INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Servicio Social

Apuntes de los temas:

Operadores de Toeplitz con símbolo continuo en el disco unitario cerrado en el espacio de Bergman sobre el disco unitario

Miguel Ángel Rodríguez Rodríguez

Proyecto de investigación: IPN-SIP 20170660

Director del proyecto de investigación:
Egor Maximenko

Ciudad de México
Agosto de 2017

Índice

1. Reporte global de servicio social

Justificación

El presente trabajo es en apoyo al proyecto IPN-SIP 20170660 (Determinantes, menores y vectores propios de matrices de Toeplitz de banda) dirigido por el Dr. Egor Maximenko.

El estudio de operadores de Toeplitz es un tema actual en matemáticas con aplicaciones en otras ciencias como la mecánica cuántica. Aunque la definción de estos operadores es simple, para su comprensión se precisa de conocimientos en varias ramas de las matemáticas. Tan solo en el caso de operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman sobre el disco unitario es necesario tener conocimientos de análisis funcional, análisis real y análisis complejo, entre otros.

En la licenciatura se estudian algunos tópicos fundamentales para abordar los operadores de Toeplitz, pero a veces no son suficientes y la gran cantidad de teoría existente en cada una de las ramas de las matemáticas necesarias hace difícil conocer qué temas son necesarios y cuáles no.

Es por esto que como servicio social se escribieron apuntes donde se desarrolla la teoría necesaria para el estudio de operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman, resolviendo un problema ya conocido: caracterizar el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo continuo en el espacio de Bergman sobre el disco.

Objetivo

Realizar apuntes con ejemplos y ejercicios propuestos sobre álgebras C^*, teoría de operadores, el espacio de Bergman sobre el disco unitario y operadores de Toeplitz con símbolo continuo definidos sobre este espacio.

Describir el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz con símbolo continuo que actúan em el espacio de Bergman sobre el disco unitario.

Marco teórico

El espacio de Bergman

Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo y $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ el disco unitario en $\mathbb{C}$. Sea $dA(z)$ la medida de área en $\mathbb{D}$ normalizada tal que el área de $\mathbb{D}$ sea 1. Esto es, en coordenadas rectangulares y polares,

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta.$$

El espacio de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ será denotado por $H(\mathbb{D})$.

1.1 Definición. El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es el conjunto de todas las funciones analíticas f en $\mathbb{D}$ tales que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

Este espacio puede considerarse como subespacio del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{D}, dA)$, de donde hereda un producto interno y una norma inducida por este, que están dados por

$$\langle f, g \rangle = \left(\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA(z) \right) \quad \text{y} \quad \|f\| = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) \right),$$

para cada $f, g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

El espacio de Bergman resulta ser también un espacio de Hilbert. Más aún, es un *espacio de Hilbert con núcleo reproductor*, es decir, existe una función K en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ tal que $h_z(w) = \overline{K(z, w)}$ define una función en $L^2(\mathbb{D}, dA)$ y se cumple la propiedad de reproducción:

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z, w)dA(w)$$

para cada función f en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y para toda $z \in \mathbb{D}$.

Un resultado conocido asegura que

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2}.$$

Ya que el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es cerrado, existe la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, denotada por P. Esta función es llamada la *proyección de Bergman.*

La siguiente proposición indica que la proyección de Bergman P es un operador integral.

Proposición. *Suponga que $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$. Entonces*

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z, w)f(w)dA(w),$$

para toda $z \in \mathbb{D}$.

Operadores de Toeplitz

Definición. Dada una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, se define el operador T_φ en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ por la relación

$$T_\varphi f = P(\varphi f), \quad f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

T_φ es llamado el *operador de Toeplitz* en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ con símbolo φ.

Usando la representación integral de la proyección de Bergman, podemos escribir T_φ como un operador integral como sigue:

$$\begin{aligned} T_\varphi f(z) &= \int_{\mathbb{D}} K(z,w)\varphi(w)f(w)dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w). \end{aligned}$$

Desarrollo

Álgebras C^*

Definición. Un *álgebra C^** es un álgebra de Banach A con un mapeo $x \mapsto x^*$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $(x^*)^* = x, \quad$ para toda $x \in A$.
2. $(ax+by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*, \quad$ para toda $x, y \in A$ y $a, b \in \mathbb{C}$.
3. $(xy)^* = y^*x^*, \quad$ para toda $x, y \in A$.
4. $\|x^*x\| = \|x\|^2, \quad$ para toda $x \in A$.

Un mapeo $x \mapsto x^*$ que cumpla (a), (b) y (c) es llamado una *involución en el álgebra*. El elemento x^* es usualmente llamado el adjunto de x.

Si A tiene una identidad multiplicativa, entonces en automático se tiene $\|1\| = 1$.

Definición. Sean A y B álgebras C^*. Una función $\Phi\colon A \to B$ se dice un $*$-homomorfismo si

1. $\Phi(ax+by) = a\Phi(x) + b\Phi(y), \quad$ para toda $a, b \in \mathbb{C}$ y $x, y \in A$.
2. $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y), \quad$ para toda $x, y \in A$.
3. $\Phi(x^*) = \Phi(x)^*, \quad$ para toda $x \in A$.

Las álgebras C^* son un tipo de álgebras de Banach que están íntimamente relacionadas con la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Puede verse que el conjunto de operadores lineales acotados de H es un álgebra C^*.

Operadores en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y B_1 la bola unitaria cerrada de H. Se denotará por $\mathcal{B}(H)$ al álgebra de operadores acotados que actúan sobre H.

Definición. Un operador $T\colon H \to H$ se dice *compacto* si $T(B_1)$ es relativamente compacto en H. Denotaremos por $\mathcal{K}(H)$ al conjunto de todos los operadores compactos de H.

Los operadores compactos forman un subespacio de $\mathcal{B}(H)$. Más aún, $\mathcal{K}$ resulta ser un *ideal*, es decir,

$$TK \in \mathcal{K}(H) \text{ y } KT \in \mathcal{K}(H) \quad \text{para todo } T \in \mathcal{B}(H).$$

Definición.

1. Un subespacio cerrado M de H se dice *invariante* para un subconjunto A de $\mathcal{B}(H)$.
2. Una subálgebra C^* A de $\mathcal{B}(H)$ se dice *irreducible* en H, o que actúa irreduciblemente en H, si los únicos subespacios de H que son invariantes para A son $\{0\}$ y H.

Proposición. *Sea A un álgebra C^* actuando irreduciblemente sobre H y con intersección no cero con $\mathcal{K}(H)$. Entonces $\mathcal{K}(H) \subset A$.*

El álgebra de operadores de Toeplitz

Dado un subconjunto S de un espacio de Hilbert H, existe un álgebra C^* mínima (respecto a la contención) que contiene a S. Esta es llamada el *álgebgra C^* generada por S.*

El objetivo principal es encontrar el álgebra C^* generada por lo operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ cuyo símbolo es continuo. Se denotará esta álgebra C^* como $\mathcal{T}$.

La caracterización de esta álgebra se logra entonces con ayuda de las siguientes proposiciones:

Proposición. *Sea T_a un operador de Toeplitz con símbolo $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Entonces T_a es compacto si y solo si $a(z) = 0$, para toda $z \in \partial\mathbb{D}$.*

Corolario. *Si $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $b \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, entonces*

1. *El operador $T_{ab} - T_aT_b$ es compacto.*
2. *El operador $T_aT_b - T_bT_a$ es compato.*

Proposición. *$\mathcal{T}$ es un álgebra C^* irreducible.*

Corolario. *El ideal $\mathcal{K}$ está contenido en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ es un álgebra C^* conmutativa.*

Estos resultados permiten describir el álgebra $\mathcal{T}$ como el conjunto de operadores de la forma $T_a + K$, donde a es una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y K es un operador compacto.

El resultado principal es el siguiente:

Teorema. *$\mathcal{T}/\mathcal{K}$ es un álgebra C^* isomorfa e isométrica a $C(\mathbb{T})$.*

Conclusiones

Referidas al programa

Experiencia

Fue una grata experiencia estudiar estos temas que serán de gran utilidad en un posible futuro dedicado a la investigación.

Nuevos conocimientos

Entre los conocimientos adquiridos destacan el análisis funcional, las álgebras C^* y la teoría de operadores.

Referidas a la currícula académica

Conocimientos aplicados

Los cursos de Análisis Matemático I, II y III, los primeros dos cursos de Funciones de Variable Compleja y el curso de Topología I fueron indispensables para el entendimiento de estos temas.

2. Definiciones y resultados preliminares

A continuación se enuncian sin demostración algunas definciones y resultados necesarios para las secciones postetiores.

2.1 Proposición. *Sean A un subconjunto denso de un espacio métrico E y f una función uniformemente continua de A en un espacio métrico completo E'. Entonces existe una función continua $\bar{f}$ de E en E' que conicide con f en todo punto de A; más aún, $\bar{f}$ es uniformemente continua.*

La demostración de la Proposición 2.1 y un estudio más profundo al respecto se pueden encontrar en [2].

2.2 Proposición (Lema de Riesz)**.** *Si Y es un subespacio cerrado y propio de un espacio normado X y $\varepsilon > 0$, entonces existe un elemento vector $x \in X$ tal que $\|x + Y\| > 1 - \varepsilon$.*

Para una demostración puede consultarse [8], donde se da una ligera reformulación de lo escrito arriba.

2.3 Definición. Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. Un operador lineal $T\colon X \to Y$ se dice acotado si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1.$$

Se denotará por $\mathcal{B}(X, Y)$ al conjunto de operadores lineales acotados. Si $X = Y$, se ecribirá simplemente $\mathcal{B}(X)$.

El siguiente resultado es bastante conocido:

2.4 Proposición. *Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ espacios normados y $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *T es un operador acotado.*
2. *T es continuo.*
3. *T es continuo en 0.*

2.5 Proposición. *$\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma dada por*

$$\|T\| = \text{ínf}\{C > 0\colon \|Tx\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X\}, \quad \textit{para toda } T \in \mathcal{B}(X, Y).$$

Más aún, si Y es completo, también lo es $\mathcal{B}(X, Y)$.

2.6 Proposición. *Con las notaciones anteriores, se tienen las siguientes igualdades:*

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} : x \in X, x \neq 0\right\} = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in X, \|x\|_1 = 1\} = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in X, \|x\|_1 \leq 1\}.$$

2.7 Definición. Si $f\colon X \to Y$, se define su *gráfica* como el conjunto

$$\operatorname{Graf} f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

2.8 Proposición (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean* $(X, \|\cdot\|_1)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_2)$ *espacios de Banach y* $T\colon X \to Y$ *una transformación lineal tal que* $\operatorname{Graf} T$ *es cerrado en* $X \times Y$*. Entonces* T *es continua.*

Espacios de Hilbert

2.9 Notación. $\mathbb{F}$ denotará cualquiera de los campos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ y un conjunto $A \subset X$, se denotará por $\mathscr{L}(A)$ al subespacio vectorial de todas las combinaciones lineales de elementos de A. Si A es finito, digamos $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, se escribirá simplemente $\mathscr{L}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

2.10 Definición. Un espacio vectorial H con producto interno es un *espacio de Hilbert* si es un espacio métrico completo respecto a la métrica inducida por su producto interno.

En lo sucesivo H, H_1, H_2, etc. denotarán espacios de Hilbert.

2.11 Ejemplo. Sea (X, μ) un espacio de medida. Dos funciones se identificarán si y solo si coinciden en un conjunto de medida cero y se confundirá a voluntad una función con la clase de equivalencia que represente. Un tratamiento más completo de esto puede encontrarse en [4].

Tomando esto en consideración, se define el espacio $L^p(X, d\mu)$ como el espacio de funciones medibles $f\colon X \to \mathbb{C}$ tales que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.

Es bien sabido que estos espacios son espacios de Banach con la norma

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

En el caso $p = 2$, $L^2(X, d\mu)$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno está dado por

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu.$$

Claramente la norma $\|\cdot\|_2$ es inducida por este producto interno.

2.12 Proposición (Teorema de Schur)**.** *Sea* (X, μ) *un espacio de medida,* K *una función medible en* $X \times X$*,* T *el operador integral inducido por* K *y* $1 < p < +\infty$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Si existe una constante* $C > 0$ *y una función medible positiva* h *en* X *tal que*

$$\int_X |K(x,y)|h(y)^q d\mu(y) \leq \alpha h(x)^q, \quad \textit{para casi toda } x \in X$$

y

$$\int_X |K(x,y)|h(x)^p d\mu(x) \leq \beta h(y)^p, \quad \textit{para casi toda } y \in X.$$

Entonces T *es acotado en* $L^p(X, \mu)$ *con norma menor o igual a* $\alpha\beta$*.*

2.13 Definición. Dos elementos $f, g \in H$, se dice que son *ortogonales*, y se escribe $f \perp g$, si $\langle f, g \rangle = 0$.

Se define también

$$A^\perp = \{f \in H \colon \langle f, g \rangle = 0, \text{ para toda } g \in A\}.$$

2.14 Ejercicio. Demuestre que $A^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.

2.15 Proposición. *Si* M *es un subespacio vectorial cerrado de* H *y* $h \in H$*, entonces existe un único elemento* $f_0 \in M$ *tal que* $h - f_0 \in M^\perp$*.*

En virtud de la Proposición 2.15, y con la notación introducida ahí, puede definirse una función $P \colon H \to M$ tal que $Ph = f_0$.

2.16 Proposición. *La función* P *satisface las siguientes propiedades:*

1. P *es un operador lineal en* H*.*
2. $\|Ph\| \leq \|h\|$ *para cada* $h \in H$*.*
3. $P^2 = P$*.*
4. $\ker P = M^\perp$ *y* $ranP = M$*.*

P *es llamada la* proyección ortogonal *de* H *sobre* M*.*

2.17 Definición. Una aplicación lineal $f \colon H \to \mathbb{F}$ se dice un *funcional lineal.*

Si además existe una constante C tal que

$$|f(h)| \leq C\|h\|, \quad \text{para toda } h \in H,$$

entonces se dice que f es un *funcional lineal acotado.*

El conjunto de funcionales lineales acotados de H se llama el *espacio dual de* H y se denota por H^*.

