

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

La transformada de ondícula continua y algunas clases de operadores de localización

Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias fisicomatemáticas

Gerardo Ramos Vázquez

Director de tesis:

Dr. Egor Maximenko

México, D.F. Diciembre de 2016



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS Y DESIGNACIÓN DE DIRECTOR DE TESIS

México, D.F. a 05 de Junio del 2015

(PN

Ord	olegio de Profesores de Estudios linaria No. 19 celebrada el entada por el(la) alumno(a): Ramos Apellido paterno		
Aspi	Se designa al aspirante el tema		máticas clases de operadores de localización"
De r	manera general el tema abarcara		
		Se anexa hoja	1
2	Se designa como Director de T	esis al Profesor: Dr. Egor Maxime	nko
3		e para el desarrollo de l Departamento de Mate	la tesina será elaborado por el alumno en: emáticas
que	cuenta con los recursos e infrae	estructura necesarios.	
4		e se suscribe la prese	arrollados en el área de adscripción del cente hasta la aceptación de la tesis por
		Director(a) de T	Γesis
	Aspirante	Dr. Egor Maxim	Presidente del Colegio
	Gerardo Ramos Vá	zquez	Dr. Miguel Luffio Velazquez
			*OSGRADO E INVESTIGACIÓ:



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de	México	siendo las	14:00	horas d	lel día	, —	16	_ del ı	mes	de
Noviembre del	2016 se reunieron	los miembros d	e la Comisi	ón Revis	sora d	ie la ¯	Tesis:	, desi	gnad	da
por el Colegio de F	Profesores de Estudio	s de Posgrado	e Investigad	ción de _			la E	SFM		
para examinar la te										
"La transfor	mada de ondícula co	ontinua y algur	as clases	de oper	ador	es de	· loca	ilizac	ión'	,
Presentada por el(la) alumno(a):									
Ramos		Vázquez			Gera	_				
Apellido patern	io A	pellido materno			No	mbre	·			
			Con regist	ro: B	1	4	1	2	5	5
aspirante de:										
	Maestría e	n Ciencias Fis	icomatemá	áticas						
	ambiar opiniones, los									ESIS
en virtud de que sa	atisface los requisitos	señalados por l	as disposio	ciones re	glame	entari	as vi	gente	S.	
	1.4	COMISIÓN F	EVICODA							
	LA	COMISION F	EVISORA	`						
		Director(a) d	e tesis							
		. ,								
		Dr. Egor M	aximenko							
		Dit Egoi III	uximente				Į.			
			-							
Dr. José	María Rocha Martín	iez		Dr. Alin	Andr	ei Ca	rste	anu		
•		_								
Dr. Luis/1	Manuel Tovar Sánch	ez	Dr. Jo	sé- 0 ≰c	ar Go	nzál	ez Ce	ervan	tes	
\ /	DDECIDENT	E DEL COLEG	IO DE DDO)EECO D	K.K.	ta				
/	PRESIDENT	E DEL COLEG	IO DE PRO	JE SUB	-	37				
						W.				
				est land		A.				
				*52						
	Dra.	Concepción M	lejía García	ESCUELA!	ore Superi	OR DW				
				FISICAYM						
				ECCIONDI						
			F(1)	SCRADOF	INVECT	DEACT	(13)			



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F. el día 18 del mes de noviembre del año 2016, el que suscribe, Gerardo Ramos Vazquez, alumno del Programa de Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas, con número de registro B141255, adscrito a la Escuela Superior de Física y Matemáticas, manifiesto que soy el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Egor Maximenko y cedo los derechos del trabajo titulado "La transformada de ondícula continua y algunas clases de operadores de localización" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones:

ramosgt@hotmail.com

egormaximenko@gmail.com

Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Gerardo Ramos Vazquez

Abstract

This work is about the continuous wavelet transform and localization operators. First, we show some properties of the positive affine group and its action on $L^2(\mathbb{R})$. Then, we introduce the continuous wavelet transform in detail, and we prove its isometric property and the reproduction formula for the wavelet transform. In the last part, we study localization operators. In particular, for the case when the generating symbol depends only on the scaling coordinate, we present some recent results by Hutník, Hutníková, Maximenko and Mišková: the diagonalization of these operators, explicit formulas for their norms and spectra, and the full description of the C*-algebra generated by these operators.

Resumen

Este trabajo es sobre la transformada de ondícula continua y los operadores de localización. Primero se muestran algunas propiedades del grupo afín positivo y se presenta su acción en $L^2(\mathbb{R})$. Luego se introduce la transformada de ondícula continua, se demuestra su propiedad isométrica y se deduce la fórmula de reconstrucción para la transformada de ondícula. En la última parte, se estudian los operadores de localización. En particular, para el caso en el que el símbolo generador sólo depende del parámetro de escalamiento, se presentan resultados recientes de Hutník, Hutníkivá, Maximenko y Mišková: la diagonalización de estos operadores, fórmulas explícitas para sus normas y espectros, y se hace una descripción completa del álgebra C^* generada por estos operadores.

Agradecimientos

Agradezco de manera muy especial al Dr. Egor Maximenko por su gran enseñanza.

Este trabajo de tesis fue apoyado por la Beca CONACyT, por la Beca Institucional Tesis Maestría (IPN) y por el proyecto de investigacin IPN-SIP 20160733.

