_j^{\nu+r-\eta} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} z^{r-q} \left(\sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu (\nu+r)^{(\eta)} z_j^{\nu+q-\eta} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A_{lj}} z^{r-q} \left(\sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} P^{(\eta)}(z_j) \right)
\end{aligned}$$

donde $P^{(\eta)}(z)$ representa la η-ésima derivada de $P(z)$ y dado que z_j es raíz de $P(z)$, con multiplicidad μ_j, se tiene que $\sum_{\eta=0}^{\mu_j-1} P^{(\eta)}(z_j) = 0$, $\forall j \in [\![1, m]\!]$,

$$\therefore \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu e_{\nu+r} = 0 \ . \qquad \square$$

4. α y β

4.1 Lema. *a) La sucesión* $\{\alpha_r\}$ *definida por*

$$\alpha_r = \begin{cases} 0 & si\ r < 0 \\ \frac{1}{a_{-q}} \frac{D(-r,1,\ldots,k-1)}{D(0,1,\ldots,k-1)} & si\ 1-k \leq r \end{cases} \tag{7}$$

satisface

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \alpha_{j-q-\nu} = \delta_{j0}, \qquad -\infty < j < \infty \tag{8}$$

b) La secuencia $\{\beta_r\}$ *definida por*

$$\beta_r = \begin{cases} 0 & si\ r < 0 \\ \frac{1}{a_p} \frac{D(0,1,\ldots,k-2,r+k-1)}{D(0,1,\ldots,k-1)} & si\ 1-k \leq r \end{cases} \tag{9}$$

satisface

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \beta_{j-p+\nu} = \delta_{j0}, \qquad -\infty < j < \infty, \tag{10}$$

Demostración. a) Si $j < 0$, entonces (7) implica (8). Si $j = 0$, entonces (8) reduce a

$$\varphi_{-q}\alpha_0 = 1,$$

esto dado de nuevo por (7). Esto es consistente con (7) cuando $r = 0$. Si $1 \leq j$, entonces por (7) y por el lema anterior implica (8). b) Análogamente. □

Algo interesante y que cabe resaltar, es que si consideramos la matriz triangular inferior de Toeplitz

$$T_n^L(\varphi) = [\varphi_{r-s-q}]_{r,s=0}^n$$

es fácil verificar que su inversa es la matriz

$$\left(T_n^L(\varphi)\right)^{-1} = [\alpha_{r-s}]_{r,s=0}^n .$$

Ya que los elementos de $T_n^L(\varphi)\left(T_n^L(\varphi)\right)^{-1}$, se determinan por

$$\begin{aligned} \left(T_n^L(\varphi)\left(T_n^L(\varphi)\right)^{-1}\right)_{j,k} &= \sum_{r=0}^{n-1} \varphi_{j-r-q}\alpha_{r-k} \\ &= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \alpha_{(j-k)-q-\nu} \\ &= \delta_{jk} \end{aligned}$$

esto por el lema anterior y $\forall j,k \in [\![0, n-1]\!]$. A continuación el algoritmo de α_r, donde sgq es el coeficiente φ_{-q} de la matriz de Toeplitz, z el vector de las raíces del símbolo generador, m el vector de las multiplicidades y r el subíndice de α_r.

```
function a=alphar(sgq,z,m,r),
  if(r<0)
    a=0;
  else
    k=sum(m);
    J(1:k)=0:(k-1);
    j=J;
    j(1)=-r;
    a=detD(z,m,j)/(detD(z,m,J)*sgq);
  end
end
```

Algoritmo de β_r, donde sgp es el coeficiente φ_p de la matriz de Toeplitz, z el vector de las raíces del símbolo generador, m el vector de las multiplicidades y r el subíndice de β_r.

```
function b=betar(sgp,z,m,r),
  if(r<0)
    b=0;
  else
    k=sum(m);
    j(1:(k-1))=0:
    (k-2); j(k)=r+k-1;
    J(1:k)=0:(k-1);
    b=detD(z,m,j)/(detD(z,m,J){*}sgp);
end
end
```

De ahora en adelante supondremos que

$$p \geq 1 \text{ y } q \geq 1 \tag{11}$$

A continuación se muestra una definición y una proposición que se tomaron de [2].

4.2 Definición. Se dice que una ecuación de recurrencia es homogénea cuando es de la forma

$$x_{r+n} + \varphi_1 x_{r+n-1} + \ldots + \varphi_n x_r = 0 \tag{12}$$

donde φ_1, φ_2, $\ldots$, φ_n son constantes y x_r una función de r.