2.18 Proposición. *Sea $f\colon H \to \mathbb{F}$ un funcional lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es acotado.*
2. *f es continuo en 0.*
3. *f es continuo en cualquier punto.*

2.19 Proposición. *H^* es un espacio de Banach con la norma dada por*

$$\|f\| = \text{ínf}\{C > 0 : |f(h)| \leq C\|h\|, \quad \forall h \in H\}, \quad \textit{para toda } f \in H^*.$$

Además, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\sup\left\{\frac{|f(h)|}{\|h\|} : h \in H, h \neq 0\right\} = \sup\{|f(h)| : h \in H, \|h\| = 1\} = \sup\{|f(h)| : h \in H, \|h\| \leq 1\}.$$

La siguigente proposición es uno de los resultados más importantes de la teoría de espacios de Hilbert:

2.20 Teorema (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Si $f\colon H \to \mathbb{F}$ es un funcional lineal acotado, entonces existe un único vector $h_0 \in H$ tal que $f(h) = \langle h, h_0\rangle$ para cada $h \in H$. Más aún, $\|f\| = \|h_0\|$.*

Bases ortonormales

2.21 Definición. Una familia $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ en H se dice *ortonormal* si $\|e_\alpha\| = 1$ para toda $\alpha \in \Omega$ y $e_\alpha \perp e_\beta$, para $\alpha, \beta \in \Omega$ con $\alpha \neq \beta$.

2.22 Proposición (Desigualdad de Bessel)**.** *Si $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una familia ortonormal en H, entonces para toda $h \in H$.*

$$\sum_{\alpha\in\Omega} |\langle h, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|h\|^2.$$

2.23 Definición. Una *base* para H es un familia ortonormal maximal.

2.24 Proposición. *Si E es una familia ortonormal en H, entonces existe una base para H que contiene a E.*

2.25 Proposición. *Si $E = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ es una familia ortonormal en H, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *E es una base para H.*
2. *Si $h \in H$ y $h \perp e_\alpha$ para toda $\alpha \in \Omega$, entonces $h = 0$.*
3. *$\overline{\mathscr{L}(E)} = H$.*
4. *Si $h \in H$, entonces $h = \sum_{\alpha\in\Omega} \langle h, e_\alpha\rangle$.*
5. *Si $g, h \in H$, entonces $\langle g, h\rangle = \sum_{\alpha\in\Omega} \langle g, e_\alpha\rangle\langle h, e_\alpha\rangle$.*
6. *Si $h \in H$, entonces $\|h\|^2 = \sum_{\alpha\in\Omega} |\langle h, e_\alpha\rangle|^2$. (Identidad de Parseval).*

El operador adjunto

2.26 Definición. Dados H_1 y H_2 espacios de Hilbert, una función $u\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{F}$ se dice una *forma sesquilineal* si para h, g en H_1, k, f en H_2 y α, β en $\mathbb{F}$ se cumple

1. $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$.
2. $u(h, \alpha k + \beta f) = \overline{\alpha} u(h, k) + \overline{\beta} u(g, k)$.

Más aún, se dirá que la forma sesquilineal es *acotada* si existe una constante M tal que

$$|u(h, k)| \leq M\|h\|_1\|k\|_2, \text{ para toda } h \text{ en } H_1 \text{ y } k \text{ en } H_2.$$

2.27 Ejercicio. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Si $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, demuestre que las fuciones u y v definidas como $u(h, k) = \langle Th, k\rangle$ y $u(h, k) = \langle h, Sk\rangle$, para toda $h \in H_1$ y $k \in H_2$, son formas sesquilineales acotadas.

El siguiente resultado nos dice que estas son las únicas formas sesquilineales que existen:

2.28 Proposición. *Si $u\colon H_1 \times H_2 \to \mathbb{F}$ es una forma sesquilineal acotada con cota M, entonces existen únicos operadores $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tales que*

$$u(h, k) = \langle Th, k\rangle = \langle h, Sk\rangle,$$

para toda h en H_1 y k en H_2. Además, $\|T\|, \|S\| \leq M$.

De esto se puede concluir lo siguiente:

2.29 Teorema y definición. *Dado $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, existe un único operador $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ tal que*

$$\langle Th, k\rangle = \langle h, T^*k\rangle,$$

para toda h en H_1 y k en H_2. Este operador se conoce como el operador adjunto *de T.*

2.30 Ejercicio. Demuestre que $\|T\| = \|T^*\|$.

2.31 Definición. Dado un subespacio M de H y $T \in \mathcal{B}(H)$, se dice que M es un *subespacio invariante* para T si $Th \in M$ para toda $h \in M$. Si M es invariante para cada operador de un subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(H)$, entonces se dice que M es invariante para $\mathcal{A}$.

2.32 Proposición. *Sean $T \in \mathcal{B}(H)$, M un subespacio de H y $P = P_M$ la proyección ortogonal de H sobre M. Entonces*

1. *M es invariante para T si y solo si $PAP = AP$.*
2. *Son equivalentes las siguientes condiciones:*
   a) *M y $M^\perp$ son invariantes para T.*
   b) *$PA = AP$.*
   c) *M es invariante para T y T^*.*

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

2.33 Definición. Sea H un espacio de Hilbert de funciones de un conjunto X a $\mathbb{C}$. Un *núcleo reproductor* es una familia $\{K_x\}_{x\in X}$ de funciones en H tales que para cada $x \in X$,

$$f(x) = \langle f, K_x\rangle, \quad \forall f \in H.$$

Esta propiedad es llamada la *propiedad reproductiva.*

2.34 Proposición. *Si un espacio de Hilbert tiene núcleo reproductor, entonces este es único.*

2.35 Ejemplo. Considere $H = \mathbb{C}^n$ como un espacio de funciones $x\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$ cuyo producto interno está dado por $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x(j)\overline{y(j)}$.

Entonces la familia $(\delta_i)_{i=1}^n$, donde $\delta_i(j) = \delta_{ij}$, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es un núcleo reproductor para H. En efecto, dado $i \in I_n$ se cumple

$$\langle x, \delta_i\rangle = \sum_{j=1}^n x(j)\overline{\delta_i(j)} = x(i).$$

2.36 Definición. Sea H un espacio de Hilbert de funciones de un conjunto X en $\mathbb{C}$. Para cada $x \in X$ se define el *funcional de evaluación* como la función $\mathrm{eval}_x \colon H \to \mathbb{C}$ dada por $\mathrm{eval}_x(f) = f(x)$.

Claramente estos son funcionales lineales. El siguiente resultado relaciona estas funciones con la existencia del núcleo reproductor para un espacio de Hilbert; esta es una consecuencia del Teorema de Representación de Riesz (Teorema 2.20).

2.37 Proposición. *Un espacio de Hilbert de funciones H tiene núcleo reproductor si y solo si los funcionales de evaluación son acotados.*

Las siguientes propiedades del núcleo reproductor son importantes y fáciles de probar:

2.38 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $\{K_x\}_{x\in X}$. Entonces*

1. $K_x(y) = \overline{K_y(x)}$, *para cada* $x, y \in X$.
2. $\|K_x\| = \sqrt{K_x(x)}$, *para toda* $x \in X$.

Si se conoce una base ortonormal para un espacio de Hilbert H con núcleo reproductor, entonces es posible calcularlo explícitamente:

2.39 Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert con núcleo reproductor $\{K_x\}_{x\in X}$ y $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ una base ortonormal para H. Entonces se tiene*

$$K_x(y) = \sum_{\alpha\in\Omega} \overline{e_\alpha(x)} e_\alpha(y)$$

Operadores compactos en espacios de Hilbert

Se denotará por B_1 la bola unitaria del espacio de Hilbert H_1, es decir,

$$B_1 = \{x \in H : \|x\| < 1\}.$$

2.40 Definición. Un operador lineal $T \colon H_1 \to H_2$ se dice *compacto* si $T(B_1)$ tiene cerradura compacta. El conjunto de estos operadores se denotará por $\mathcal{K}(H_1, H_2)$, o bien, $\mathcal{K}(H_1)$ si $H_1 = H_2$.

2.41 Proposición. *Se cumplen las siguientes propiedades*

(a) $\mathcal{K}(H_1, H_2) \subset \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

(b) $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ *es un espacio vectorial.*

(c) Si $\{T_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ tal que para algún $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ se tiene $\|T_n - T\| \to 0$, entonces $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$.

(d) Si $T \in \mathcal{K}(H_1)$ y $S \in \mathcal{B}(H_1)$, entonces $TS, ST \in \mathcal{K}(H_1)$.

Una caracterización importante de los operadores compactos es la siguiente:

2.42 Proposición. *Si $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, los siguientes encunciados son equivalentes.*

1. *T es compacto.*
2. *T^* es compacto.*
3. *Existe una sucesión $\{T_n\}$ de operadores acotados de rango finito tales que $\|T - T_n\| \to 0$.*

2.43 Definición. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert H se dice que *converge débilmente o de manera débil* a un elemento x_0 si para toda $h \in H$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, h\rangle = \langle x_0, h\rangle.$$

2.44 Proposición. *Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en H y $x_0 \in H$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x_0.*
2. *La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada y existe un conjunto A denso en H tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = \langle x_0, a\rangle,$$

para toda $a \in A$.

2.45 Proposición. *Un operador lineal T en H es compacto si y solo si $\|Tx_n\| \to 0$ cuando una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 débilmente.*

2.46 Definición. Sea H un espacio de Hilbert con base ortonormal $E = (e_n)_{n=1}^{\infty}$. Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se dice *diagonal (con respecto a la base E)* si existe una sucesión de escalares $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$T(e_n) = \lambda_n e_n, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

2.47 Proposición. *Sea T es un operador diagonal en H con sucesión de escalares $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces T es compacto si y solo si $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.*

3. Operadores de Hilbert-Schmidt

Sean X y Y espacios de medida con respectivas medidas μ y ν.

3.1 Definición. Un *núcleo* es una función medible $K\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

3.2 Ejemplo. El conjunto de enteros positivos $\{1, \ldots, n\}$ es un espacio de medida con la medida de conteo. Por otro lado, una matriz con entradas complejas es una función del producto cartesiano $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, una matriz con entradas complejas es un núcleo.

De hecho, los núcleos pueden entenderse como una generalización natural de las matrices con la cual las sumas que aparecen en la teoría de matrices pueden ser reemplazadas por integrales.

En efecto, sean A una matriz de orden $n \times m$ y $g \in \mathbb{R}^n$. Denote por conveniencia las entradas de la matriz como $A(i, j)$ y las del vector g como $g(j)$. Se sabe que A define un operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $g \mapsto f$, dado por

$$f(i) = \sum_{j=1}^{m} A(i, j)g(j).$$

De la misma forma, dado un núcleo K, se puede definir un operador lineal entre dos espacios de funciones -que se especificarán enseguida- dado por

$$f(x) = \int K(x, y)g(y)d\nu(y).$$

Respecto al dominio de este operador, se pedirá el conjunto más grande de $L^2(Y, d\nu)$ tal que la imagen del operador esté contenida de nuevo en este espacio. Es decir, el conjunto de todas las funciones $g \in L^2(Y, d\nu)$ que satisfagan las siguientes dos condiciones:

1. $K(x, \cdot)g \in L^1(Y, d\nu)$.
2. Si $f(x) = \displaystyle\int K(x, y)g(y)d\nu(y)$, entonces $f \in L^2(X, d\mu)$.

Bajo estas condiciones, se puede comprobar que el dominio del operador es un espacio vectorial. El operador integral inducido por el núcleo K será denotado por T_K.

3.3 Definición. Se dice que un núcleo K es acotado si el operador inducido T_K es un operador acotado.

3.4 Lema. *Si $K \in L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$, entonces K es un núcleo acotado y*

$$\|T_K\| \leq \|K\|_2,$$

donde $\|K\|_2$ es la norma de K en $L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$.

Demostración. El resultado se obtiene directamente de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|T_K(g)\|^2 &= \int \left| \int K(x,y)g(y)d\nu(y) \right|^2 d\mu(x) \\
&\leq \int \left(\int |K(x,y)|^2 d\nu(y) \right) \left(\int |g(y)|^2 d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \|K\|_2^2 \|g\|^2
\end{aligned}$$

□

Se introduce el tipo de operadores que interesarán en adelante:

3.5 Definición. Un *operador de Hilbert-Schmidt* es un operador T_K inducido por un núcleo $K \in L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$.

A continuación, se demostrará que este operador es compacto.

3.6 Lema. *Si u y u son elementos distintos de cero de $L^2(X, d\mu)$ y $L^2(Y, d\nu)$, respectivamente, y $K = u \otimes v$ (es decir, $K = u(x)\overline{v(y)}$), entonces el operador de Hilbert-Schmidt T_K tiene rango 1.*

Demostración. Por definición se tiene

$$T_k(g)(x) = \int u(x)\overline{v(y)}g(y)d\nu(y) = \langle g, v \rangle u(x).$$

Luego, todo vector en el rango de T_K es un múltiplo escalar de u. Por lo tanto, T_K es de rango 1.

□

Usando un argumento de linealidad se obtiene rápidamente el siguiente resultado:

3.7 Corolario. *Si $u_1, u_2, \ldots, u_n \in L^2(X, d\mu), v_1, v_2, \ldots, v_n \in L^2(Y, d\nu)$, y $K = \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v_j$, entonces el rango de T_K es a lo más n.*

La siguiente proposición es esencial para nuestros propósitos.