Índice general

Pı	efaci	O	1
In	$\operatorname{trod}_{\mathfrak{l}}$	ucción	5
1.	El g	grupo afín positivo	7
	1.1.	Transformaciones afines	8
	1.2.	El grupo afín positivo	14
	1.3.	Otras representaciones del grupo afín positivo	18
	1.4.	Acción del grupo afín positivo sobre $L^2(\mathbb{R})$	20
	1.5.	Medidas de Haar sobre el grupo afín positivo	24
2.	La t	transformada de ondícula continua	27
	2.1.	La transformada de ondícula continua	28
	2.2.	Propiedad isométrica de la transformada de ondícula	32
	2.3.	Ondículas	35
	2.4.	Isometrías lineales	40
	2.5.	Estados coherentes y núcleos reproductores	45
	2.6.	La imagen de la transformada de ondícula	48
	2.7.	La transformada inversa de ondícula	50
	2.8.	Factorización del operador \mathcal{W}_{Ψ} y la proyección ortogonal	56
3.	Los	operadores de localización	61
	3.1.	Los operadores de localización	62
	3.2.	Diagonalización del operador de localización	68
	3.3.	Un ejemplo numérico	73
	3.4.	El álgebra C* generada por operadores de localización con símbolos en $\Lambda(\mathbb{G})$	80
$\mathbf{A}.$	La t	transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$	91

	A.1.	La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$	92
	A.2.	La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	94
	A.3.	Densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$	96
	A.4.	La extensión de la transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R})$	97
	A.5.	Los operadores de conjugación y reflexión	98
В.	El r	ango esencial	101
	В.1.	Definición y propiedades topológicas	102
	B.2.	Rango esencial de funciones continuas	105
	В.3.	Rango esencial y supremo esencial	106
	B.4.	Rango esencial y operadores aritméticos	108
	B.5.	Aplicaciones	109
C.	El o	perador de multiplicación	111
	C.1.	El operador de multiplicación en \mathbb{C}^n	112
	C.2.	El operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$	117
	C.3.	El operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$	124
D.	Sob	re las convoluciones	133
	D.1.	Sobre las funciones uniformemente continuas	134
	D.2.	Densidad de la imagen del operador de convolución en $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$	137
Bil	oliog	grafía	142

Prefacio

¿Transformada de ondícula? ¿De qué va todo esto?¹

Alrededor de nosotros hay señales² presentes todo el tiempo, y algunas de ellas necesitan ser analizadas o decodificadas. Un sismo, una voz, la vribración de un motor, algunos datos financieros, la música, una imagen en la computadora son algunos tipos de señales con las que interactuamos a diario. La *codificación* puede ser la transmisión de una señal en la radio, o la manera en que una cámara fotográfica digital guarda la información de una imagen que posteriormente podemos ver en la computadora³.

Uno de los problemas más grandes que presentan los artefactos encargados de analizar las señales es la pérdida de información debida al proceso de codificación, transportación y decodificación de una señal. Por ejemplo, una melodía producida por un instrumento musical es grabada mediante un micrófono, es decir, el sonido (una señal formada por vibraciones en el aire) es traducido a una señal eléctrica, conducida a su vez a una bocina encargada de producir sonidos a partir de dicha señal. El entorno, el micrófono y la bocina aportan factores que hacen que la señal original no sea igual a la que es producida. Pero no sólo los factores físicos afectan el resultado, también el proceso de traducción lo hace y es justo este problema el que abordamos aquí, por tratarse de un algoritmo en el que, claro, intervienen las matemáticas.

Esta traducción a la que me refiero es el tratamiento de la información contenida en una señal, por ejemplo, una codificación para un banco, una compresión de un archivo, un

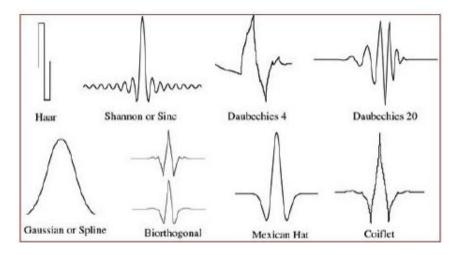
¹Este texto contiene algunas ideas planteadas en el manual Wavelet Toolbox, for use with MATLAB, User's Guide ver. 1 (1996), Misiti, M; Misiti, Y; Oppenheim, G; Poggi, J; The MathWorks, Inc., Massachusetts.

²Con *señal* me refiero a un medio de transporte de datos, sea en forma de onda por el aire o por medios electrónicos, y no a las premoniciones ni visiones que algunas personas dicen tener.

³El archivo que la cámara guarda en la memoria no es propiamente una imagen sino una cadena de *bits* que la computadora traduce en pixeles al momento de ejecutar el archivo, y por lo tanto decodifica la información guardada en la memoria de la cámara.

filtro de ruido, la reconstrucción de una imagen, la limpieza, descripción, simplificación, modelado, distinción o localización de toda o algunas partes de una señal. El análisis de ondículas es un conjunto de nuevas y prometedoras herramientas y técnicas para hacer esta tarea.

Durante más de un siglo (de 1830 a 1980) el desarrollo del análisis de señales estuvo estrechamente relacionado con el estudio de la transformada de Fourier. El análisis de Fourier plantea la idea original de romper una señal en ondas sinuidales o sinusoides de varias frecuencias. Su objetivo es reemplazar el estudio de una señal arbitraria por el de un conjunto de ondas perfectamente estudiadas. La idea es retomada por la transformada de ondícula continua de la siguiente manera: primero se elige una onda especial y después la señal se descompone en versiones dilatadas y trasladadas de ésta. Dicha onda especial se denomina ondícula (en inglés wavelet) y es una forma ondulada de duración efectiva limitada que tiene valor promedio cero. A la ondícula original le llamamos ondícula madre y al resultado de trasladarla, aplastarla, estirarla y dejarla caer le llamamos ondícula hija. A continuación se presentan varios tipos de ondículas:



Al comparar imágenes de ondículas con sinusoides se puede ver intuitivamente que las señales con cambios abruptos de forma deberían ser analizados mejor con una onda irregular (una ondícula) en vez de una onda cuya forma perdura a lo largo del tiempo (una sinusoide), al igual que cierta comida puede ser mejor cortada con un tenedor que con una cuchara. Donde las sinusoides son suaves y predecibles, las ondículas son irregulares y en ocasiones, asimétricas.