Note que si $x_r = z^r$ donde $z \neq 0$ entonces (12) queda de la forma

$$z^{r+n} + \varphi_1 z^{r+n-1} + \ldots + \varphi_n z^r = 0$$

o

$$z^r\left(z^n+\varphi_1 z^{n-1}+\ldots+\varphi_n\right)=0$$

Es decir si z^r es solución de (12) si,

$$z^n+\varphi_1 z^{n-1}+\ldots+\varphi_n=0. \tag{13}$$

Es decir si z es una solución de (13).

4.3 Proposición. *Si $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_m$ son distintas soluciones de (13) de multiplicidad $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_m$ respectivamente. Entonces las soluciones particulares de (12) son de la forma z_j^r en caso de que z_j sea una solución de multiplicidad uno y en caso de que la solución z_j de (13), sea de multiplicidad $1<\mu_j$, entonces*

$$(q+r)^{(0)} z_j^{q+r},\ (q+r)^{(1)} z_j^{q+r-1},\ (q+r)^{(2)} z_j^{q+r-2},\ \ldots,\ (q+r)^{\left(\mu_j-1\right)} z_j^{q+r-(\mu_j-1)}$$

son soluciones particulares de (12), donde q es una constante. Además la solución general de (12) esta dada por

$$x_r=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\mu_j-1}\varphi_{kj}\,(q+r)^{(k)} z_j^{q+r-k} \tag{14}$$

Un hecho útil y que se muestra en [1] de forma poco detallada es el siguiente.

4.4 Proposición. *Las soluciones particulares de (12) son linealmente independientes entre si.*

5. Resultados principales

5.1 Teorema. *Si (3) y (11) se cumplen, se tiene que* T_n *es invertible si y solo si*

$$D(0,1,\dots,q-1,n+q+1,\dots,n+k)\neq 0 \tag{15}$$

Demostración. Demostraremos que si T_n no es invertible, entonces $T_n^\top$ no es invertible y por lo tanto existe $X\in\mathbb{C}$, con $X\neq 0$ tal que

$$T_n^\top X = 0 \tag{16}$$

si y solo si

$$D\left(0,1,\dots,q-1,n+q+1,\dots,n+k\right)=0. \tag{17}$$

Supongamos que $T_n^\top$ no es invertible entonces existe $X\in\mathbb{C}$, con $X\neq 0$ tal que (16) se cumple, para facilitar el calculo extendemos el vector X, a el vector $X=[x_r]_{r=-q}^{n+p-1}$, donde

$$x_r = 0,\quad \text{cuando } r\in[\![-q,-1]\!]\cup[\![n,n+p-1]\!].$$

.

Entonces se tiene que (16) da lugar a la siguiente ecuación de recurrencia.

$$\sum_{\nu=-q}^{p}\varphi_\nu x_{\nu+r}=0,\ \text{con } r\in[\![0,n-1]\!] \text{ y } x_r=0,\ \text{cuando } r\in[\![-q,-1]\!]\cup[\![n,n+p-1]\!] \tag{18}$$

Pero dado la *Suposición* A, las proposiciones sobre ecuaciones de recurrencia y el hecho de que $z_j\neq 0$ para $1\leq j\leq m$ se sabe que la solución de (18) es

$$x_r=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\mu_j-1}a_{k,j}\left(q+r\right)^{(k)}z_j^{q+r-k},\ \text{para } r\in[\![-q,n+p]\!] \tag{19}$$

de donde tomamos los coeficientes $\varphi_{k,j}$ para formal el siguiente vector columna

$$A=\operatorname{col}\left[a_{0,1},\dots,a_{\mu_1-1,1},\ \dots,\ a_{0,m},\ \dots,\ a_{\mu_m-1,m}\right]$$

el cual es un vector constante y además $A\neq 0$ dado que las soluciones particulares de (18), son linealmente independientes entre si y como $X\neq 0$ entonces $A\neq 0$. Donde (19) es consistente con la condición de frontera $x_r=0$, cuando $r\in[\![-q,-1]\!]\cup[\![n,n+p-1]\!]$, si A satisface el sistema de tamaño $k\times k$

$$HA=0 \tag{20}$$

donde

$$\det H = D\,(0,\ 1,\ \ldots,\ q-1, n+q+1,\ \ldots,\ n+k) \tag{21}$$

Entonces se tiene que (20) tiene una solución no trivial y esto implica que (21) es cero.