3.8 Proposición. *Si $\{e_i : i \in I\}$ es una base ortonormal para $L^2(X, d\mu)$ y $\{f_j : j \in J\}$ es una base ortonormal para $L^2(Y, d\nu)$, entonces $\{\phi_{ij} : i \in I, j \in J\}$ es una base ortonormal para el espacio $L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$, donde $\phi_{ij}(x,y) = e_i(x)\overline{f_j(y)}$, para $i \in I$, $j \in J$.*

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}\int\int |\phi_{ij}(x,y)|^2 d\mu(x)d\nu(y) &= \int\int |e_i(x)|^2|f_j(y)|^2 d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int |e_i(x)|^2 d\mu(x)\int |f_j(y)|^2 d\nu(y)\\ &= \|e_i\|_X\|f_j\|_Y = 1,\end{aligned}$$

para cada $i \in I$, $j \in J$, donde $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ denotan las norma de L^2 en X y Y, respectivamente. Así, $\phi_{ij} \in L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$ y tiene norma 1, para cada $i \in I$, $j \in J$.

Por otro lado, si $(i,j) \neq (\alpha,\beta)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \phi_{\alpha\beta}, \phi_{ij}\rangle &= \int\int e_\alpha(x)\overline{f_\beta(y)} \cdot \overline{e_i(x)} f_j(y) d\mu(x)d\nu(y)\\ &= \int e_\alpha(x)\overline{e_i(x)} d\mu(x)\int f_j(y)\overline{f_\beta(y)} d\nu(y)\\ &= \langle e_\alpha, e_i\rangle\langle f_j, f_\beta\rangle = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\phi_{ij}\}$ es una familia ortonormal de funciones en $L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$

Sea ahora $\phi \in L^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$. Suponga que $\phi \perp \phi_{ij}$, para toda $i \in I$, $j \in J$. Por definición se tiene $\displaystyle\int\int |\phi(x,y)|^2 d\mu(x)d\nu(y) < \infty$.

Además, por el Teorema de Fubini, $\displaystyle\int |\phi(x.y)|^2 d\mu(x) < \infty$ para casi toda $y \in Y$. Definiendo $\phi_y(x) := \phi(x,y)$, se cumple entonces $\phi_y \in L^2(X, d\mu)$.

Por tanto, la función $h_i(y) = \langle e_i, \phi_y\rangle = \displaystyle\int \overline{\phi(x,y)} e_i(x) d\mu(x)$ está bien definida. Más aún, $h_i \in L^2(Y, d\nu)$.

Pero

$$
\begin{aligned}
\|h_i\|^2 &= \sum_{j\in J} |\langle f_j, h_i\rangle|^2 \\
&= \sum_{j\in J} \left| \int \overline{h_i(y)} f_j(y) d\nu(y) \right|^2 \\
&= \sum_{j\in J} \left| \int \overline{\left(\int \overline{\phi(x,y)} e_i(x) d\mu(x) \right)} f_j(y) d\nu(y) \right|^2 \\
&= \sum_{j\in J} \left| \int \left(\int \phi(x,y) \overline{e_i(x)} d\mu(x) \right) f_j(y) d\nu(y) \right|^2 \\
&= \sum_{j\in J} \left| \int \int \overline{\phi(x,y)} e_i(x) f_j(y) d\mu(x) d\nu(y) \right|^2 \\
&= \sum_{j\in J} |\langle \phi, \phi_{ij}\rangle|^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces $h_i(y) = \langle e_i, \phi_y\rangle = 0$, para casi toda y y para toda $i \in I$. Así $\phi_y = 0$ para casi toda x y para casi toda y. Se sigue pues que $\phi = 0$, c.t.p.

Por lo tanto, $\{\phi_{ij}\}$ forma una base ortonormal para $L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$.

□

3.9 Teorema. *Todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.*

Demostración. Sea T_K un operador de Hilbert-Schmidt con núcleo $K \in L^2(X \times Y, d\mu \times d\nu)$.

Suponga que $\{e_i\}_{i\in I}$ y $\{f_j\}_{j\in J}$ son bases de $L^2(X, d\mu)$ y $L^2(Y, d\nu)$, respectivamente. Por la Proposición 3.8, podemos escribir a K en su expansión en serie de Fourier como

$$K = \sum_i \sum_j \langle K, e_i \otimes g_j\rangle e_i \otimes g_j.$$

Lo que también implica que

$$\|K\|_2 = \sum_i \sum_j |\langle K, e_i \otimes g_j\rangle|^2.$$

Por lo tanto, podemos aproximar a K con sumas finitas como sigue: defina K_N como la función

$$K_N = \sum_{i,j=1}^{N} \langle K, e_i \otimes g_j\rangle e_i \otimes g_j.$$

Entonces
$$\|K_N - K\|_2 = \sum_{i,j=N+1}^{\infty} |\langle K, e_i \otimes g_j \rangle|^2,$$
lo cual tiende a cero por ser convergente la representación en serie de $\|K\|_2$.

Por el Lema 3.4, se sigue que
$$\|T_K - T_{K_N}\| \leq \|K - K_N\|_2 \to 0.$$

Pero por el Corolario 3.7, los operadores T_{K_N} son de rango finito. Por lo tanto, por la Proposición 2.42, se concluye que el operador T_K es compacto.

$\square$

4. Álgebras C^*

Álgebras de Banach

En esta sección y en las posteriores, los espacios vectoriales con que se trabajen se considerarán sobre el campo $\mathbb{C}$.

4.1 Definición.

1. Un *álgebra* es un espacio vectorial A dotado de un mapeo bilineal, llamado usualmente producto,
$$A^2 \to A, \quad (a, b) \mapsto ab,$$
tal que
$$a(bc) = (ab)c, \quad \forall a, b, c \in A.$$
2. Un *álgebra de Banach* es un álgebra dotada de una norma $\|\cdot\|$ completa tal que
$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$
Si A admite una identidad multiplicativa 1 (es decir, $a1 = 1a = a,$ para cada $a \in A$) y $\|1\| = 1$, entonces se dice que A es un *álgebra de Banach unitaria.*

4.2 Ejemplo. Dado un espacio de Banach X, el conjunto $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra es Banach con la norma del operador y composición de operadores como producto. Esta es además un álgebra de Banach unitaria con el operador identidad como identidad multiplicativa.

4.3 Definición. Un *ideal* de un álgebra A es un subespacio vectorial I de A tal que si $a \in A$ y $b \in I$, entonces $ab, ba \in I$.

4.4 Observación. Si I es un ideal de un álgebra de Banach A, entonces A/I es un álgebra con la multiplicación dada por
$$(a + I)(b + I) = ab + I.$$

Se deja como ejercicio probar la siguiente proposición:

4.5 Proposición. *Si I es un ideal cerrado de un álgebra de Banach A, entonces el cociente A/I es un álgebra de Banach con la norma del cociente dada por*
$$\|[x]\| = \inf\{\|x - y\| : y \in I\}, \quad \forall [x] \in A/I.$$

4.6 Observación. En virtud de la Proposición 2.41, dado un espacio de Hilbert H, el conjunto de operadores compactos $\mathcal{K}(H)$ es un ideal del álgebra de Banach $\mathcal{B}(H)$, por lo que el cociente $\mathcal{B}(H)/\mathcal{K}$ es un álgebra de Banach. Esta álgebra se conoce como el *álgebra de Calkin.*

4.7 Definición. Sea A un álgebra de Banach unitaria. Se dice que un elemento $a \in A$ es *invertible* si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = 1$.

Se define el conjunto

$$\mathrm{Inv}(A) = \{a \in A | a \text{ es invertible}\}.$$

Si a es invertible, se verifica que el elemento b de la definición es único; se denotará como a^{-1}. Por otro lado, es claro que $\mathrm{Inv}(A)$ es un grupo bajo la multiplicación.

Como se mencionó anteriormente, el conjunto de operadores acotados sobre un espacio de Banach es también un álgebra de Banach. A continuación se dará una importante generalización de los valores propios para un álgebra de Banach uniteria en general.

4.8 Definición. Sea A un álgebra de Banach unitaria. Dado $a \in A$, se define su *espectro* como el conjuto

$$\sigma(a) = \sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda 1 - a \notin \mathrm{Inv}(A)\}$$

En lo sucesivo y mientras no haya confunsión se escribirá λ en vez de $\lambda 1$.

4.9 Ejercicio. Demuestre que el conjunto de matrices cuadradas de orden n sobre los complejos $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de Banach y que, en este caso, espectro de una matriz coincide con el conjunto de sus eigenvalores.

Una subconjunto importante de los elementos invertibles se presenta en la siguiente proposición

4.10 Proposición. *Sea A un álgebra de Banach unitaria y a un elemento de A tal que $\|A\| \leq 1$. Entonces $1 - a \in \mathrm{Inv}(A)$ y*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

Esta es llamada la serie de Neumann *para* $(1-a)^{-1}$.

Demostración. Este resultado se obtiene analizando la serie geométrica del enunciado. En efecto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n = (1 - \|a\|)^{-1} < \infty.$$

Siendo A completo, la serie $\sum_{m=0}^{\infty}$ es convergente, digamos a b. Así, $(1-a)(1+1+\ldots+a^n) = 1-a^{n+1}$ converge a $(1-a)b = b(1-a)$ y a 1 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, b es el inverso de $1-a$.

$\square$

Una propiedad importante de la función $a \mapsto a^{-1}$ definida sobre $\mathrm{Inv}(A)$, cuya demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [7], es la siguiente:

4.11 Proposición. *Si A es un álgebra de Banach unitaria, entonces* $\mathrm{Inv}(A)$ *es abierto en A, y la función*

$$\mathrm{Inv}(A) \to A, \quad a \mapsto a^{-1}$$

es diferenciable.

4.12 Proposición. *(Gelfand) Si a es un elemento de un álgebra de Banach unitaria A, entonces el espectro $\sigma(a)$ de a es no vacío.*

Demostración. Suponga que $\sigma(a) = \emptyset$.

Considere la función $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ (bien definida para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ debido a que $\sigma(a) = \emptyset$). Se probará primero que es acotada en todo $\mathbb{C}$.

Si $\|\lambda\| > 2\|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\| < \frac{1}{2}$ por lo que $1 - \|\lambda^{-1}a\| > \frac{1}{2}$. Luego, notando que $\|a\| \neq 0$ por ser el espectro de a vacío,

$$\begin{aligned} \|(1-\lambda^{-1}a)^{-1} - 1\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^{-1}a)^n \right\| \\ &\leq \frac{\|\lambda^{-1}a\|}{1-\|\lambda^{-1}a\|} \leq 2\|\lambda^{-1}a\| < 1. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|(\lambda^{-1}a)^{-1}\| \leq 1 + \|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2,$$

y, por lo tanto,

$$\|(a-\lambda)^{-1}\| = \|\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2/|\lambda| < \|a\|^{-1}.$$

Luego, la función es acotada en la región $\lambda < \|a\|$. Por otro lado, como la función $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ es continua, es acotada en el compacto $2\|a\|\mathbb{D}$. Por lo hecho anteriormente, se tiene que esta función es acotada en todo $\mathbb{C}$; digamos que

$$\|(a-\lambda)^{-1}\| \leq M, \quad \text{para toda } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Para $\tau \in A^*$, la función $\lambda \mapsto \tau((a-\lambda)^{-1})$ es entera, al ser composición de funciones diferenciables, y acotada. Luego, por el Teorema de Liouville, es una constante. En particular, $\tau(a^{-1}) = \tau((a-1)^{-1})$. Pero como esto se cumple para cada $\tau \in A^*$, se sigue que $a = a - 1$, lo cual es absurdo.

$\square$

4.13 Definición. Si a es un elemento de un álgebra de Banach unitaria A, se define su *radio espectral* como

$$\mathrm{r}(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

4.14 Observación. Si a, b son elementos invertibles de un álgebra unitaria A, entonces $1 - ab$ es invertible si y solo si $1 - ba$ lo es. En efecto, si $1 - ab$ tiene inverso c, entonces $1 - ba$ tiene inverso $1 + bca$.

Como consecuencia se tiene que

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\} \quad \text{para cada } a, b \in A$$

y que

$$\mathrm{r}(ab) = \mathrm{r}(ba).$$

Una demostracuón de lo siguiente puede encontrarse, por ejemplo, en [7]:

4.15 Proposición (Beurling)**.** *Sea A un álgebra de Banach unitaria y $a \in A$. Entonces*

$$r(a) = \operatorname*{ínf}_{n \geq 1} \|a^n\|^{1/n} = \operatorname*{lím}_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Operadores compactos y de Fredholm

De la misma manera en que se definieron los operadores compactos en las secciones anteriores, se pueden definir estos para espacios de Banach:

4.16 Definición. Sean X y Y espacios de Banach y B_1 la bola unitaria cerrada de X. Un operador lineal $u \colon X \to Y$ se dice *compacto* si $u(B_1)$ es relativamente compacto en Y.

El conjunto de operadores compactos de X en Y se denotará por $\mathcal{K}(X, Y)$. Si $X = Y$ se escribirá simplemente $\mathcal{K}(X)$.

Al igual que en el caso de espacios de Hilbert, se verifica que $\mathcal{K}(X, Y)$ es un espacio vectorial cerrado de $\mathcal{B}(X, Y)$. Más aún, $\mathcal{K}(X)$ es un ideal de $\mathcal{B}(X)$.

4.17 Proposición. *Si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X)$ si y solo si X es de dimensión finita.*

Demostración. $\mathcal{K}(X) = \mathcal{B}(X)$ si y solo si id_X es compacto si y solo si B_1 es compacto si y solo si X es de dimensión finita.

□

De igual forma que en espacios de Hilbert se tienen las siguientes nociones:

4.18 Definición. Sea X un espacio de Banach. Una aplicación lineal $\tau\colon X \to \mathbb{C}$ es un *funcional lineal*. El conjunto de funcionales lineales acotados de X se llama el *espacio dual de X* y se denota por X^*.

4.19 Observación. Por la Proposición 2.5 se tiene que X^* es también un espacio de Banach.

4.20 Definición. Sean X y Y espacios de Banach y $u\colon X \to Y$ un operador lineal acotado. Se define el *transpuesto* de u como el operador $u^* \in \mathcal{B}(X^*, Y^*)$ dado por $u^*(\tau) = \tau \circ u$, para todo $\tau \in Y^*$.