El análisis de Fourier tiene un grave inconveniente: al transformar una señal al dominio de las frecuencias, la información acerca del tiempo se pierde. Observando la transformada de Fourier de una señal es imposible saber cuándo tuvo lugar cierto evento. Si la señal no cambia mucho a lo largo del tiempo (es decir, es una señal estacionaria), este inconveniente no es importante. Sin embargo, la mayoría de las señales contienen numerosas características no estacionarias o transitorias: desviaciones, cambios abruptos, discontinuidades y eventos que inician y terminan a lo largo de su vida. Estas características son generalmente las partes más importantes de una señal, y el análisis de Fourier no puede percibirlos. Existen otras técnicas como el análisis de Gabor con ventanas (time-frequency analysis), que resuelven algunos problemas, pero, hasta ahora, no de la forma en que el análisis de ondículas lo hace.

La transformada de ondícula continua es capaz de revelar aspectos de datos que otras técnicas de análisis de señales pierden, como tendencias, saltos, puntos de ruptura, discontinuidades y autosimilitud. Más aún, gracias a que ofrece un panorama diferente al que presentan las técnicas tradicionales, el análisis de ondículas puede en ocasiones comprimir o quitar el ruido a una señal sin pérdidas apreciables o significativas. De hecho, en su (relativamente) breve historia, las ondículas han probado ser una herramienta indispensable para un analista de señales.

El trabajo de la transformda de ondícula continua es ajustar a cada punto de la señal la ondícula hija que más se le parece. Al final, habremos reconstruido la señal uniendo una infinidad de ondículas trasladadas y dilatadas a la medida de cada punto en dicha señal. Ganamos algo: mientras que la señal es una función cuyas propiedades son realmente im-

predecibles (discontinuidades, saltos abruptos, coyunturas suaves y demás), cuya fórmula (si es que la tiene) puede no expresarse en términos de las funciones elementales del álgebra, de la trigonometría o del cálculo, las ondículas tienen muchas de las propiedades deseables para su análisis, es decir, de cierta forma son señales ideales. Para analizar una señal en cierto instante, será suficiente estudiar las ondículas hijas que más se le parecen en dicho instante.

Pongo como ejemplo aquellas imágenes en afiches que están formadas (uno tiene que acercarse mucho para verlo) de miles de pequeñas imágenes que son diferentes a la que forman en conjunto. Otra idea para ilustrar el trabajo de la transformada de ondícula de manera intuitiva es la sobreposición de una misma melodía en diferentes momentos. Explico: tomemos una melodía sencilla para interpretar con cualquier instrumento, por ejemplo, la conocida tonada de happy birthday. Esta misma melodía puede ser tocada a diferentes velocidades y en diferentes tonos por cada instrumento de la orquesta. Supongamos que tenemos una orquesta formada por miles y miles de músicos, a cada uno de ellos se le ha indicado tocar dicha tonada con una velocidad y un tono particular en un momento determinado. Entonces, ordenando adecuadamente los momentos en que cada músico debe ejecutar la melodía, es posible escuchar La Quinta Sinfonía de Beethoven. Ninguno de los músicos tocará propiamente esta sinfonía, sin embargo, la sobreposición de todos los sonidos producidos derá como resultado la obra mencionada.

En conclusión, la transformada de ondícula continua es una herramienta novedosa que echa mano de la aproximación de funciones y tiene como ventaja sobre las técnicas tradicionales, entre otras cosas, el poder localizar en el dominio del tiempo los diferentes eventos que ocurren a lo largo de la vida de una señal.

Gerardo Ramos Vázquez
Ciudad de México
Diciembre 2016

Introducción

En este trabajo se estudian la transformada de ondícula continua y su propiedad isométrica, y la clase de los operadores de localización asociados a ésta. Para cierta subclase se muestra su diagonalización, y para ondículas relacionadas con funciones de Laguerre, se prueba que el álgebra C^* generada por los operadores de localización asociados a éstas y cuyo símbolo depende sólo del parámetro de escalamiento, es isométricamente isomorfa al álgebra C^* de las funciones uniformemente continuas en \mathbb{R} .

De la teoría de aproximación es sabido que dada una señal, ésta puede descomponerse en una suma de polinomios trigonométricos a través de la transformada de Fourier. Una de las desventajas de ésta es que, aunque pueden determinarse todas las frecuencias presentes en la señal, no se puede saber en qué momento tiene cierta frecuencia particular, es decir, no se puede localizar una la frecuencia en un momento determinado. La transformada de ondícula, desarrollada en las últimas décadas, ha logrado reparar este problema reconstruyendo una señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia a la vez.

En el Capítulo 1 se introduce el grupo afín positivo y su acción sobre $L^2(\mathbb{R})$. Se describen además diferentes representaciones de éste, y finalmente, se le dota de dos medidas invariantes bajo traslaciones, una por la derecha y otra por la izquierda. Parte del material contenido en este capítulo puede encontrarse generalizado en [Rotman]. La acción del grupo afín sobre $L^2(\mathbb{R})$ y la fórmula para la medida invariante bajo traslaciones por la izquierda, se encuentran en los artículos [HutMaxMis, HutHut, Wong1] y en los libros [GasWit, GroMorPau, Wong2, PerWar].