Ahora supongamos que $D\,(0,\ 1,\ \ldots,\ q-1, n+q+1,\ \ldots,\ n+k) = 0$, entonces existe $A \neq 0$ tal que

$$HA = 0$$

donde

$$A = \text{col}\,[a_{0,1}, \ldots, a_{\mu_1-1,1},\ \ldots,\ a_{0,m},\ \ldots,\ a_{\mu_m-1,m}]$$

si tomamos estos $\varphi_{k,j}$ para formar a x_r función de r, que esta dado por,

$$x_r = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\mu_j-1} a_{k,j}\,(q+r)^{(k)}\,z_j^{q+r-k}, \text{ para } r \in [\![-q, n+p]\!]$$

que cumple además que $x_r = 0$, cuando $r \in [\![-q,-1]\!] \cup [\![n, n+p-1]\!]$, por el hecho de que $HA = 0$, esta x_r satisface la siguiente ecuación de recurrencia

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu x_{\nu+r} = 0, \text{ donde } r \in [\![0, n-1]\!]$$

que es igual a tener el sistema

$$T_n^\top X = 0$$

donde $T_n^\top$ es la traspuesta de la matriz de Toeplitz $T_n(\varphi) = \left[\varphi_{j-k}\right]_{j,k=0}^{n-1}$.

Donde $\varphi_r = 0$ si $r > p$ o $r < -q$, además note que $X \neq 0$, dado que $A \neq 0$ y los x_r son una combinacional lineal de elementos linealmente independientes, esto implica que $T_n(\varphi)$ no es invertible. $\square$

5.2 Definición. Sea

$$U_n = \{0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ n+q,\ \ldots,\ n+k-1\}$$

Si $\mu \in U_n$ y l es un entero arbitrario, definimos

$$a_n\,(\mu|l) = \frac{D\,(j_0,\ \ldots, j_{q-1},\ j_{n+q},\ \ldots,\ j_{n+k-1})}{D\,(0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ n+q,\ \ldots,\ n+k-1)}$$

$$j_r = \begin{cases} r & \text{si } r \in U_n - \{\mu\} \\ l & \text{si } r = l \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$a_n(0|l) = \frac{D(l\ ,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ n+q,\ \ldots, n+k-1)}{D(0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ n+q,\ \ldots,\ n+k-1)}$$

y

$$a_n(n+q|l) = \frac{D(0\ ,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ l,\ n+q+1,\ \ldots, n+k-1)}{D(0,\ 1,\ \ldots,\ q-1,\ n+q,\ \ldots,\ n+k-1)}$$

A continuación un algoritmo para el calculo de $a_n(\mu|l)$ el cual recibe a mu $= \mu \in U_n$, l un entero cualquiera, los vectores z y m que contiene las raíces del símbolo generador y sus multiplicidades respectivamente, a los enteros q y k definidos en (3) y el tamaño de la matriz n.

```
function a=an(mu,l,z,m,q,k,n),
  J(1:q)=0:q-1;
  J(q+1:k)=n+q:n+k-1;
  aux=length(J);
  for i=1:aux
    if(J(i)!=mu)
      j(i)=J(i);
    else
      j(i)=l;
    end
  end
  a=detD(z,m,j)/detD(z,m,J);
end
```

5.3 Lema. *Si μ es un entero fijo en U_n, entonces*

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu a_n(\mu|\nu+r) = 0, \quad -\infty < r < \infty$$

y

$$a_n(\mu|r) = \delta_{\mu r}, \quad r \in U_n$$

es decir $e_r = a_n(\mu|r)$ es la única solución de (5), la cual satisface las condiciones de frontera

$$e_r = \delta_{\mu r} \quad r \in [\![0, q-1]\!] \cup [\![n+q, n+k-1]\!].$$

5.4 Teorema. *El elemento b_{rsn} de la matriz $B_n = T_n^{-1}$ esta dado por*

$$b_{rsn} = \alpha_{r-s-q} - \sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} a_n(l|q+s), \tag{22}$$

donde $\{a_r\}$ *es como en (7).*

Demostración. Se tiene que para que $B_n T_n = I_n$ es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{rjn}\varphi_{j-s} = \delta_{rs} \quad r, s \in [\![0, n-1]\!]$$

donde si hacemos que

$$b_{rsn} = 0 \quad \text{cuando } s \in [\![-q, -1]\!] \cup [\![n, n+p-1]\!] \tag{23}$$

la suma anterior puede ser reescrita como

$$\sum_{j=-q}^{n+p-1} b_{rjn}\varphi_{j-s} = \delta_{rs}$$

ahora haciendo que $j = \nu + s$ se tiene que

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu b_{r,\nu+s,n} = \delta_{rs}. \tag{24}$$