4.21 Proposición. *Sean X y Y espacios de Banach y $u \in \mathcal{K}(X, Y)$. Entonces $u^* \in \mathcal{K}(Y^*, X^*)$.*

Demostración. Sea B_1 la bola unitaria cerrada de X y $\varepsilon > 0$. Como $u(B_1)$ es totalmente actado existen elementos $x_1, \ldots, x_n \in B_1$ tales que si $x \in B_1$, entonces $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon/3$ para algún índice i.

Sea $v \in \mathcal{B}(Y^*, \mathbb{C}^n)$ dado por $v(\tau) = (\tau u(x_1), \ldots, \tau u(x_n))$. Como v es de rango finito es compacto, por lo que $v(T)$ es totalmente acotado, donde T es la bola unitaria cerrada de Y^*. Así, existen funcionales lineales $\tau_1, \ldots, \tau_m$ en T tal que si $\tau \in T$, entonces $\|v(\tau) - v(\tau_j)\| < \varepsilon/3$ para algún índice j. Considerando a $\mathbb{C}^n$ con la norma infinito se tiene

$$\|v(\tau) - v(\tau_j)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |u^*(\tau)(x_i) - u^*(\tau_j)(x_i)|.$$

Así, dado $x \in B_1$ existe un índice i tal que $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |u^*(\tau)(x_i) - u^*(\tau_j)(x_i)| &\leq |u^*(\tau)(x) - u^*(\tau)(x_i)| + |u^*(\tau)(x_i) - u^*(\tau_j)(x_i)| + |u^*(\tau_j)(x_i) - u^*(\tau_j)(x)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se sigue que $\|u^*(\tau) - u^*(\tau_j)\| < \varepsilon$. Luego, $u^*(T)$ es totalmente acotado y, por tanto, u^* es compacto.

□

4.22 Definición. Sean X y Y espacios de Banach. Un operador lineal $u\colon x \to Y$ se dice *acotado por abajo* si existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u(x)\| \geq \delta \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

4.23 Observación. Si $u\colon X \to Y$ es un operador acotado por abajo entonces $u(X)$ es cerrado pues si $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $u(X)$, entonces lo es en X y, siendo X completo, converge a algún elemento $x \in X$. Por continuidad la sucesión $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $u(x)$. Luego $u(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y.

4.24 Proposición. *Sea* $u\colon X \to X$ *un operador compacto en un espacio de Banach* X *y suponga que* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Entonces*

1. $\ker(u-\lambda)$ *es de dimensión finita.*

2. $(u-\lambda)(X)$ *es cerrado y de codimensión finita en* X.

Demostración. Defina $Z = \ker(u-\lambda)$. Entonces $u(Z) \subset Z$ y la restricción u_Z de u a Z está en $K(Z)$. Como $U_Z = \lambda\,\mathrm{id}_Z$ y $\lambda \neq 0$, id_Z es compacto. Luego, por la Proposición 4.17, Z es de dimensión finita.

Como Z es de dimensión finita existe un espacio vectorial cerrado Y en X tal que $Z \oplus Y = X$. Ya que $(u-\lambda)X = (u-\lambda)Y$ se obtendrá que $(u-\lambda)X$ es cerrado si se prueba que la restricción $(u-\lambda)_Y\colon Y \to X$ es acotada por abajo.

Suponga que $(u-\lambda)_Y$ no es acotado por abajo. En este caso existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u(x_n) - \lambda x_n\| = 0$. Por la compacidad de u existe una subsucesión de $u(x_n)$ convergente; se puede pues suponer que $u(x_n)$ es convergente.

Note que $x_n = \lambda^{-1}(u(x_n) - (u-\lambda)(x_n))$, por lo que x_n también es convergente, digamos, a x. Como Y es cerrado se tiene $x \in Y$. Además, $u(x) = \lambda x$, por lo que $x \in Y \cap \ker(u-\lambda)$. Luego $x = 0$, pero x es un vector unitario por ser límite de vectores unitarios, lo cual es absurdo.

Sea ahora $W = X/(u-\lambda)(X)$. Se probará que W es de dimensión finita demostrando que W^* lo es.

Sea $\pi\colon X \to W$ el epimorfismo canónico. La imagen de π^* está contenida en el núcleo de $u^* - \lambda$ pues

$$\begin{aligned}
(u^*-\lambda)(\pi^*(\tau))(x) &= (\tau\circ\pi\circ u - \lambda\tau\circ\pi)(x)\\
&= \tau(u(x) + (u-\lambda)(X)) - \lambda\tau(x + (u-\lambda)(X))\\
&= \tau(\lambda x + (u-\lambda)(X)) - \lambda\tau(x + (u-\lambda)(X)) = 0,
\end{aligned}$$

para $\tau \in W^*$ y $x \in X$.

Por la Proposición 4.21 u^* es compacto. Luego, usando la primera parte de esta proposición, $\ker(u^*-\lambda)$ es de dimensión finita. Es fácil ver que π^* es inyectivo de donde, por ser de rango finito, W^* es de dimensión finita.

□

4.25 Observación. Si $u\colon X \to X$ es una aplicación lineal en un espacio vectorial X, entonces la sucesión de espacios $(\ker(u^n))_{n=1}^{\infty}$ es creciente y la sucesión $(u^n(X))_{n=1}^{\infty}$ es decreciente.

4.26 Definición. Sea X un espacio vectorial y $u\colon X \to X$ una aplicación lineal.

1. Si $\ker(u^n) \neq \ker(u^{n+1})$, para toda $n \in \mathbb{N}$, se dice que u tiene *ascenso infinito* y se escribe $\text{ascent}(u) = +\infty$. En caso contrario, se dice que u tiene *ascenso finito* y se define
$$\text{ascent}(u) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N}\colon \ker(u^p) = \ker(u^{p+1})\}.$$
En este caso, $\ker(u^p) = \ker(u^n)$ para toda $n \geq p$.

2. Si $u^n(X) \neq u^{n+1}(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$, se dice que u tiene *descenso infinito* y se escribe $\text{descent}(u) = +\infty$. En caso contrario, se dice que u tiene *descenso finito* y se define
$$\text{ascent}(u) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N}\colon u^p(X) = u^{p+1}(X)\}.$$
En este caso, $u^p(X) = u^n(X)$ para toda $n \geq p$.

4.27 Proposición. *Sea u un operador compacto en un espacio de Banach X y suponga que $\lambda \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Entonces $u - \lambda$ tiene ascenso y descenso finitos.*

Demostración. Suponga que u tiene ascenso infinito.

Defina la sucesión $(N_n)_{n=1}^{\infty}$ por $N_n = \ker(u-\lambda)^n \quad n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, N_{n-1} debe ser un subespacio propio de N_n. Luego, por el Lema de Riesz (Proposición 2.2, existe un vector unitario $x_n \in N_n$ tal que $\|x_n + N_{n-1}\| \geq 1/2$. Si $m < n$, entonces
$$u(x_n) - u(x_m) = \lambda x_n + (u-\lambda)(x_n) - (u-\lambda)(x_n) - \lambda x_m = \lambda x_n - z,$$
con $z \in N_{n-1}$. Por tanto,
$$\|u(x_n) - u(x_m)\| = \|\lambda x_n - z\| = |\lambda|\|x_n - \lambda^{-1}z\| \geq |\lambda|/2 > 0.$$

Pero entonces $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no puede tener subsucesiones convergentes, lo cual contradice la compacidad de u.

Análogamente se prueba que $u - \lambda$ tiene descenso finito.

□

4.28 Definición. Sean X y Y espacios de Banach y $u \in \mathcal{B}(X,Y)$. Se dice que u es de *Fredholm* si $\ker(u)$ tiene dimensión finita y $u(X)$ tiene codimensión finita en Y.

Se define la *nulidad* de u, denotada $\text{nul}(u)$, como $\dim\ker(u)$ y el *defecto* de u, denotado $\text{def}(u)$, como la codimensión de $u(X)$ en Y.

Se define también el *índice* de u, denotado $\text{ind}(u)$, como la cantidad
$$\text{ind}(u) = \text{nul}(u) - \text{def}(u).$$

Un resultado fundamental de la teoría de Fredholm es el siguiente:

4.29 Proposición. *Sean $u: X \to Y$ y $v: Y \to Z$ operadores de Fredholm entre los espacios de Banach X, Y y Z. Entonces uv es de Fredholm y*

$$\mathrm{ind}(vu) = \mathrm{ind}(v) + \mathrm{ind}(u).$$

Demostración. Sea $Y_2 = \ker(v) \cap u(X)$ y escoja subespacios vectoriales cerrados Y_1, Y_3, Y_4 tales que $u(X) = Y_2 \oplus Y_3$, $\ker(v) = Y_1 \oplus Y_2$ y $Y = Y_1 \oplus u(X) \oplus Y_4$. Note que Y_1, Y_2 y Y_3 son de dimensión finita.

La aplicación $x \mapsto u(x)$ de $\ker(uv)$ en Y_2 es suprayectiva y tiene el mismo núcleo que u, por lo que el núcleo de uv es de dimensión finita y $\mathrm{nul}(vu) = \mathrm{nul}(u) + \dim(Y_2)$.

Como $v(Y) = v(Y_3) \oplus v(Y_4)$ y $v(Y_3) = vu(X)$ y $v(Y_3) = vu(X)$, se tiene $v(Y) = vu(X) \oplus v(Y_4)$. Tomando un subespacio Z' de Z de dimensión finita tal que $v(Y) \oplus Z' = Z$ se obtiene $Z = vu(X) \oplus v(Y_4) \oplus Z'$. Como $v(Y_4) \oplus Z'$ es de dimensión finita, se sigue que $vu(X)$ es de codimensión finita en Z. Por lo tanto vu es de Fredholm.

La aplicación $y \mapsto v(y)$ de Y_4 en $v(Y_4)$ es un isomorfismo lineal, por tanto $\dim(Y_a) = \dim(v(Y_a))$. Se sigue que $\mathrm{def}(vu) = \dim(Y_a) + \dim(Z') = \dim(Y_4) + \mathrm{def}(v)$.

Luego,

$$\mathrm{nul}(vu) + \mathrm{def}(u) + \mathrm{def}(v) = \mathrm{nul}(u) + \dim(Y_4) + \mathrm{nul}(v) + \mathrm{def}(v) = \mathrm{nul}(u) + \mathrm{nul}(v) + \mathrm{def}(vu)$$

y así,

$$\mathrm{ind}(vu) = \mathrm{nul}(vu) - \mathrm{def}(vu) = \mathrm{nul}(u) + \mathrm{nul}(v) - \mathrm{def}(u) - \mathrm{def}(v) = \mathrm{ind}(u) + \mathrm{ind}(v).$$

□

4.30 Proposición. *Sea X un espacio de Banach, $u: X \to X$ un operador compacto y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces*

1. *El operador $u - \lambda$ es de Fredholm con* $\mathrm{ind}(u - \lambda) = 0$.
2. *Si p es el ascenso (finito) de $u - \lambda$, entonces*

$$X = \ker(u - \lambda)^p \oplus (u - \lambda)p(X).$$

Demostración. 1. $u - \lambda$ es de Fredholm por la Proposición 4.24. Por otro lado, si m y n son enteros mayores que $\max\{\mathrm{ascent}(u - \lambda), \mathrm{descent}(u - \lambda)\}$, entonces

$$\mathrm{nul}(u - \lambda)^m = \mathrm{nul}(u - \lambda)^n$$

y

$$\mathrm{def}(u - \lambda)^m = \mathrm{def}(u - \lambda)^n,$$

por lo que

$$\mathrm{ind}(u - \lambda)^m = \mathrm{ind}(u - \lambda)^n.$$

Por la Proposición 4.29 se tiene $m \, \mathrm{ind}(u - \lambda) = n \, \mathrm{ind}(u - \lambda)$, de donde se sigue que $\mathrm{ind}(u - \lambda) = 0$.

2. Si $x \in \ker(u-\lambda)^p \cap (u-\lambda)^p(X)$, entonces existe un elemento $y \in X$ tal que $x = (u-\lambda)^p(y)$ y $(u-\lambda)^{2p}(y) = 0$. Como $\ker(u-\lambda)^p = \ker(u-\lambda)^{2p}$ se sigue que $(u-\lambda)^p(y) = 0$, es decir, $x = 0$.

   Como $\operatorname{nul}(u-\lambda)^p = \operatorname{def}(u-\lambda)^p$ se sigue que $X = \ker(u-\lambda)^p \oplus (u-\lambda)^p(X)$

$\square$

4.31 Corolario (Alternativa de Fredholm)**.** *El operador $u-\lambda$ es inyectivo si y solo si es suprayectivo.*

Demostración. Como el índice de $u-\lambda$ es cero, su nulidad es cero si y solo si su defecto es cero, es decir, $u-\lambda$ es inyectivo si y solo si es suprayectivo.

$\square$

4.32 Proposición. *Sea X un espacio de Banach y $u\colon X \to X$ un operador compacto. Entonces $\sigma(u)$ es a lo sumo numerable y cada punto no cero de $\sigma(u)$ es un eigenvalor de u y un punto aislado de $\sigma(u)$.*

Demostración. Si λ es un punto no cero de $\sigma(u)$, por la alternativa de Fredholm (Corolario 4.31) se tiene que $u-\lambda$ no es inyectivo, es decir, λ es un eigenvalor de u.

El operador $u-\lambda$ tiene ascenso finito, digamos p, y por la Proposición 4.30 se puede escribir $X = Y \oplus X$, donde $Y = \ker(u-\lambda)^p$ y $Z = (u-\lambda)^p(X)$. Los espacios Y y Z son cerrados e invariantes para u. Así,

$$u - \lambda = (u_Y - \lambda \operatorname{id}_Y) \oplus (u_Z - \lambda \operatorname{id}_Z),$$

donde u_Y y u_Z son las restricciones de u a Y y Z, respectivamente.