En el Capítulo 2 se presenta la transformada de ondícula continua W_{Ψ} relacionada con la ondícula admisible Ψ . Se establece además su relación con la transformada de Fourier y se demuestra su propiedad isométrica. Se presenta un ejemplo numérico para ilustrar el resultado de aplicar la transformada de ondícula en una función dada. De manera independiente se estudian las propiedades de las isometrías lineales, los sistemas de estados coherentes

y los espacios con núcleo reproductor, y los resultados principales son aplicados al caso particular del espacio de transformadas de ondícula. Se muestra también la fórmula de reproducción y finalmente se estudia la proyección ortogonal inducida por el operador \mathcal{W}_{Ψ} . El contenido de este capítulo está basado en [GasWit, PerWar, Wong2, Daub, GroMorPau]. Cabe mencionar que, aunque son muchos los libros que abordan el tema de la transformada de ondícula, pocos son los que detallan su inversión. La sección que aborda este tema está esencialmente basada en la demostración de la fórmula de reproducción en [GasWit]. Como complemento, y debido a que la transformada de Fourier se utiliza frecuentemente en los resultados mostrados en este trabajo, el Apéndice A trata sobre la extensión de la transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R})$.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de los operadores de localización. Se revisan las propiedades básicas de los operadores de Toeplitz—Calderón y de localización, y se ilustra el sentido de este último mediante ejemplos numéricos. Se presenta también el resultado en [HutHut] sobre la diagonalización de los operadores de localización cuyos símbolos generadores dependen solamente de la primera coordenada. El rango esencial y la norma de los operadores de multiplicación (que surgen de manera natural en este resultado) son estudiados en los Apéndices B y C. Se comparan de manera numérica los resultados de aplicar un operador de localización asociado a la ondícula sombrero mexicano y cuyo símbolo generador sólo depende del factor de escalamiento, primero de acuerdo con su definición y después utilizando la función espectral resultante de la diagonalización de dicho operador.

El resultado más sustancial de este capítulo está basado en [HutMaxMis] y trata sobre la descripción del álgebra C^* generada por los operadores de localización cuyos símbolos sólo dependen del parámetro de escalamiento: bajo la hipótesis de que cierta función satisface la condición de Wiener, se aplica la técnica de deconvolución de Wiener (ver Apéndice D), y se demuestra que el álgebra C^* generada por este tipo de operadores es isométricamente isomorfa al álgebra C^* de las funciones uniformemente continuas en \mathbb{R} . Finalmente esta condición se verifica para el caso de ondículas asociadas a funciones de Laguerre.

Capítulo 1

El grupo afín positivo

En este capítulo estudiaremos las estructuras algebraicas de las traslaciones y dilataciones (cambios de escala) en \mathbb{R} . La combinación de éstas dará lugar a las transformaciones afines. En la Sección 1.1 mostramos que el conjunto de las transformaciones afines forma un grupo, el cual puede verse como el producto semidirecto de los grupos de traslaciones y dilataciones positivas. En la Sección 1.2 nos concentramos en el estudio del grupo \mathbb{G} , una de las representaciones del grupo afín positivo. En la Sección 1.3 enunciamos las representaciones matricial y compleja del grupo afín positivo. A continuación, en la Sección 1.4, estudiaremos una acción del grupo \mathbb{G} en $L^2(\mathbb{R})$. Allí mismo se muestra con un ejemplo la acción definida en esta sección sobre una función particular. Finalmente, en la Sección 1.5, se dota al grupo afín positivo de dos medidas invariantes bajo traslaciones, una por la derecha y otra por la izquierda.

Parte del material contenido en este capítulo puede encontrarse generalizado en [Rotman]. La acción descrita en la Sección 1.4 y la primer medida descrita en la Sección 1.5, se encuentran de forma resumida en [GasWit, GroMorPau, Wong2, PerWar, Wong1]. Las definiciones estándares sobre las acciones de grupos pueden encontrarse en casi cualquier libro sobre teoría elemental de grupos, por ejemplo, en [Lang Al].

1.1. Las traslaciones, dilataciones positivas y transformaciones afines positivas en \mathbb{R}

Las traslaciones en \mathbb{R}

Una traslación es, por supuesto, un cambio de lugar. Revisaremos a continuación las propiedades y estructura alegebraica que tienen estas transformaciones. Las traslaciones son uno de los dos componentes esenciales de las transformaciones afines positivas.

Definición 1.1 (Traslación). Sea $a \in \mathbb{R}$, la traslación de a es la aplicación $T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $T_a(u) = a + u$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Observación. De acuerdo con lo anterior, es fácil verificar las siguientes propiedades:

- a) $T_0 = \mathrm{Id}$.
- b) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $T_a \circ T_b = T_{a+b}$.
- c) Para todo $a \in \mathbb{R}, T_a^{-1} = T_{-a}$.
- d) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $T_a(0) = a$.

A continuación se presentan algunos resultados relativos a las traslaciones en R.

Proposición 1.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a \neq b$ implica que $T_a \neq T_b$.

Demostración. Como $T_a(x) = T_b(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular para x = 0 se tiene que $a = a + 0 = T_a(0) = T_b(0) = b + 0 = b$.

Denotemos por \mathbb{T} al conjunto de las traslaciones en \mathbb{R} , esto es,

$$\mathbb{T} := \{ T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : a \in \mathbb{R} \}.$$

Proposición 1.3 (Las traslaciones en \mathbb{R} forman un grupo abeliano) El conjunto \mathbb{T} es un grupo abeliano respecto a la composición.

Demostración. Tenemos que

- a) Es cerrado bajo $\circ: T_a \circ T_b = T_{a+b} \in \mathbb{T}$.
- b) Es asociativo:

$$(T_a \circ T_b) \circ T_c = T_{(a+b)+c} = T_{a+(b+c)} = T_a \circ (T_b \circ T_c).$$

- c) T_0 es el elemento neutro: $T_0 \circ T_a = T_a \circ T_0 = T_a$.
- d) El inverso de T_a es T_{-a} :

$$T_a \circ T_{-a} = T_a \circ T_a^{-1} = \text{Id} = T_0.$$

e) Es abeliano:
$$T_a \circ T_b = T_{a+b} = T_{b+a} = T_b \circ T_a$$
.