Si consideramos a b_{rsn} como

$$b_{rsn} = \alpha_{r-s-q} + u_{rsn} \quad r \in [\![0, n-1]\!],\ s \in [\![-q, n+p-1]\!] \tag{25}$$

donde u_{rsn} esta aun por determinar. Donde si tomamos a (8) y $j = r - s$

$$\sum_{\nu=q}^{p} \varphi_\nu \alpha_{r-s-\nu-q} = \delta_{0,r-s} = \delta_{rs} \quad r,\ s \in [\![0, n-1]\!]$$

ahora si consideramos (25) en (24), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu b_{r,\nu+s,n} &= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \left(\alpha_{r-s-\nu-q} + u_{r,\nu+s,n}\right) \\
&= \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \alpha_{r-s-\nu-q} + \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu u_{r,\nu+s,n} \\
&= \delta_{rs} + \sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu u_{r,\nu+s,n} \\
&= \delta_{rs}
\end{aligned}$$

esto ultimo se tiene que cumplir las condiciones de (25) y para $0 \leq r \leq n-1$, entonces tenemos que cada elemento de $\{u_{rsn}\}_{s=-q}^{n+p-1}$ con $0 \leq r \leq n-1$ satisface la ecuación de recurrencia

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu u_{r,\nu+s,n} = 0 \quad 0 \leq s \leq n-1$$

y las condiciones de frontera establecidas por (25), es decir

$$\begin{aligned} u_{rsn} &= -\alpha_{r-s-q} = 0, \quad s \in [\![n, n+p-1]\!] \text{ recuerde (7)} \\ u_{rsn} &= -\alpha_{r-s-q} \quad s \in [\![-q, -1]\!] \end{aligned}$$

todo esto junto con el lema anterior tenemos que

$$u_{rsn} = -\sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} a_n(l|q+s)$$

y entonces tenemos que b_{rsn} es como en (22) □

A continuación el algoritmo, para b_{rsn} mediante α_r, donde r, s, q, k y n son como las definidas en el texto, $sgq = \varphi_{-q}$, z es el vector de las raices del símbolo generador y m sus respectivas multiplicidades

```
function b=brsna(r,s,q,sgq,z,m,k,n),
  aux=0;
  for l=0:q-1
        aux=alphar(sgq,z,m,r-l)*an(l,q+s,z,m,q,k,n)+aux;
  end
  b=alphar(sgq,z,m,r-s-q)-aux;
end
```

5.5 Teorema. *El elemento* b_{rsn} *de* $B_n = T_n^{-1}$ *esta dado por*

$$b_{rsn} = \beta_{s-r-p} - \sum_{l=0}^{p-1} \beta_{s-p+l+1} a_n (n+q+l|n+q-r-1), \tag{26}$$

donde $\{\beta_r\}$ *es como en 9.*

Demostración. Tenemos que $T_n B_n = I_n$ es equivalente a

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{r-j} b_{jsn} = \delta_{rs} \quad r,\ s \in [\![0, n-1]\!],$$

donde si definimos que

$$b_{rsn} = 0 \quad \text{cuando } r \in [\![-p, -1]\!] \cup [\![n, n+q-1]\!] \tag{27}$$

la ultima suma puede ser reescrita como

$$\sum_{j=-p}^{n+q-1} \varphi_{r-j} b_{jsn} = \delta_{rs} \quad r,\ s \in [\![0, n-1]\!] \tag{28}$$

cambiando el índice de la suma (28) tenemos que

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu b_{r-\nu,sn} = \delta_{rs} \quad r\ , s \in [\![0, n-1]\!] \tag{29}$$

ahora supongamos que b_{rsn} es de la forma

$$b_{rsn} = \beta_{s-r-p} + \upsilon_{rsn}, \tag{30}$$

donde υ_{rsn} esta por determinar. Reescribamos a (10) con $j = s - r$

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \beta_{s-r-p+\nu} = \delta_{rs} \quad r\ , s \in [\![0, n-1]\!]$$

además si reemplazamos (30) , en (29) y recordando la condición de que (27) tenemos que para cada s en $\{0,\ \dots,\ n-1\}$ cada elemento de $\{\upsilon_{rsn}\}_{r=-p}^{n+q}$ tiene que satisfacer la ecuación

$$\sum_{\nu=-q}^{p} \varphi_\nu \upsilon_{r-\nu,sn} = 0, \quad r \in [\![0, n-1]\!],$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \upsilon_{rsn} &= -\beta_{s-r-p} = 0, \quad r \in [\![n, n+p-1]\!] \\ \upsilon_{rsn} &= -\beta_{s-r-p,} \quad r \in [\![-p, -1]\!]. \end{aligned}$$