Como $(u_Y - \lambda \operatorname{id}_Y)^p = 0$, el espectro $\sigma(u_Y)$ es el conjunto unipuntual $\{\lambda\}$. También, como u_Z es compacto y $\ker(u_Z - \lambda \operatorname{id}_Z)^p = 0$, $(u_Z - \lambda \operatorname{id}_Z)^p$ es invertible (por tener índice de Fredholm cero) y luego también lo es $(u_Z - \lambda \operatorname{id}_Z)$. Por tanto, $\lambda \notin \sigma(u)$.

Esto implica que $\sigma(u)\backslash\{\lambda\} = \sigma(u_Z)$. Luego λ es un punto aislado de $\sigma(u)$ pues $\sigma(u_Z)$ es cerrado en $\sigma(u)$. De esto se sigue también la numerabilidad de $\sigma(u)$.

$\square$

Álgebras C^*

4.33 Definición. Un *álgebra C^** es un álgebra de Banach A con un mapeo $x \mapsto x^*$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $(x^*)^* = x$, para toda $x \in A$.

2. $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$, para toda $x, y \in A$ y $a, b \in \mathbb{C}$.
3. $(xy)^* = y^*x^*$, para toda $x, y \in A$.
4. $\|x^*x\| = \|x\|^2$, para toda $x \in A$.

Un mapeo $x \mapsto x^*$ que cumpla (a), (b) y (c) es llamado una *involución en el álgebra*. El elemento x^* es usualmente llamado el adjunto de x.

Si A tiene una identidad multiplicativa, entonces en automático se tiene $\|1\| = 1$.

Si A un álgebra C^* entonces un subconjunto B de A se dirá subálgebra C^* si es un álgebra C^* con las operaciones de A. Por otro lado, dado un subconjunto S de A, la subálgebra C^* más pequeña respecto a la inclusión que contenga a S se llamará el *álgebra C^* generada por S*, a veces denotada como $C^*(S)$.

4.34 Observación. Las álgebras C^* son un tipo de álgebras de Banach que están íntimamente relacionadas con la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Puede verse que, dado un espacio de Hilbert H, el conjunto de operadores lineales acotados $\mathcal{B}(H)$ es un álgebra C^* con la composición como producto y la involución $T \mapsto T^*$, $T \in \mathcal{B}(H)$.

Tomando en cuenta la analogía entre álgebras C^* y operadores lineales se tienen destacan los siguientes elementos:

4.35 Definición. Sea A un álgebra C^*. Un elemento $a \in A$ se dice:

1. *autoadjunto o hermitiano* si $a = a^*$,
2. *normal* si $aa^* = a^*a$,
3. *protección* si $a = a^* = a^2$.

Si A es unitaria, entonces un elemento $u \in A$ se dice:

1. *unitario* si $u^*u = uu^* = 1$,
2. *isometría* si $u^*u = 1$,
3. *coisometría* si $uu^* = 1$.

4.36 Ejercicio. Pruebe que para cada $a \in A$ existen elementos autoadjuntos b y c tales que $a = b + ic$.

4.37 Definición. Sean A y B álgebras C^*. Una función $\varphi\colon A \to B$ se dice un $*$-homomorfismo si

1. $\varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$, para toda $a, b \in \mathbb{C}$ y $x, y \in A$.
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para toda $x, y \in A$.
3. $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$, para toda $x \in A$.

Si además A y B son unitarias y $\varphi(1) = 1$, entonces se dice que φ es unitario.

4.38 Proposición. *Si a un elemento autoadjunto de un álgebra $C*$ A, entonces $r(a) = \|a\|$.*

Demostración. Se tiene $\|a^2\| = \|a\|^2$. Por inducción se sigue que $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, luego por la Proposición 4.15

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|.$$

□

4.39 Proposición. *Sean A y B álgebras C^* unitarias y $\varphi\colon A \to B$ un $*$-homomorfismo. Entonces*

$$\|\varphi(a)\| \leq \|a\|, \quad \forall a \in A.$$

Demostración. Sea $a \in A$. Entonces $\sigma(\varphi a) \subset \sigma(a)$, luego

$$\|\varphi a\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(\varphi(a^*a)) \leq r(a^*a) \leq \|a^*a\| \leq \|a\|^2.$$

Por lo tanto, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. □

4.40 Corolario. *Sean A y B álgebras C^* unitarias. Si $\varphi\colon A \to B$ es un $*$-monomorfismo, entonces*

$$\|\varphi(a)\| = \|a\|, \quad \forall a \in A.$$

Una herramienta muy poderosa que se utilizará es dada por la siguiente proposición:

4.41 Proposición. *Sea a un elemento normal de un álgebra C^* unitaria A, y suponga que z es la función inclusión de $\sigma(a)$ en $\mathbb{C}$. Entonces existe un único $*$-homomorfismo unitario $\varphi\colon C(\sigma(a)) \to A$ tal que $\varphi(z) = a$. Más aún, φ es isométrico y la imagen de φ es la subálgebra C^* de A generada por 1 y a.*

La demostración está sujeta a una serie de resultados anteriores. Puede consultarse [7].

Bajo las notaciones de la Proposición 4.41, el homomorfismo φ de la Proposición 4.41 es llamado el *cálculo funcional en a*.

Si p es un polinomio, es fácil ver que $\varphi(p) = p(a)$. Por esto, para una función $f \in C(\sigma(a))$ se escribe $f(a)$ en lugar de $\varphi(f)$. Note que $f(a)$ es normal.

4.42 Definición. Dados dos elementos $x, y \in H$ se define el operador $x \otimes y$ en H por la relación

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x.$$

4.43 Observación. Dados $x, x', y, y' \in H$ y $u \in \mathcal{B}(H)$ se verifican fácilmente las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
\|x \otimes y\| &= \|x\|\|y\| \\
(x \otimes x')(y \otimes y') &= \langle y, x' \rangle (x \otimes y') \\
(y \otimes y)^* &= y \otimes x \\
u(x \otimes y) &= u(x) \otimes y \\
(x \otimes y)u &= x \otimes u^*(y).
\end{aligned}$$

4.44 Proposición. *El operador $x \otimes y$ es de rango uno para cada $x, y \in H$, $x \neq 0$; más aún, si u es un operador acotado de rango uno, entonces existen $x, y \in H$ tales que $u = x \otimes y$.*

Demostración. Es claro que $x \otimes y$ es un operador de rango uno para cada $x, y \in H$ con $y \neq 0$.

Sea u un operador de rango uno. Sea $x \neq 0$ en la imagen de u. Si $z \in H$, entonces $u(z) = \tau(z)x$ para algún escalar $\tau(z) \in \mathbb{C}$. Por la linealidad de u se tiene que τ es un funcional lineal. Más aún, de $|\tau(z)|\|x\| = \|u(z)\| \leq \|u\|\|z\|$ se sigue que τ es acotado.

Luego, por el Teorema de Representación de Riesz 2.20, existe $y \in H$ tal que $\tau(z) = \langle z, y \rangle$, para toda $z \in H$. De esto se sigue que $u = x \otimes y$.

$\square$

4.45 Definición. Sea H un espacio de Hilbert. Si A es una subálgebra C^* de $B(H)$, decimos que A es *irreducible*, o que *actúa irredublemente* sobre H, si los únicos subespacios cerrados invariantes de H son A y 0.

4.46 Proposición. *Sea A un álgebra C^* actuando irreduciblemente en un espacio de Hilbert H tal que tiene intersección dinstinta de cero con el ideal de operadores compactos $\mathcal{K}(H)$. Entonces $\mathcal{K}(H) \subset A$.*

Demostración. Se probará primero que existen proyecciones ortogonales en A de rango finito.

Como la intersección $A \cap \mathcal{K}(H)$ es un conjunto autoadjunto no cero, existe en él algún elemento u no cero y autoadjunto. Por la Proposición 4.38 se tiene $r(u) = \|u\| > 0$, por lo que $\sigma(u)$ contiene elementos distintos de cero. Por la Proposición 4.32 u admite un eigenvalor distinto de cero, digamos λ.

Por la misma proposición los puntos no nulos de $\sigma(a)$ son aislados, lo que implica que la función $f = \chi_\lambda$ es continua en $\sigma(u)$. De la Proposición 4.41 se sigue que la proyección $p = f(u)$ es un elemento de A. Más aún, p no es cero pues u no lo es.

Si z es la función inclusión de $\sigma(u)$ en $\mathbb{C}$, entonces $(z-\lambda)f = 0$, por lo que $(u-\lambda)p = 0$ y así, $p(H) \subset \ker(u-\lambda)$. Por la Proposición 4.24 $\ker(u-\lambda)$ es de dimensión finita, luego p es de rango finito.

Sea ahora q una proyección en A de rango finito mínimo. Entonces qAq es un álgebra C^* de dimensión finita. Por ser q de rango mínimo, las únicas proyecciones en qAq pueden ser 0 y q, y $qAq = \mathbb{C}q$, pues en caso contrario, por un razonamiento análogo al del comienzo, existiría una proyección de menor dimensión en qAq.

Sea $y \in q(H)\backslash\{0\}$ y defina $K = \overline{\{u(y) \colon u \in A\}}$. Entonces K es un subsepacio vectorial de H invariante para A y es no cero pues contiene a $y = q(y)$. Por la irreducibilidad de A se tiene $K = H$.

Así, para un elemento arbitrario $x \in q(H)$ existe una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $x = \lim\limits_{n\to\infty} qu_nq(y)$. Como $x = q(x)$ y $y = q(y)$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} qu_nq(y)$. Pero como $qAq = \mathbb{C}q$, existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{C}$ tal que $qu_nq = \lambda_n q$. De esto se sigue que $q(H) = \mathbb{C}y$.

Finalmente, se tiene que todos los operadores de rango uno están en A. En efecto, dados x y z en H existen sucesiones $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $x = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(y)$ y $z = \lim\limits_{n\to\infty} v_n(y)$. Luego

$$x \otimes z = \lim_{n\to\infty} u_n(y) \otimes v_n(y) = \lim_{n\to\infty} u_n(y \otimes y)v_n^* = \lim_{n\to\infty} u_n q v_n^*.$$

Por lo tanto $x \otimes z \in A$. Es decir, todos los operadores de rango uno están en A, luego todos los operadores de rango finito y, por la Proposición 2.42, todos los operadores compactos.

$\square$

5. Operadores de Toeplitz y de Hankel en el espacio de Bergman

El espacio de Bergman en el disco unitario

Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo y $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario. Considere la medida usual de Lebesgue normalizada, es decir,

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{r}{\pi}drd\theta,$$
$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Se denotará por $H(\mathbb{D})$ al conjunto de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y por $H^\infty(\mathbb{D})$ al subconjunto $H(\mathbb{D})$ de las funciones que sean esencialmente acotadas.

5.1 Definición. Se define el espacio $L^2(\mathbb{D}, dA)$ como el espacio de todas las (clases de equivalencia de) funciones Lebesgue medibles f tales que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

Este espacio puede verse como un caso particular del ejemplo 2.11.

5.2 Definición (Espacio de Bergman)**.** Se define el *Espacio de Bergman* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ como el conjunto de funciones analíticas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty.$$

Este espacio puede entenderse como subespacio de $L_2(\mathbb{D}, dA)$.

Es fácil ver que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un espacio vectorial. Más aún, hereda de $L_2(\mathbb{D}, dA)$ el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \left(\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA(z)\right).$$

Lo cual induce la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z)\right).$$

Mientras no haya confusión, esta norma se denotará simplemente como $\|\cdot\|$.

$D_{z,r}$ denotará el disco abierto de radio r centrado en z. Es decir,

$$D_{z,r} = \{w \in \mathbb{D} \colon |z - w| < r\}.$$

Las siguientes proposiciones indican que los valores de una función analítica en un punto están determinados por los valores que la función toma en un disco centrado en él.

5.3 Proposición. *(Teoremas del valor medio) Sea $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ tal que $D_{z_0,r} \subset \mathbb{D}$. Entonces*

1. $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$

2. $f(z_0) = \dfrac{1}{r^2} \displaystyle\int_{D_{z_0,r}} f(w) dA(w).$

Para la elección de r puede tomarse, por ejemplo, $r = d(z_0, \partial\mathbb{D})$.

Demostración.

1. Por la fórmula integral de Cauchy se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{z_o,r}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw.$$

   Tomando $w = z_0 + re^{i\theta}$ esta integral es

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

2. Usando el inciso anterior se tiene

$$\int_{D_{z_0,r}} f(w) dA(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{ir\theta}) r d\theta dr = 2 \int_0^r f(z_0) r dr = r^2 f(z_0).$$

□

Con esto se puede dar una relación entre la convergencia en $L^2(\mathbb{D}, dA)$ y la convergencia uniforme en compactos:

5.4 Proposición. *Dado un subconjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$ se cumple*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{d(K, \partial\mathbb{D})}\|f\|,$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Sea $z \in K$ y $r = d(z, \partial\mathbb{D})$, entonces $\overline{D}_{z,r} \subset \mathbb{D}$ y por la Proposición 5.3

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{r^2}\left|\int_{\mathbb{D}} f(w)\chi_{\overline{D_{z,r}}}(w)dA(w)\right| \\
&\leq \frac{1}{r^2}\left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 dA(w)\right)^{1/2}\left(\int_{\overline{D_{z,r}}} dA(w)\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{r}\|f\| \leq \frac{1}{d(K, \partial\mathbb{D})}\|f\|,
\end{aligned}$$

donde $\chi_{\overline{D_{z,r}}}$ es la función característica de $\overline{D_{z,r}}$.