Proposición 1.4 (Unicidad de las traslaciones)

Dados $u, v \in \mathbb{R}$, existe una única traslación que hace corresponder u con v.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $T_a(u) = T_b(u) = v$. Entonces a + u = b + u, de donde a = b. Además $T_{v-u}(u) = (v - u) + u = v + (-u + u) = v$.

Las dilataciones positivas en $\mathbb R$

Una dilatación es un cambio de tamaño. El término dilatación es quizás un abuso del lenguaje pues en la física nos referimos con esto tan sólo al aumento de la talla de los metales, por ejemplo, resultado del aumento de la temperatura. Aquí lo utilizaremos para señalar un cambio de tamaño sin importar si el resultado es más grande o más pequeño que el original. Lo que determinará el resultado de la transformación será el parámetro de escalamiento, que en la siguiente definición es representado por λ .

Nos limitaremos al estudio de las dilataciones donde el parámetro de escalamiento sea un número real positivo. Al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ lo denotamos por \mathbb{R}^+ . Revisaremos en seguida algunas de las propiedades algebraicas de las dilataciones positivas en \mathbb{R} .

Definición 1.5 (Dilatación positiva). Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la dilatación positiva por λ es la aplicación $\tau_{\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\tau_{\lambda}(u) = \lambda u$, para todo $u \in \mathbb{R}$. En tal caso llamamos a λ el parámetro de escalamiento.

Observación. Algunas de las propiedades aritméticas de las dilataciones positivas se enuncian a continuación.

- a) $\tau_1 = \mathrm{Id}$.
- b) Si $\lambda, \delta \in \mathbb{R}^+$, entonces $\tau_{\lambda} \circ \tau_{\delta} = \tau_{\lambda \delta}$.
- c) Para toda $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\tau_{\lambda}(0) = 0$. Éste es el único punto fijo para todas las dilataciones positivas.
- d) Para toda $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\tau_{\lambda}^{-1} = \tau_{\lambda^{-1}}$. Luego, τ_{λ} es biyectiva.
- e) Para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tau_{\lambda}(1) = \lambda$.

Se tienen además los siguientes resultados.

Proposición 1.6. Sean $\lambda, \delta \in \mathbb{R}^+$, entonces $\lambda \neq \delta$ implica que $\tau_{\lambda} \neq \tau_{\delta}$.

Demostración. Si $\tau_{\lambda}(x) = \tau_{\delta}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces en particular para x = 1 se tiene que $\lambda = \lambda \cdot 1 = \tau_{\lambda}(1) = \tau_{\delta}(1) = \delta \cdot 1 = \delta$.

Ahora denotemos por \mathbb{D} al conjunto de las dilataciones positivas en \mathbb{R} , es decir,

$$\mathbb{D} := \left\{ \tau_{\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Proposición 1.7 (Las dilataciones positivas en \mathbb{R} forman un grupo abeliano) El conjunto \mathbb{D} es un grupo abeliano respecto a la composición. Demostración. Tenemos que

- a) Es cerrado bajo $\circ : \tau_{\lambda} \circ \tau_{\delta} = \tau_{\lambda\delta} \in \mathbb{D}$.
- b) Es asociativo:

$$\tau_{\lambda} \circ (\tau_{\delta} \circ \tau_{\gamma}) = \tau_{\lambda(\delta\gamma)} = \tau_{(\lambda\delta)\gamma} = (\tau_{\lambda} \circ \tau_{\delta}) \circ \tau_{\gamma}.$$

- c) τ_1 es el elemento neutro: $\tau_1 \circ \tau_\lambda = \tau_\lambda \circ \tau_1 = \tau_\lambda$.
- d) El inverso de τ_{λ} es $\tau_{\lambda^{-1}}$:

$$\tau_{\lambda} \circ \tau_{\lambda}^{-1} = \tau_{\lambda} \circ \tau_{\lambda^{-1}} = \mathrm{Id} = \tau_{1}.$$

e) Es abeliano: $\tau_{\lambda} \circ \tau_{\delta} = \tau_{\lambda\delta} = \tau_{\delta\lambda} = \tau_{\delta} \circ \tau_{\lambda}$.

Proposición 1.8 (Unicidad de las dilataciones positivas en \mathbb{R}).

- a) Dados $u, v \in \mathbb{R}^+$ existe una única dilatación positiva que hace corresponder u con v.
- b) Dados $u, v \in \mathbb{R}^- :=]-\infty, 0[$, existe una única dilatación positiva que hace corresponder u con v.
- Demostración. a) Como $u, v \in \mathbb{R}^+$, entonces $v/u \in \mathbb{R}^+$, luego $\tau_{v/u}(u) = (v/u)u = v$. Sean $\lambda, \delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $\tau_{\lambda}(u) = \tau_{\delta}(u) = v$. Entonces $\lambda u = \delta u$, de donde $\lambda = \delta$.
 - b) Como $u, v \in \mathbb{R}^-$ entonces $v/u \in \mathbb{R}^+$, luego $\tau_{v/u}(u) = (v/u)u = v$. La unicidad se demuestra igual que en el caso anterior.

Note que si, por ejemplo, $u \in \mathbb{R}^+$ y $v \in \mathbb{R}^-$, ninguna dilatación positiva hace corresponder a u con v ni viceversa.

Como consecuencia de los resultados anteriores, las dilataciones son automorfismos en \mathbb{R} . La aplicación $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbf{Aut}(\mathbb{R})$ dada por $\phi(\lambda) = \tau_{\lambda}$ define un homomorfismo. Además se tiene que cualquier dilatación es una transformación lineal. Esto no sucede con las traslaciones.

Las transformaciones afines positivas en $\mathbb R$

Ahora juntemos las dos herramientas anteriores en una sola: una transformación afín es aquella que dilata y traslada. En el siguiente capítulo aplicaremos traslaciones y dilataciones a ciertas funciones para que localmente se parezcan a alguna señal dada. De manera natural podemos definir una transformación afín positiva como la composición de una dilatación positiva con una traslación.

