El operador de multiplicación (Parte 1)

El operador de multiplicación en el espacio de sucesiones cuadrado sumables

Gerardo Ramos Vázquez

CINVESTAV del IPN

Seminario de matrices y operadores

8 de noviembre de 2017

Contenido

- Operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$
  (motivación para el caso infinito-dimensional)
  - Norma
  - Criterio de invertibilidad
  - Espectro
- Operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$
  - Norma
  - Criterio de invertibilidad
  - Espectro

☛ (próxima vez) Operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Matrices diagonales

Sea $a \in \mathbb{C}^n$, definimos $\operatorname{diag}(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como

$$\operatorname{diag}(a) := [\, a_j \delta_{j,k} \,]_{j,k=1}^{n}$$

☛ ej.

Operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$

$(a \in \mathbb{C}^n) \qquad M_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$\boxed{M_a x := \operatorname{diag}(a) x}$$

☛ ej.

Obs: $M_a x = a \odot x$

Algunas **propiedades** del

operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$:

$(OM1)$	$M_a + M_b = M_{a+b}$
$(OM2)$	$\lambda M_a = M_{\lambda a}$
$(OM3)$	$(M_a)^* = M_{\overline{a}}$
$(OM4)$	$\mathrm{I}_{\mathbb{C}^n} = M_{\mathbf{1}_n}$
$(OM5)$	$M_a M_b = M_{a \odot b}$

El operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$ es **acotado**:

$$\| M_a x \|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j x_j|^2 \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} |a_j| \right)^2 \| x \|_2^2,$$

y si $|a_{j_0}| = \max_{1\leq j\leq n} |a_j|$, entonces

$$\| M_a \mathbf{e}_{j_0} \|_2^2 = |a_{j_0}|^2$$

$$\boxed{\| M_a \| = \| a \|_\infty}$$

Invertibilidad del operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$

$$M_a \text{ es invert.} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{diag}(a) \text{ es invert.}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}(a) \text{ es invert.} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\operatorname{diag}(a)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} a_j \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\forall\, j) \quad a_j \neq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{M_a \text{ es invert.} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathrm{R}(a)}$$

Espectro del operador de multiplicación en $\mathbb{C}^n$

$$\mathbf{Sp}(M_a) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; \lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \,\}$$

$$\begin{aligned} \lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \quad &\Leftrightarrow \quad M_{\lambda \mathbf{1}_n - a} \text{ no es invertible} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \in \mathrm{R}(\lambda \mathbf{1}_n - a) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathrm{R}(a). \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Sp}(M_a) = \mathrm{R}(a)}$$

El espacio de **sucesiones cuadrado sumables**

$$\ell^2(\mathbb{N}_0) := \left\{ x = (x_j)_{j=0}^{\infty} \ : \ \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty \right\}$$

Operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

(a sucesión acotada) $\qquad M_a : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$

$$\boxed{M_a x := a \odot x = (a_j x_j)_{j=0}^{\infty}}$$

☛ M_a está **bien definido** (¿por qué?)

Algunas **propiedades** del

operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$:

$(OM1)$	$M_a + M_b = M_{a+b}$
$(OM2)$	$\lambda M_a = M_{\lambda a}$
$(OM3)$	$(M_a)^* = M_{\overline{a}}$
$(OM4)$	$\mathrm{I}_{\ell^2(\mathbb{N}_0)} = M_{\mathbf{1}}$
$(OM5)$	$M_a M_b = M_{a \odot b}$

Norma del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

$$\| M_a x \|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j x_j|^2 \leq \| a \|_\infty^2 \| x \|_2^2.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Existe j_0 tal que

$$\| M_a \mathbf{e}_{j_0} \|_2 = |a_{j_0}| > \| a \|_\infty - \varepsilon.$$

$$\boxed{\| M_a \| = \| a \|_\infty}$$

⚠

T es **acotado** e **invertible**

$$(\exists\, \delta)(\forall\, x) \quad \|\, x \,\|_2 = 1 \implies \|\, Tx \,\|_2 > \delta$$

T **no** es invertible cuando

$$(\forall\, \varepsilon)(\exists\, x) \quad (\, \|\, x \,\|_2 = 1 \,) \wedge (\, \|\, Tx \,\|_2 < \varepsilon \,)$$

Invertibilidad del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

$$\begin{aligned} M_a \text{ es invert.} \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\, \delta)(\forall\, j) \quad \|\, M_a \mathbf{e}_j \,\|_2 > \delta \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists\, \delta) \qquad \inf_{j\in\mathbb{N}_0} |a_j| \geq \delta > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{M_a \text{ es invert.} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \overline{\mathrm{R}(a)}}$$

Espectro del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

$$\mathbf{Sp}(M_a) := \{\, \lambda \in \mathbb{C} \;:\; \lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \,\}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\,\mathrm{I} - M_a \text{ no es invertible} \quad &\Leftrightarrow \quad M_{\lambda\mathbf{1}-a} \text{ no es invertible} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \in \overline{\mathrm{R}(\lambda\mathbf{1} - a)} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda \in \overline{\mathrm{R}(a)}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{Sp}(M_a) = \overline{\mathrm{R}(a)}}$$

Referencias

Rudin, Conway, Kreyszig, ...

en la sección de ejercicios de casi

cualquier libro básico de análisis funcional.

¡Gracias!