□

5.5 Proposición. *El espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Se sabe que esta sucesión converge a alguna función $f \in L_2(\mathbb{D}, dA)$. Para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$, por la Proposición 5.4 se tiene

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{d(K, \partial\mathbb{D})}\|f_n - f_m\|.$$

Luego, puede definirse una función equivalente a f tal que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a ella en cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Esto implica la completez de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

□

5.6 Corolario. *Los funcionales de evaluacion* eval_z*, $z \in \mathbb{D}$, son funcionales lineales acotados.*

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{D}$. Usando la Proposición 5.4 con $K = \{z_0\}$ se tiene

$$|\operatorname{eval}_{z_0}(f)| = |f(z_0)| \leq \frac{1}{d(z_0, \mathbb{D})}\|f\|.$$

□

Se deduce de la Proposición 2.37 que:

5.7 Corolario. $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ *es un espacio de Hilbert con núcelo reproductor.*

Se denotará por $\mathbb{N}_0$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

5.8 Observación. Todos los monomios $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, son funciones analíticas y cuadrado integrables. Así, son elementos de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Su norma se puede obtener como sigue:

$$\|f_n\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |w|^{2n} dA(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{2n+1} dr d\theta = \frac{1}{n+1}.$$

Con esto se pueden introducir los *monomios normalizados*: para cada $n \in \mathbb{N}_0$, defina e_n como la función dada por $e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n$. Por lo anterior se tiene que $\|e_n\| = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$.

5.9 Proposición. *La sucesión de monomios normalizados* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *es una base para* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Ya se sabe que son de norma 1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, entonces

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m \rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1} \int_{\mathbb{D}} w^n \overline{w^m} dA(w) \\ &= \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{m+1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{n+m+1} e^{i\theta(n-m)} dr d\theta = 0.\end{aligned}$$

Pues

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta = \delta_{ij}.$$

Se verá ahora que es una base para $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ usando la Proposición 2.25. Sea $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y suponga que f tiene un desarrollo en serie de Taylor $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$. Esta serie converge uniformemente en conjuntos compactos dentro de $\mathbb{D}$.

Por la convergencia uniforme en compactos, para $R \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}\int_{R\overline{\mathbb{D}}} f(w)\overline{w^n} dA(w) &= \int_{R\overline{\mathbb{D}}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \right) \overline{w^n} dA(w) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_{R\overline{\mathbb{D}}} w^m \overline{w^n} dA(w) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^{m+n+1} e^{i\theta(m-n)} dr d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{R^{2(n+1)}}{n+1} \delta_{nm} = a_n \frac{R^{2(n+1)}}{n+1}.\end{aligned}$$

Como $|f(z)\overline{z^n}\chi_{R\overline{\mathbb{D}}}(z)| \leq |f(z)\overline{z^n}|$, donde la última función es integrable e independiente de R, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f(w)\overline{w^n}dA(w) = \frac{a_n}{n+1}.$$

Esto implica que

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{a_n}{\sqrt{n+1}}.$$

Por lo tanto, si $\langle f, e_n \rangle = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$, necesariamente $a_n = 0$, para toda $n \in \mathbb{N}_0$, es decir, $f \equiv 0$.

□

5.10 Corolario. *El núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es*

$$h_z(w) = \frac{1}{(1 - w\overline{z})^2}$$

Demostración. Se obtiene derivando ambos miembros de la serie $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, para $z \in \mathbb{D}$ y usando la Proposición 2.39.

□

El núcleo reproductor será tratado en algunos casos como una función de dos variables mediante la relación

$$K(z, w) := \overline{h_z(w)}.$$

La propiedad de reproducción entonces es

$$\begin{aligned} f(z) &= \int\limits_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) dA(w) \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w). \end{aligned}$$

5.11 Definición. Una función φ analítica en $\mathbb{D}$ se dice un *multiplicador* de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ si $\varphi f \subset \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

5.12 Proposición. *Una función φ es un multiplicador de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ si y solo si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$.*

Demostración. Si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ claramente $\varphi f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Por otro lado, si $\varphi f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces se puede definir un operador de multiplicación $M_\varphi \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ con $M_\varphi(f) = \varphi f$, $\forall f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Se probará que $G = \operatorname{Graf} M_\varphi$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \times \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Sea $((f_n, \varphi f_n))_{n=1}^\infty$ una sucesión en G convergente a algún punto $(f, g) \in L^2(\mathbb{D}, dA) \times L^2(\mathbb{D}, dA)$.

En particular $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge a f en la norma de L^2 y, por ser $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ completo, $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Más aún, existe una subsucesión $(f_{\alpha(n)})_{n=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\alpha(n)}(z) = f(z), \quad \text{para casi toda } z \in \mathbb{D}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \varphi f_{\alpha(n)}(z) = \varphi f(z), \quad \text{para casi toda } z \in \mathbb{D}.$$

Pero, análogamente, $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y alguna subsucesión de $(\varphi f_{\alpha(n)})_{n=1}^\infty$ converge a g en casi todo punto, por lo tanto, $\varphi f \equiv g$. Esto significa que $(f, g) \in G$.

Por el Teorema de la gráfica cerrada (Proposición 2.8), el operador M_φ es acotado.

Finalmente, para $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$|\varphi(z) f(z)| = |\operatorname{eval}_z(M_\varphi(f))| \leq \|evalz\| \|M_\varphi\| \|f\|_2.$$

Luego, para $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ con $\|f\|_2 \neq 0$,

$$|\varphi(z)| \frac{|\operatorname{eval}_z(f)|}{\|f\|_2} \leq \|evalz\| \|M_\varphi\|.$$

Tomando el supremo sobre $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se tiene

$$|\varphi(z)| \leq \|M_\varphi\|, \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Claramente φ debe ser analítica por lo que se concluye que $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$.

□

Operadores de Toeplitz y de Hankel

Al ser $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ un espacio completo, se puede considerar como un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. Luego, por las Proposiciones 2.15 y 2.16 existe una proyección ortogonal $P \colon L^2(\mathbb{D}, dA) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Esta función es llamada la *proyección de Bergman*.

La siguiente proposición indica que la proyección de Bergman P es un operador integral.

5.13 Proposición. *Suponga que $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$. Entonces*

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) dA(w),$$

para toda $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Para f y g in $L^2(\mathbb{D}, dA)$, por definición,

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA(z).$$

Por la propiedad reproductora de $K(z, w) = \overline{h_z(w)}$ se tiene

$$\begin{aligned} Pf(z) &= \langle Pf, h_z\rangle = \langle f, Ph_z\rangle = \langle f, h_z\rangle \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} f(w)\overline{h_z(w)} dA(w) \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} K(z, w) f(w) dA(w). \end{aligned}$$

Así, P es un operador integral en $L^2(\mathbb{D}, dA)$ inducido por el núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. □

5.14 Definición. Dada una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, se define el operador $T\varphi$ en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ por la relación

$$T_\varphi f = P(\varphi f), \quad f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D}).$$

T_φ es llamado el *operador de Toeplitz con símbolo* φ

Usando la representación integral de la proyección de Bergman, se puede escribir a T_φ como un operador integral como sigue:

$$\begin{aligned} T_\varphi f(z) &= \int\limits_{\mathbb{D}} K(z, w)\varphi(w) f(w) dA(w) \\ &= \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w). \end{aligned}$$

Los operadores de Toeplitz cumplen las siguientes propiedades:

5.15 Proposición. *Sean* $a, b \in \mathbb{C}$ *y* $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$, *entonces*

1. *El operador* T_φ *es acotado en* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ *y* $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.
2. $T_{a\varphi + b\psi} = aT_\varphi + bT_\psi$.
3. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

Demostración. Solo se probarán los incisos 1 y 3. El inciso 2 se demuestra de manera análoga al 3.

1. De la Proposición 2.16 se tiene

$$\|T_\varphi f\|^2 = \|P(\varphi f)\|^2 \leq \|\varphi f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)f(w)|^2 dA(w) \leq \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|^2.$$

El resultado se sigue de esta desigualdad.

3. Sean $f, g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, entonces

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi^* f, g\rangle &= \langle f, T_\varphi g\rangle = \langle f, P(\varphi g)\rangle = \langle f, \varphi g\rangle \\ &= \langle \overline{\varphi} f, g\rangle = \langle \overline{\varphi} f, Pg\rangle = \langle P(\overline{\varphi} f), g\rangle \\ &= \langle T_{\overline{\varphi}} f, g\rangle.\end{aligned}$$

Se sigue que $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$

$\square$

5.16 Definición. Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Se define el *operador de Hankel de símbolo* φ como el operador $H_\varphi \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ dado por

$$H_\varphi f = (I - P)(\varphi f),$$

donde P es la proyección de Bergman.

Se puede escribir al operador H_φ como un operador integral como sigue:

$$\begin{aligned}H_\varphi f(z) &= \int_{\mathbb{D}} (\varphi(z) - \varphi(w))K(z, w)f(w)dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{(1 - z\overline{w})^2} f(w)dA(w).\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

La siguiente proposición es análoga al caso de operadores de Toeplitz:

5.17 Proposición. *El operador de Hankel H_φ, con $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ es acotado con* $\|H_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$

Núcleos normalizados y transformada de Berezin

5.18 Definición. Se define el núcleo normalizado k_z, $z \in \mathbb{D}$, como la función dada por

$$k_z(w) = \frac{K(w,z)}{\sqrt{K(z,z)}} = \frac{(1-|z|^2)}{(1-w\overline{z})^2}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Por las propiedades de la Proposición 2.38 se tiene $\|k_z\| = 1$.

5.19 Proposición. *Los núcleos normalizados k_z convergen a 0 débimente cuando $|z| \to 1^-$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $\varepsilon > 0$.

Por la continuidad absoluta de la integral, existe $r \in (0,1)$ tal que

$$\int\limits_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}} |k_z(w)f(w)|dA(w) < \varepsilon/2.$$

Como $K(z,w)$ y $f(w)$ son acotadas cuando w está en compactos de $\mathbb{D}$ existe M tal que $|k_z(w)f(w)| \leq M(1-|z|^2)$, para toda $z \in \mathbb{D}$ y $w \in r\overline{\mathbb{D}}$. Así,

$$\begin{aligned}
|\langle k_z, f\rangle| &= \left|\int\limits_{\mathbb{D}} k_z(w)\overline{f(w)}dA(w)\right| \\
&\leq \int\limits_{r\overline{\mathbb{D}}} |k_z(w)f(w)|dA(w) + \int\limits_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}} |k_z(w)||f(w)|dA(w) \\
&\leq rM(1-|z|^2) + \int\limits_{\mathbb{D}\setminus r\overline{\mathbb{D}}} |k_z(w)||f(w)|dA(w)
\end{aligned}$$

Tomando $\delta > 0$ tal que $|1-|z|| < \delta$ implique $rM(1-|z|^2) < \varepsilon/2$ se tiene

$$|\langle k_z, f\rangle| < \varepsilon.$$

□

Para cada $a \in \mathbb{D}$ se define la función $\varphi_a \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ como

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Se sabe que estas funciones son automorfismos del disco unitario. Más aún, todo automorfismo $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es de la forma $\varphi(z) = e^{i\theta}\varphi_a(z)$, para algún $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Con cálculos directos se pueden demostrar las siguientes propiedades:

5.20 Proposición. *Para $a \in \mathbb{D}$ y $z \in \mathbb{D}$ se tiene $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$. Más aún,*

$$\varphi_a'(z) = -\frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{a}z)^2},$$

y

$$1 - |\varphi_a|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}$$

Como el determinante jacobiano real de una función analítica $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ está dado por $|\varphi'(z)|^2$, se tiene el siguiente cambio de variable como consecuencia de la Proposición anterior.

5.21 Proposición. *Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ o si f es no negativa, entonces*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_a(w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}w|^4} dA(w)$$

5.22 Corolario. *Si $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ o si f es no negativa, entonces*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_a(w) dA(w) = \int\limits_{\mathbb{D}} f(w) |k_a(w)|^2 dA(w)$$

5.23 Definición. Sea T un operador lineal acotado en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Se define la función $\widetilde{T} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ como

$$\widetilde{T}(z) = \langle T k_z, k_z \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

la función $\widetilde{T}$ es llamada la *transformada de Berezin* de T.

5.24 Proposición. *La transformada de Berezin cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si T es autoadjunto, entonces $\widetilde{T}$ es real-valuado.*
2. *$\widetilde{T^*} = \overline{\widetilde{T}}$, esto es, la transformada de Berezin del adjunto T^* es el conjugado de $\widetilde{T}$.*
3. *La función $T \mapsto \widetilde{T}$ es una contracción lineal del espacio de Banach de todos los operadores lineales de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ en $L^\infty(\mathbb{D})$.*

A continuación, se probará una propiedad conocida de esta función. Usaremos el siguiente resultado que puede encontrarse como un ejercicio en [6].

5.25 Lema. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto abierto. Sea $K_j : U \times U \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, tal que $K_j(\cdot, w)$ es analítica para toda w y $K_j(z, \cdot)$ es antianalítica para cada z. Si $K_1(z, z) = K_2(z, z)$, para toda $z \in U$, entonces $K_1 \equiv K_2$.*

5.26 Proposición. *La transformada de Berezin es uno a uno.*

Demostración. Suponga que T es un operador lineal acotado en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $\widetilde{T} = 0$. Como

$$\widetilde{T}(z) = \frac{\langle Th_z, h_z \rangle}{K(z,z)}, \quad z \in \mathbb{D},$$

se cumple entones

$$\langle Th_z, h_z \rangle = 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Considere la función

$$F(z,w) = \langle Th_w, h_z \rangle, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Se puede comprobar que $F(z,w)$ es analítica en z y antianalítica en w y se anula en la diagonal, o sea, $F(z,z) = 0$, para toda $z \in \mathbb{D}$.

Por lo tanto, por el Lema 5.25, F es idénticamente cero.

Por la propiedad de reproducción,

$$F(z,w) = (Th_w)(z), \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Por lo anterior, $Th_w = 0$, para toda $w \in \mathbb{D}$.

Luego, si $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $w \in \mathbb{D}$,

$$T^* f(w) = \langle T^* f, h_w \rangle = \langle f, Th_w \rangle = 0.$$

Por lo tanto, el adjunto $T^* = 0$ y así, $T = 0$.