Definición 1.9 (Transformación afín positiva). Sean $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$. Definimos la transformación $A_{\lambda,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $A_{\lambda,a} = T_a \circ \tau_{\lambda}$, así para todo $x \in \mathbb{R}$, $A_{\lambda,a}(x) = \lambda x + a$. Llamamos a ésta una transformación afín positiva. En tal caso, λ es el parámetro de dilatación y a es el parámetro de traslación.

Observación. Dos transformaciones afines positivas se componen de la siguiente manera:

$$A_{\lambda,a} \circ A_{\delta,b} = A_{\lambda\delta,a+\lambda b}. \tag{1.1}$$

En efecto, para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$A_{\lambda,a} \circ A_{\delta,b}(u) = A_{\lambda,a}(\delta u + b) = \lambda(\delta u + b) + a = (\lambda \delta)u + (a + \lambda b) = A_{\lambda \delta,a + \lambda b}(u).$$

Denotemos ahora por \mathbb{A} al conjunto de transformaciones afines positivas en \mathbb{R} , esto es,

$$\mathbb{A} := \left\{ A_{\lambda, a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposición 1.10 (Las transformaciones afines positivas en \mathbb{R} forman un grupo) El conjunto \mathbb{A} es un grupo respecto a la composición.

Demostración. Tenemos que

- a) Es cerrado bajo $\circ: A_{\lambda,a} \circ A_{\delta,b} = A_{\lambda\delta,a+\lambda b} \in \mathbb{A}$.
- b) Es asociativo:

$$A_{\lambda,a} \circ (A_{\delta,b} \circ A_{\gamma,c}) = A_{\lambda(\delta\gamma),a+\lambda(b+\delta c)} = A_{(\lambda\delta)\gamma,(a+\lambda b)+(\lambda\delta)c} = (A_{\lambda,a} \circ A_{\delta,b}) \circ A_{\gamma,c}.$$

- c) $A_{1,0}$ es el elemento neutro: $A_{1,0}\circ A_{\lambda,a}=A_{\lambda\cdot 1,a+\lambda\cdot 0}=A_{\lambda,a}.$
- d) El inverso de $A_{\lambda,a}$ es $A_{1/\lambda,-a/\lambda}$:

$$A_{\lambda,a} \circ A_{\lambda,a}^{-1} = A_{\lambda,a} \circ A_{1/\lambda,-a/\lambda} = A_{\lambda/\lambda,a+\lambda(-a/\lambda)} = A_{1,0}.$$

A diferencia de \mathbb{T} y \mathbb{D} , el grupo \mathbb{A} no es abeliano. El grupo \mathbb{A} es conocido como el grupo afín positivo en \mathbb{R} o el grupo Ax + B.

1.2. El grupo \mathbb{G}

Representación algebraica del grupo afin positivo

Cada transformación afín positiva $A_{\lambda,a}$ está caracterizada por sus parámetros de escalamiento y de traslación, es decir, por el par ordenado (λ, a) donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$. Además, para cada par ordenado de esta forma, podemos construir una única transformación afín positiva. Hay, pues, una relación biunívoca entre los conjuntos \mathbb{A} y $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. En lo que sigue, dotaremos al conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de una estructura algebraica similar a la de \mathbb{A} .

Denotemos por \mathbb{G} al conjunto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Este conjunto puede ser visto como el semiplano derecho en \mathbb{R}^2 . Dotemos ahora a \mathbb{G} de una operación que sea análoga a la composición de transformaciones afines descrita en (1.1).

Definamos entonces el producto de dos elementos de G del siguiente modo:

$$(\lambda, a) \cdot (\delta, b) = (\lambda \delta, a + \lambda b). \tag{1.2}$$

Con esto, cada transformación afín $A_{\lambda,a} \in \mathbb{A}$ puede ser identificada de manera única con el punto $(\lambda,a) \in \mathbb{G}$ y esta identificación preserva en \mathbb{G} el efecto de la composición de dos elementos en \mathbb{A} , es decir que el producto que definimos en \mathbb{G} es compatible con la composición de transformaciones en \mathbb{A} . Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.11. El conjunto \mathbb{G} es un grupo respecto al producto definido en (1.2).

Demostración. Esta demostración es consecuencia de la proposición 1.10. De acuerdo con ella, el elemento neutro es (1,0) y el inverso de (λ,a) es $(1/\lambda,-a/\lambda)$.

Proposición 1.12. La aplicación $\Theta : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$ definida para cada $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$ mediante la regla $\Theta(\lambda, a) = A_{\lambda, a}$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sean $(\lambda, a), (\delta, b) \in \mathbb{G}$. Entonces Θ es un homomorfismo:

$$\Theta((\lambda, a) \cdot (\delta, b)) = \Theta(\lambda \delta, a + \lambda b) = A_{\lambda \delta, a + \lambda b}
= A_{\lambda, a} \circ A_{\delta, b} = \Theta(\lambda, a) \circ \Theta(\delta, b).$$

Adeás $\Theta^{-1}(A_{\lambda,a}) = (\lambda,a)$. Así Θ es un homomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo de grupos.

Una acción de $\mathbb G$ sobre $\mathbb R$

Los elementos del grupo \mathbb{G} representan transformaciones que se aplican sobre el conjunto de los números reales. Es necesario establecer de manera formal cómo operan los elementos de \mathbb{G} en \mathbb{R} .