esto junto con el lema anterior se obtiene que

$$\upsilon_{rsn} = -\sum_{l=0}^{p-1} \beta_{s-p-l+1} a_n \left(n+q+l+1 | n+q-r-1\right)$$

reemplazarlo en (30) se obtiene a (26) □

A continuación el algoritmo, para b_{rsn} mediante β_r, donde r, s, q, k y n son como las definidas en el texto, $sgp = \varphi_{-p}$, z es el vector de las raices del símbolo generador y m sus respectivas multiplicidades

```
function b=brsnb(r,s,sgp,z,m,p,q,n),
  aux=0;
  k=p+q;
  for l=0:p-1
        aux=betar(sgp,z,m,s-p+l+1)*an(n+q+l,n+q-r-1,z,m,q,k,n)+
           aux;
  end
  b=betar(sgp,z,m,s-r-p)-aux;
end
```

El siguiente teorema provee formulas explicitas para la resolución de $T_nX = Y$ cuando $T_n$es invertible. De donde

$$X = \mathrm{col}[x_0\,,\ldots\,,x_{n-1}] \quad \text{y} \quad Y = \mathrm{col}[y_0\,,\ldots\,,y_{n-1}]$$

y adoptaremos la siguiente convención

$$\sum_{\mu}^{\nu} = 0 \quad \text{si } \nu < \mu$$

5.6 Teorema. *Si T_n es invertible, entonces la soluciona de $T_nX = Y$ esta dada por*

$$x_r = \sum_{s=0}^{r-q} \alpha_{r-s-q} y_s - \sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} \sum_{s=0}^{n-1} y_s a_n\left(l|q+s\right), \quad 0 \le r \le n-1,$$

y por

$$x_r = \sum_{s=r+p}^{n-1} \beta_{s-r-p} y_s - \sum_{l=0}^{p-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \beta_{s-p+l+1} y_s \right) a_n\left(n+q+l|n+q-r-1\right), \quad 0 \le r \le n-1.$$

Demostración. Si T_n es invertible, entonces $T_nX = Y$ es equivalente a $X = T_n^{-1}Y$, donde cada x_r esta definido por

$$x_r = \sum_{s=0}^{n-1} b_{rsn} y_s \quad 0 \le r \le n-1$$

donde si b_{rsn} esta definido como en (22), tenemos que

$$\begin{aligned} x_r &= \sum_{s=0}^{n-1} b_{rsn} y_s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{r-s-q} y_s - \sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} y_s a_n(l|q+s) \right) \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{r-s-q} y_s - \sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} \sum_{s=0}^{n-1} y_s a_n(l|q+s) \end{aligned}$$

pero recordemos de (7) que $\alpha_r = 0$ con $r = 0$ entonces tenemos que

$$x_r = \sum_{s=0}^{r-q} \alpha_{r-s-q} y_s - \sum_{l=0}^{q-1} \alpha_{r-l} \sum_{s=0}^{n-1} y_s a_n\,(l|q+s) \quad 0 \le r \le n-1.$$

Análogamente supongamos que b_{rsn} esta definido como en (26)

$$\begin{aligned} x_r &= \sum_{s=0}^{n-1} b_{rsn} y_s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \left(\beta_{s-r-p} y_s - \sum_{l=0}^{p-1} \beta_{s-p+l+1} y_s a_n\,(n+q+l|n+q+-r-1) \right) \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \beta_{s-r-p} y_s - \sum_{s=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \beta_{s-p+l+1} y_s \right) a_n\,(n+q+l|n+q+-r-1) \end{aligned}$$

pero recordemos de (9) que $\beta_r = 0$ con $r = 0$, entonces tenemos que

$$x_r = \sum_{s=r+p}^{n-1} \beta_{s-r-p} y_s - \sum_{l=0}^{p-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \beta_{s-p+l+1} y_s \right) a_n\,(n+q+l|n+q-r-1)\,, \quad 0 \le r \le n-1.$$

$\square$

Referencias

[1] Miller, K. S. *An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations*. Dover Publications, 1960, ch. 4, pp. 152–158.

[2] Richardson, C. H. *An introduction to the calculus of finite differences.* D. Van Nostrand Company, Inc., 1954, ch. 6, pp. 106–111.

[3] Roger A. Horn, C. R. J. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, 1994, ch. 6, p. 400.

[4] Trench, W. F. Explicit inversion formulas for toeplitz band matrices. *Society for Industrial and Applied Mathematics* (1985).