$\square$

De manera análoga a la transformada de Berezin para operadores, se puede definir la transformada de Berezin para una función $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ interpretando $\langle \quad , \quad \rangle$ como una integral:

$$Bf(z) = \widetilde{f}(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) |k_z(w)|^2 dA(w).$$

5.27 Observación. Por las propiedades de la función φ_z se tiene

$$\widetilde{f}(z) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w) dA(w).$$

5.28 Observación. La transformada de Berezin de una función $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ coincide con la transformada de Berezin del operador de Toeplitz T_φ. Esto se sigue de la representación integral de la relación

$$\widetilde{T_\varphi}(z) = \langle T_\varphi k_z, k_z \rangle = \langle P(\varphi k_z), k_z \rangle = \langle \varphi k_z, k_z \rangle.$$

Los espacios $A^p(\mathbb{D})$

Una generalización natural del espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es la siguiente:

5.29 Definición. Sea $p \in [1, \infty)$. Se define el espacio de Bergman $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ como el espacio de todas las funciones analíticas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w) < \infty.$$

Al igual que $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, los espacios $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ pueden pensarse como subespacios del espacio de Banach $L^p(\mathbb{D}, dA)$.

Así, estos espacios heredan la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w) \right)^{1/p}.$$

Como en el caso de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, los espacios $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ son completos. La demostración de esto es análoga a la dada en ese caso; consúltese, por ejemplo, [11]:

5.30 Proposición. *Los espacios $\mathcal{A}^p(\mathbb{D})$, con $p \in [1, \infty)$ son espacios de Banach.*

De la Proposición 5.13, se puede generalizar la proyección de Bergman a un operador que actúe en $L^p(\mathbb{D}, dA)$ definiendo el operador $P : L^p(\mathbb{D}, dA) \to \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ como el operador dado por

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w), \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

5.31 Lema. *Sea $z \in \mathbb{D}$, $c < 0$ y $t > -1$. Entonces*

$$I_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |w|^2)^t}{|1 - z\overline{w}|^{2+t+c}} dA(w),$$

es acotada para $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Como $t > -1$, la integral $I_{c,t}(z)$ está bien definida para toda $z \in \mathbb{D}$. Sea $\lambda = \frac{1}{2}(2 + t + c)$. Si λ es cero o un entero negativo, entonces claramente $I_{c,t}(z)$ es acotada. En caso contrario, se tiene

$$\frac{1}{(1 - z\overline{w})^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} z^n \overline{w}^n.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\overline{w}|^{2+t+c}} dA(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)} z^n \overline{z}^m \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^t w^m \overline{w}^n dA(w)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} |z|^{2n} \int_0^1 (1-r)^t r^n dr$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+t+2)} |z|^{2n}$$
$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\lambda)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+t+2)} |z|^{2n}.$$

Por la fórmula de Stirling,

$$\frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+t+2)} \sim n^{c-1}, \quad n \to \infty.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{c-1}|z|^{2n}$ es acotada en $z \in \mathbb{D}$ para $c < 0$ se concluye la demostración.

□

5.32 Proposición. *Sea $p \in (1, \infty)$. El operador $P\colon L^p(\mathbb{D}, dA) \to \mathcal{A}^p(\mathbb{D})$ es un operador acotado.*

Demostración. Sea $q = \dfrac{p}{p-1}$. Por el Lema 5.31 la función $h(z) = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{pq}}$ satisface

$$\int_{\mathbb{D}} |K(z,w)| h(w)^q dA(w) \leq Ch(z)^q$$

y

$$\int_{\mathbb{D}} |K(z,w)| h(z)^p dA(z) \leq Ch(w)^p,$$

para alguna constante $C > 0$ y para toda $z, w \in \mathbb{D}$. Luego, por el Teorema de Schur (Proposición 2.12), P es acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA)$.

□

6. El álgebra C^* de operadores de Toeplitz con símbolo continuo en $\overline{\mathbb{D}}$

En esta sección se estudiará el álgebra C^* generada por los operadores de Toeplitz que actúan en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ cuando su símbolo es continuo en $\overline{\mathbb{D}}$. Se denotará esta álgebra por $\mathcal{T}$. El ideal de operadores compactos de $\mathcal{B}(\mathcal{A}^2(\mathbb{D}))$ se denotará por $\mathcal{K}$.

Se definen también los conjuntos

$$C(\overline{\mathbb{D}}) = \{a \colon \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \colon a \text{ es continua}\},$$

$$C(\mathbb{T}) = \{a \colon \mathbb{T} \to \mathbb{D} \colon a \text{ es continua}\}$$

y

$$C_0(\overline{\mathbb{D}}) = \{a \in C(\overline{\mathbb{D}}) \colon a|_{\partial\mathbb{D}} \equiv 0\}.$$

6.1 Observación. De acuerdo a la definición del operador de Toeplitz con símbolo φ en $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$ (*cf.* 5.14), el símbolo debe estar definido en $\mathbb{D}$. Así, al considerar símbolos continuos en $\overline{\mathbb{D}}$ se puede pensar en su equivalente $UC(\mathbb{D})$, el espacio de todas las funciones uniformemente continuas en $\mathbb{D}$.

En efecto, si $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$, a es uniformemente continua por ser $\overline{\mathbb{D}}$ compacto. Recíprocamente, si $a \in UC(\mathbb{D})$, por la Proposición 2.1, a puede extenderse a una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

6.2 Observación. El álgebra C^* $\mathcal{T}$ no es conmutativa. Considere, por ejemplo, los operadores de Toeplitz T_a y T_b, donde a y b son las funciones definidas en $\mathbb{D}$ como $a(z) = z$ y $b(z) = \overline{z}$.

Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Se calculará $T_a(e_m)$ y $T_b(e_m)$. Se tiene

$$T_a(e_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_a(e_m), e_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P(ae_m), e_n \rangle e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle ae_m, e_n \rangle e_n,$$

donde,

$$\begin{aligned}
\langle ae_m, e_n \rangle &= \sqrt{m+1}\sqrt{n+1} \int\limits_{\mathbb{D}} w^{m+1}\overline{w^n} dA(w) \\
&= \frac{\sqrt{m+1}\sqrt{n+1}}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r^{n+m+2} e^{i\theta(m+1-n)} dr d\theta \\
&= \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+2}} \delta_{m+1,n}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$T_a(e_m) = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{m+2}} e_{m+1}.$$

De manera análoga puede verse que

$$T_b(e_m) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+1}} e_{m-1}, \quad m \geq 1,$$

y $T_b(e_0) = 0$.

Por lo tanto,

$$T_a T_b(e_m) = \frac{m}{m+1} e_m$$

y

$$T_b T_a(e_m) = \frac{m+1}{m+2} e_m,$$

para toda $m \in \mathbb{N}_0$. (Note que $T_a T_b(e_0) = 0$).

Esto prueba que los operadores T_a y T_b no conmutan.

No obstante, note que

$$(T_b T_a - T_b T_a)(e_m) = \left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1} \right) e_m = \frac{1}{(m+1)(m+2)} e_m,$$

donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(m+1)(m+2)} = 0.$$

Luego, por la Proposición 2.47 el operador $T_b T_a - T_b T_a$ es compacto.

Esto no es mera coincidencia como se verá posteriormente. El álgebra $C^* \mathcal{T}$ será conmutativa despreciando los operadores compactos. Con esto en mente, se procederá a estudiar la compacidad en $\mathcal{T}$.

6.3 Lema. *Si T es un operador compacto, entonces su transformada de Berezin $\widetilde{T}(z) \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$.*

Demostración. Se tiene

$$|\widetilde{T}(z)| = |\langle T k_z, k_z \rangle| \leq \|T k_z\| \to 0,$$

por las Proposiciones 5.19 y 2.45.

□

6.4 Lema. *Sea $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Entonces $\widetilde{f} \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $\widetilde{f}(z) = f(z)$, para $z \in \partial\mathbb{D}$.*

Demostración. Recuerde que

$$\widetilde{f}(z) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w) dA(w).$$

El integrando puede ser dominado por una constante, luego, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, $\widetilde{f}$ es continua en $\mathbb{D}$,

Por otro lado, sea $z_0 \in \mathbb{D}$. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} \varphi_z(w) = z_0, \quad \forall w \in \mathbb{D}.$$

De nuevo, por el Teorema de Lebesgue,

$$\lim_{z \to z_0} \widetilde{f}(z) = \lim_{z \to z_o} \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w) dA(w) = \varphi(z_0).$$

$\square$

6.5 Proposición. *Sea T_a un operador de Toeplitz con símbolo $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$. Entonces T_a es compacto si y solo si $a(z) = 0$, para toda $z \in \partial\mathbb{D}$.*

Demostración. Suponga que T_a es compacto y sea $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Por la observación 5.28, el Lema 6.4 y el Lema 6.3 se tiene

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \widetilde{f}(z) = \lim_{z \to z_0} \langle T k_z, k_z \rangle = 0.$$

Recíprocamente, suponga que $a(z) = 0$ para $z \in \partial\mathbb{D}$. Sea $\varepsilon > 0$ y defina $a_\varepsilon(z) = a(z)\chi_{(1-\varepsilon)\mathbb{D}}$. Como a es uniformemente continua en $\mathbb{D}$ se tiene $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|a - a_\varepsilon\|_\infty = 0$.

El operador de Toeplitz T_{a_ε} es un operador integral en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ con núcleo $\chi_{(1-\varepsilon)\mathbb{D}}(w)K(z,w)$, el cual es acotado en $\mathbb{D} \times (1-\varepsilon)\overline{\mathbb{D}}$ y, por lo tanto, es un elemento de $L^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$. Luego es un operador de Hilbert-Schmidt y, por la Proposición 3.9, es compacto.

Como $\|T_a - T_{a_\varepsilon}\| = \|T_{a-a_\varepsilon}\| \leq \|a - a_\varepsilon\|_\infty \to 0$, cuando $\varepsilon \to 0$, se sigue que T_a es compacto.
$\square$

6.6 Proposición. *Sea $f \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Para cada $z \in \mathbb{D}$ se tiene*

$$T_f(h_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) h_z$$

y

$$H_f(h_z) = (f - P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) h_z,$$

donde h_z es el núcleo reproductor $h_z(w) = \overline{K(z,w)}$.

Demostración. Basta demostrar la identidad para T_f. Sea $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Por el Corolario 5.22 se cumple

$$\langle (f \circ \varphi_z)h_z, (g \circ \varphi_z)h_z \rangle = h_z(z)\langle f, g \rangle = h_z(z)\langle P(f), g \rangle = \langle (P(f) \circ \varphi_z)h_z, (g \circ \varphi_z)h_z \rangle.$$

Remplazando f por $f \circ \varphi_z$ y g por $(g \circ \varphi_z)/(h_z \circ \varphi_z)$ se obtiene

$$\langle (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z)h_z, g \rangle = \langle f h_z, g \rangle,$$

para cada $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Por lo tanto, $T_f(k_z) = P(fk_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi)h_z$.

□

6.7 Lema. *Para cada $q \in [1, 4/3)$ y $\varepsilon \in (0, 1/4]$ la cantidad*

$$M_{q,\epsilon} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |h_z(w)|^{(1-2\varepsilon)q} h_w(w)^{\varepsilon q} dA(w)$$

es finita.

Demostración. Se sigue del Lema 5.31. □

6.8 Lema. *Sea F una función no negativa en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, $1 < q < \infty$, $p = q/(q-1)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces para cada $z \in \mathbb{D}$*

$$\int_{\mathbb{D}} F(z, \varphi_z(w))|h_z(w)|h_w(w)^{\varepsilon} dA(w) \leq h_z(z)^{\varepsilon} M_{q,\varepsilon}^{1/q} \left(\int_{\mathbb{D}} F(z, w)^p dA(w) \right)^{1/p}.$$

Demostración. La desigualdad se tiene inmediatamente del Corolario 5.22 y la desigualdad de Hölder.

□

6.9 Lema. *Sea $f \in L^{\infty}(\mathbb{D}, dA)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces para toda $z \in \mathbb{D}$*

$$\int_{\mathbb{D}} |(I - P)(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z))| h_w(z)| h_w(w)^{\varepsilon} dA(w) \leq 2M_{1,\varepsilon}^2 \|f\|_{\infty} h_z(z)^{\varepsilon}$$

Demostración. De la Proposición 6.6 se tiene

$$\begin{aligned} |(I - P)(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z))||h_w(z)| = |(Q_f h_w)(z)| &= \left| \int_{\mathbb{D}} (f(z) - f(\zeta)) h_w(\zeta) \overline{h_z(\zeta)} dA(\zeta) \right| \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{D}} |h_w(u)||h_z(u)| dA(\zeta). \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\mathbb{D}} |(I-P)(f\circ\varphi_w)(\varphi_w(z))||h_w(z)|h_w(w)^{\varepsilon} dA(w)$$

$$\leq 2\|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{D}} |h_z(\zeta)| \left(\int_{\mathbb{D}} |h_w(\zeta)|h_w(w)^{\varepsilon} dA(w) \right) dA(\zeta).$$

Aplicando dos veces la desigualdad

$$\int_{\mathbb{D}} |h_w(\zeta)|h_w(w)^{\varepsilon} dA(w) \leq M_{1,\varepsilon} h_u(u)^{\varepsilon}$$

se obtiene lo que se quería. □

6.10 Proposición. *Sea $f \in L^{\infty}(\mathbb{D})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *El operador de Hankel T_f es compacto.*
2. *$\|(I-P)(f\circ\varphi_z)\|_p \to 0$, cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, para alguna $p \in [1,\infty)$.*
3. *$\|(I-P)(f\circ\varphi_z)\|_p \to 0$, cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, para toda $p \in [1,\infty)$.*

Demostración. Escriba $H_f = QM_f$, donde Q es la proyección ortogonal $I-P$.