Sean (G, \cdot) un grupo con identidad e, y X un conjunto. Una **acción** del grupo G sobre el conjunto X es un homomorfismo de G en $\mathbf{Sym}(X)$, el conjunto de permutaciones en X (funciones biyectivas de X en sí mismo). Equivalentemente, $\Omega: G \times X \to X$, es una acción del grupo G sobre el conjunto X si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- i. (Identidad) Para todo $x \in X$, $\Omega(e, x) = x$.
- ii. (Compatibilidad) Para todo $x \in X$ y $g, h \in G$,

$$\Omega(g \cdot h, x) = \Omega(g, \Omega(h, x)).$$

Estas dos condiciones garantizan que para cada $g \in G$, la aplicación $\Omega_g := \Omega(g, \cdot)$ es una biyección. El *núcleo* de la acción Ω es el núcleo o kernel del homomorfismo que la define. Si éste sólo contiene a la identidad del grupo G, se dice que Ω es una acción fiel. También decimos que Ω es una acción transitiva si para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$, existe un elemento $g \in G$ tal que $\Omega(g, x) = y$.

Consideremos ahora la función $\Omega: \mathbb{G} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$\Omega((\lambda, a), x) := A_{\lambda, a}(x).$$

De acuerdo con lo anterior, Ω define una acción del grupo \mathbb{G} sobre \mathbb{R} .

El grupo \mathbb{G} es la representación más sencilla del grupo afín positivo y es la forma que estudiaremos más a detalle, pues servirá más adelante para definir la transformada de ondícula continua.

El grupo G como producto semidirecto

Sean $H = \mathbb{R}^+ \times \{0\}$ y $N = \{1\} \times \mathbb{R}$. Notemos que $H, N \subseteq \mathbb{G}$. Más aún, las funciones $h: H \to \mathbb{R}^+$, $(\lambda, 0) \mapsto \lambda$ y $g: N \to \mathbb{R}$, $(1, x) \mapsto x$ son biyectivas. Estos dos subconjuntos de \mathbb{G} resultan ser subgrupos. En efecto:

- 1. H es un subgrupo abeliano de \mathbb{G} : sean $(\lambda, 0), (\delta, 0), (\gamma, 0) \in H$
 - a) Es cerrado: $(\lambda, 0) \cdot (\delta, 0) = (\lambda \delta, 0) \in H$.
 - b) Es asociativo: $(\lambda, 0) \cdot ((\delta, 0) \cdot (\gamma, 0)) = (\lambda \delta \gamma, 0) = ((\lambda, 0) \cdot (\delta, 0)) \cdot (\gamma, 0)$.
 - c) Contiene al elemento neutro: $(1,0) \in H$ tomando $\lambda = 1$.
 - d) Cada elemento tiene inverso: $(\lambda, 0)^{-1} = (1/\lambda, 0) \in H$.
 - e) Es conmutativo: $(\lambda, 0) \cdot (\delta, 0) = (\lambda \delta, 0) = (\delta \lambda, 0) = (\delta, 0) \cdot (\lambda, 0)$.
- 2. N es un subgrupo abeliano normal de \mathbb{G} : sean (1, a), (1, b), $(1, c) \in H$.
 - a) Es cerrado: $(1, a) \cdot (1, b) = (1, a + b) \in H$.
 - b) Es asociativo: $(1, a) \cdot ((1, b) \cdot (1, c)) = (1, a + b + c) = ((1, a) \cdot (1, b)) \cdot (1, c)$.
 - c) Elemento neutro: $(1,0) \in H$ tomando a=0.
 - d) Inverso: $(1, a)^{-1} = (1, -a) \in H$.
 - e) Es conmutativo: $(1, a) \cdot (1, b) = (1, a + b) = (1, b + a) = (1, b) \cdot (1, a)$.

f) Es normal: sea $(\delta, b) \in \mathbb{G}$, entonces

$$(\delta, b)(1, a)(\delta, b)^{-1} = (\delta, b + \delta a)(1/\delta, -b/\delta) = (1, -b + b + \delta a) = (1, \delta a) \in N.$$

De ahí resulta que dados $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, el elemento $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$ se puede expresar de manera única como un producto de elementos de H y N. En efecto, $(\lambda, a) = (\lambda, 0) \cdot (1, a/\lambda)$, donde $(\lambda, 0) \in H$ y $(1, a/\lambda) \in N$. Si suponemos que existen otros elementos $(\delta, 0) \in H$ y $(1, b) \in N$ tales que $(\delta, 0) \cdot (1, b) = (\delta, \delta b) = (\lambda, a)$, entonces tendremos que $\delta = \lambda$ y $b = a/\lambda$.

Podemos decir entonces que \mathbb{G} es el producto semidirecto interno de H y N, o abusando de la notación, que \mathbb{G} es el producto semidirecto de \mathbb{R}^+ y \mathbb{R} por ser éstos isomorfos a H y N respectivamente.

1.3. Otras representaciones del grupo afín positivo

Representación matricial del grupo afín positivo

Dado $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, construyamos la matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Para simplificar la notación y dado que esta matriz sólo depende de los valores $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$, denotémosla por $A(\lambda, a)$ y escribamos $\mathcal{M} := \{ A(\lambda, a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : (\lambda, a) \in \mathbb{G} \}$.

La función $\Phi: \mathbb{G} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dada por $\Phi((\lambda, a), A(\delta, b)) = A(\lambda \delta, a + \lambda b)$, para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$ y $A(\delta, b) \in \mathcal{M}$, es una acción transitiva y fiel del grupo \mathbb{G} sobre el conjunto \mathcal{M} .

Utilizando la multiplicación usual de matrices, se verifica que

1. (\mathcal{M}, \times) es cerrado:

$$A(\lambda, a) \times A(\delta, b) = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \delta & a + \lambda b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A(\lambda \delta, a + \lambda b) \in \mathcal{M}.$$

- 2. (\mathcal{M}, \times) es asociativo pues el producto de matrices es asociativo.
- 3. (\mathcal{M}, \times) tiene un elemento neutro: $I_2 = A(1,0)$, la matriz identidad en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4. Como $\det(A(\lambda, a)) = \lambda > 0$, todos los elementos de \mathcal{M} son invertibles y

$$(A(\lambda, a))^{-1} = A(1/\lambda, -a/\lambda) \in \mathcal{M}.$$

De lo anterior se sigue que (\mathcal{M}, \times) es un grupo. La función $\phi : \mathbb{G} \to \mathcal{M}$ definida por $\phi(\lambda, a) = \Phi((\lambda, a), I_2) = A(\lambda, a)$ para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$ es un isomorfismo de grupos. En efecto, $\phi^{-1}(A(\lambda, a)) = (\lambda, a)$ y $\phi((\lambda, a) \cdot (\delta, b)) = \phi(\lambda, a) \times \phi(\delta, b)$.