1) $\Rightarrow$ 2). Suponga que H_φ es compacto. Recuerde los núcleos normalizados $k_z(w) = h_z(w)/h_z(z)$. Por la Proposición 5.19, $k_z \to 0$ débilmente cuando $z \to \partial\mathbb{D}$. Se sigue de la Proposición 2.45 que $\|H_\varphi(k_z)\| \to 0$ cuanto $z \to \partial\mathbb{D}$.

Usando la Proposición 6.6 y el Corolario 5.22 se obtiene

$$\|QM_f(k_z)\|_2 = \|Q(f\circ\varphi_z)\|_2,$$

de donde la conclusión.

2) $\Rightarrow$ 3). Suponga que $\|Q(f\circ\varphi_z)\|_{p_0} \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$ para algún $p_0 \in [1,\infty)$. Sea $p \in [1,\infty)$ arbitrario.

Si $p \leq p_0$, entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\|Q(f\circ\varphi_z)\|_p \leq \|Q(f\circ\varphi_z)\|_{p_0},$$

luego $\|Q(f\circ\varphi_z)\|_p \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$.

Si $p > p_0$, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\|Q(f\circ\varphi_z)\|_p^p \leq \|Q(f\circ\varphi_z)\|_{p_0}^{1/2} \|Q(f\circ\varphi_z)\|_q^{p-1/2},$$

donde $q = p_0(2p-1)/(2p_0-1) > 1$. Por la Proposición 5.32, el operador Q actuando de $L^q(\mathbb{D}, dA)$ en $\mathcal{A}^q(\mathbb{D})$ es acotado por lo que existe una constante C_q tal que

$$\|Q(f \circ \varphi_z)\|_q \leq C_q \|Q(f \circ \varphi_z)\|_q \leq C_q \|f\|_\infty.$$

Por tanto,

$$\|Q(f \circ \varphi_z)\|_p^p \leq (C_q \|f\|_\infty)^{p-1/2} \|Q(f \circ \varphi_z)\|_{p_0}^{p-1/2}$$

y $\|Q(f \circ \varphi_z)\|_p \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Suponga que $\|Q(f \circ \varphi_z)\|_p \to 0$ cuando $z \to \partial\mathbb{D}$, para toda $p \in [1, \infty)$. Se probará que H_f^* es compacto.

Para $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$ se tiene $H_f^*(g) \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Luego, dado $z \in \mathbb{D}$, por la Proposición 6.6,

$$\begin{aligned} H_f^*(g)(z) &= \langle H_f^*(g), h_z \rangle = \langle g, H_f(h_z) \rangle \\ &= \langle g, (Q(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) h_z \rangle \\ &= \int_{\mathbb{D}} g(w) \overline{Q(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z(w) h_z(w)} dA(w). \end{aligned}$$

Para cada $r \in (0,1)$ defina el operador $S_r \colon \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp \to \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ dado por

$$S_r g(z) = \chi_{r\mathbb{D}}(z) \int_{\mathbb{D}} g(w) \overline{Q(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z(w) h_z(w)} dA(w).$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y $g \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})^\perp$.

Los operadores S_r son de Hilbert-Schmidt. En efecto, por el cambio de variable del Corolario 5.22,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} \chi_{r\mathbb{D}}(z) |Q(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w))|^2 |h_z(w)|^2 dA(w) \right) dA(z) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{D}} \chi_{r\mathbb{D}}(z) h_z(z) \|Q(f \circ \varphi_z)\|^2 dA(z) < \infty. \end{aligned}$$

Se probará que H_f^* converge a S_r. Note que

$$((H_f^* - S_r)g)(z) = \int_{\mathbb{D}} H(z,w) g(w) dA(w),$$

donde

$$H(z,w) = \chi_{\mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}}(z) \overline{Q(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w)) h_z(w)}.$$

Sea $h(w) = h_w(w)^{1/4}$, $w \in \mathbb{D}$. Por el Lema 6.9 se tiene

$$\int_{\mathbb{D}} |H(z,w)| h_w(w)^{1/4} dA(w) \leq 2M_{1,1/4} \|f\|_\infty h(w)^{1/4}.$$

Por otro lado, defina $F(z,w) = \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z)|Q(f \circ \varphi_z)(w)|$. Sea $q \in (1, 4/3)$ y $p = \dfrac{q}{q-1}$. Como $|H(z,w)| = F(z, \varphi_z(w))|h_z(w)|$, por el Lema 6.8,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} H(z,w) h_w(w)^{1/4} dA(w) &\leq h_z(z)^{1/4} Mq, 1/4^{1/q} \left(\int_{\mathbb{D}} F(z,w)^p dA(w) \right)^{1/p} \\
&= h_z(z)^{1/4} M_{q,1/4}^{1/q} \chi_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}}(z) \|Q(f \circ \varphi_z)\|_p \\
&\leq h_z(z)^{1/4} M_{q,1/4}^{1/q} \sup\{\|Q(f \circ \varphi_\lambda)\|_p : \lambda \in \mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}\}.
\end{aligned}$$

De estas desigualdades, por el Teorema de Schur (Proposición 2.12), se concluye que

$$\|H_f^* - S_r\|^2 \leq 2M_{1,1/4}^2 M_{q,1/4}^{1/q} \|f\|_\infty \sup_{\lambda \in \mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} \|Q(f \circ \varphi_\lambda)\|_p \to 0, \quad r \to 1^{-1}.$$

$\square$

6.11 Proposición. *Si $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$, entonces el operador de Hankel H_a es compacto.*

Demostración. Usando la Proposición 6.10 se probará que $\|(I - P)(a \circ \varphi_z)\|_2 \to 0$ cuando $|z| \to 1^{-1}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\dfrac{1}{2} > \delta' > 0$ tal que $|\zeta - \eta| < \delta'$ implica $|a(\zeta) - a(\eta)| < \varepsilon$. Defina $\delta = \dfrac{\delta' \varepsilon}{3}$. Entonces $||z| - 1| < \delta$ implica $|z| > \frac{1}{2}$ y, para $w \in (1 - \varepsilon)\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_z(w) - z| &= \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} - z \right| = |z| \left| \frac{z - w}{z - w|z|^2} - 1 \right| \\
&\leq \left| \frac{1 - |z|^2}{z - w|z|^2} \right| \leq \frac{1 - |z|^2}{|z|(1 - w|z|)} \\
&= \left(\frac{1 + |z|}{|z|} \right) \left(\frac{1 - |z|}{1 - w|z|} \right) \\
&\leq 3 \frac{1 - |z|}{1 - |w|} < \frac{3\delta}{\varepsilon} = \delta',
\end{aligned}$$

luego $|a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 < \varepsilon$, cuando $|w| < 1 - \varepsilon$

Así, $\displaystyle\int_{(1-\varepsilon)\mathbb{D}} |a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 dA(w) < \varepsilon$. Y por lo tanto:

$$\int_{\mathbb{D}} |a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 dA(w) = \int_{(1-\varepsilon)\mathbb{D}} |a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\varepsilon)\mathbb{D}} |a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 dA(w)$$
$$\leq \varepsilon + M(2\varepsilon - \varepsilon^2) < (1+2M)\varepsilon,$$

para alguna constante $M > 0$ tal que $|a(\varphi_z(w)) - a(z)|^2 \leq M, \quad \forall w \in \mathbb{D}$.

Esto prueba que $\|a \circ \varphi_z - a(z)\|_2 \to 0$, cuando $|z| \to 1^{-1}$. Como el operador $I - P$ es continuo se tiene $\|(I-P)(a \circ \varphi_z - a(z))\|_2 \to 0$, cuando $|z| \to 1^{-1}$. Esto es,

$$\|(I-P)(a \circ \varphi_z - a(z))\|_2 = \|(I-P)(a \circ \varphi_z)\|_2 \to 0, \quad |z| \to 1^{-1}.$$

□

La Proposición 6.11 brinda mucha información acerca de la conmutatividad en el álgebra $\mathcal{T}/\mathcal{K}$:

6.12 Corolario. *Si $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ y $b \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, entonces*

1. *El operador $T_{ab} - T_a T_b$ es compacto.*
2. *El operador $T_a T_b - T_b T_a$ es compato.*

Demostración.

1. Se tiene $T_{ab} - T_a T_b = PM_a M_b P - PM_a P M_b P = PM_a(I-P)M_b P$, donde M_a y M_b son los operadores de multiplicación por a y por b, respectivamente.

   $PM_a(I-P)$ es el operador adjunto del operador de Hankel $(I-P)M_{\overline{a}}P$ con símbolo $\overline{a}$ continuo en $\overline{\mathbb{D}}$. Por la Proposición 6.11 este último operador es continuo de donde se sigue que $T_{ab} - T_a T_b$ también lo es.

2. Como $T_a T_b - T_b T_a = T_a T_b - T_{ab} + T_{ba} - T_b T_a$, se sigue del inciso anterior que el operador es compacto.

□

6.13 Proposición. *$\mathcal{T}$ es un álgebra C^* irreducible.*

Demostración. Por la Proposición 2.32 basta demostrar que si P es una proyección ortogonal tal que $PT_a = T_a P$ para todo operador de Toeplitz $T_a \in \mathcal{T}$, entonces P es 0 o I. Dada tal proyección defina $g = P1$, función que claramente está en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Para cada $\varphi \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ se tiene

$$P\varphi = PT_\varphi 1 = T_\varphi P1 = T_\varphi g = g \cdot \varphi.$$

Es decir, en el subconjunto denso $C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ de $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$, P actúa como el operador de multiplicación por la función analítica g.

Como P es acotado, puede extenderse a todo $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ (Proposición 2.1). Así, por la Proposición 5.12 la función g es acotada y $Pf = g \cdot f$, para toda $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

La función analítica y acotada g satisface la propiedad

$$g = P1 = P^2 1 = P(P1) = Pg = g^2.$$

Así, $g \equiv 1$ o $g \equiv 0$, o equivalentemente, $P = 0$ o $P = I$, como se quería probar.

□

6.14 Corolario. *El ideal $\mathcal{K}$ está contenido en $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ es un álgebra C^* conmutativa.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 6.12 y la Proposición 4.46.

□

Estos resultados permiten describir el álgebra $\mathcal{T}$ como el conjunto de operadores de la forma $T_a + K$, donde a es una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y K es un operador compacto.

Finalmente, se tiene el enunciado principal, caracterizando al álgebra $\mathcal{T}/\mathcal{K}$:

6.15 Teorema. *$\mathcal{T}/\mathcal{K}$ es un álgebra C^* isomorfa e isométrica a $C(\mathbb{T})$.*

Demostración. Sea $\Psi\colon C(\overline{\mathbb{D}}) \to \mathcal{T}/\mathcal{K}$ dada por $\Psi(a) = T_a + \mathcal{K}$, para cada $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

Claramente Ψ es lineal y preserva las respectivas involuciones; además, por el Corolario 6.12, Ψ es multiplicativa. Se sigue que Ψ es un $*$-homomorfismo.

Por la Proposición 6.5 $\ker \Psi = C_0(\overline{\mathbb{D}})$. Así, Ψ induce un $*$-isomorfismo

$$\psi\colon C(\overline{\mathbb{D}})/C_0(\overline{\mathbb{D}}) \to \Psi(C(\overline{\mathbb{D}})).$$

Como $\mathcal{T}$ es generada por los operadores de Toeplitz con símbolos en $C(\overline{\mathbb{D}})$, el álgebra $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ es generada por los elementos de la forma $T_a + \mathcal{K}$, $a \in C(\overline{\mathbb{D}}))$, es decir, por $\Psi(C(\overline{\mathbb{D}}))$. Siendo este conjunto denso en $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ y ψ una función cerrada se sigue que $\Psi(C(\overline{\mathbb{D}})) = \mathcal{T}/\mathcal{K}$.

Como el álgebra $C(\overline{\mathbb{D}})/C_0(\overline{\mathbb{D}})$ es isomorfa a $C(\mathbb{T})$ vía $a \mapsto a|_{\partial\mathbb{D}}$, se concluye que las álgebras $\mathcal{T}/\mathcal{K}$ y $C(\mathbb{T})$ son isomorfas.

Finalmente, por el Corolario 4.40, se tiene $\|a|_{\partial\mathbb{D}}\|_\infty = \|T_a + \mathcal{K}\|$.

□

Referencias

[1] Conway, J. B. (1997): A Course in Functional Analysis, 2 ed. (corrected fourth printing). Springer Verlag. ISBN: 0-387-97245-5.

[2] Dieudonné, J.(2007): Éléments d'Analyse. Tome I. Fondements de l'Analyse Moderne. Éditions Jacques Gabay. ISBN 987-2-87647-211-2.

[3] Duren, P., Schuster, A.(2004): Bergman Spaces. American Mathematical Society ISBN 0-8218-0810-9.

[4] Halmos, P. R.(1974): Measure Theory. Springer-Verlag. ISBN: 978-1-4684-9440-2

[5] Halmos, P. R., V. S. Sunder(1978): Bounded Integral Operators on L^2 Spaces. Springer-Verlag. ISBN-13:978-3-642-67018-3

[6] Krantz, S. (1992): Function Theory of Several Complex Variables. Second Edition. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software. Pacific Grove, California.

[7] Murphy, G. J. (2015): C*-Algebras and Operator Theory. Academic Press, Inc. Mathematics Departament, University College, Cork, Ireland. ISBN: 0-12-511360-9.

[8] Rudin, W. (1991): Functional Analysis. Second Edition. McGraw-Hill, Inc. ISBN: 0-07-100944-2

[9] K. Stroethoff, D. Zheng (1992): Toeplitz and Hankel Operators on Bergman Spaces Transactions of the American Mathematical Society Volume 329, Number 2, February 1992.

[10] Vasilevski, N. L. (2008): Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space. Birkhäuser Basel. ISBN: 978-3-7643-8725-9.

[11] Zhu, K. H. (1985): Operator Theory in Function Spaces. American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-3965-2.

[12] Zhu, K. H. (1993): An Introduction to Operator Algebras. CRC Press, Inc. ISBN: 0-8493-7875-3.