El conjunto \mathcal{M} es la representación matricial del grupo afín positivo.

Representación compleja del grupo afín positivo

Una transformación de Möbius es una función racional $f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son tales que $ad-bc \neq 0$. Los puntos z = -d/c y $z = \infty$ son mapeados a los puntos $w = \infty$ y w = a/c respectivamente. Este tipo de transformación define una biyección del plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}}$ en sí mismo, y entre otras propiedades, mapea círculos y rectas en círculos y rectas. Cuando los coeficientes a, b, c y d son números reales, esta transformación deja invariante el eje real. Si además ad - bc > 0, entonces la transformación mapea el semiplano superior en el semiplano superior.

En particular, tomando c=0, d=1 y a>0 tendremos que ad-bc=a>0. Una transformación afín positiva $A_{\lambda,a}\in\mathbb{A}$ puede extenderse en $\overline{\mathbb{C}}$ a una transformación de Möbius de la forma $f(z)=\lambda z+a$ que mapea el semiplano superior en sí mismo. Ésta es la representación compleja del grupo afín positivo.

Las representaciones matricial y compleja del grupo afín positivo pueden, de forma natural, extenderse a espacios de dimensión mayor y en particular el parámetro λ no tiene por qué ser más un número real. A estas generalizaciones del grupo afín positivo suele llamárseles solamente grupo afín.

1.4. Una acción del grupo \mathbb{G} sobre $L^2(\mathbb{R})$

Denotamos por $L^1(\mathbb{R})$ al espacio de funciones con norma integrable respecto a la medida de Lebesgue, y por $L^2(\mathbb{R})$ al espacio de funciones cuadrado integrables respeto a la misma medida. El resto de los detalles acerca de estos espacios puede ser encontrado en cualquier libro estándar de análisis real, por ejemplo [Rudin FA, Rocha, GasWit].

Transformaciones afines sobre funciones

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cualquier función y $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. Denotemos por $\psi_{\lambda, a}$ a la función

$$\psi_{\lambda,a}(x) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
(1.3)

Observación. De acuerdo con esta notación, $\psi_{1,0} = \psi$ y $(\psi_{\mu,b})_{\lambda,a} = \psi_{\lambda\mu,a+\lambda b}$.

Notemos también que dada una función ψ , y $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, la nueva función $\psi_{\lambda,a}$ es la composición de ψ con $A_{\lambda,a}^{-1}$. De modo que, de manera informal, $\psi_{\lambda,a}$ es el resultado de trasladar y dilatar la función ψ . La razón por la que hemos incluido el coeficiente $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ en (1.3) es porque, como mostraremos a continuación, cuando $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $\psi_{\lambda,a} \in L^2(\mathbb{R})$ y sus normas coinciden.

Proposición 1.13. Sean $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ $y(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. Entonces $\psi_{\lambda, a} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y además

$$\|\psi\|_{1} = \sqrt{\lambda} \|\psi_{\lambda,a}\|_{1} \quad y \quad \|\psi\|_{2} = \|\psi_{\lambda,a}\|_{2}.$$
 (1.4)

Demostración. Por el teorema de cambio de variable (ver, por ejemplo, [Rudin FA, Rocha]), tomando $\phi(x) = \lambda x + a$, se tiene que $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| = \lambda$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(y)| \, dy = \int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(\phi(x))| \cdot |\phi'(x)| \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(\lambda x + a)| \cdot \lambda \, dx = \sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \, dx,$$

De donde $\psi_{\lambda,a} \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|\psi\|_1 = \sqrt{\lambda} \|\psi_{\lambda,a}\|_1$. Además,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(x)|^2 dx \le \left[\int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(x)| dx \right]^2 = \left[\sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right]^2 < +\infty,$$

de donde se concluye que $\psi_{\lambda,a} \in L^2(\mathbb{R})$. Nuevamente, con ayuda del teorema del cambio de variable, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{\lambda,a}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right) \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda} |\psi(y)|^2 \cdot \lambda dy = \int |\psi(y)|^2 dy,$$
 de ahí que $\|\psi\|_2 = \|\psi_{\lambda,a}\|_2$.

Acción del grupo \mathbb{G} sobre $L^2(\mathbb{R})$

Hemos descrito ya cómo los elementos del grupo afín positivo actúan sobre las funciones, y que en caso de que éstas pertenezcan a la clase $L^2(\mathbb{R})$, algunas propiedades de la función original ψ serán heredadas a $\psi_{\lambda,a}$. Formalizaremos ahora esta acción del grupo \mathbb{G} sobre el conjunto de funciones $L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 1.14 (Acción del grupo \mathbb{G} sobre $L^2(\mathbb{R})$)

Consideremos la función $\mathcal{K}: \mathbb{G} \times L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{K}((\lambda, a), \psi) = \psi_{\lambda, a}$ para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$ $y \psi \in L^2(\mathbb{R})$. Esta función es una acción del grupo \mathbb{G} sobre $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Sean (λ, a) , $(\mu, b) \in \mathbb{G}$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, entonces:

i.
$$\mathcal{K}((1,0),\psi) = \psi_{0,1} = \psi$$
.

ii.
$$\mathcal{K}((\lambda, a) \cdot (\mu, b), \psi) = \psi_{\lambda \mu, a + \lambda b} = (\psi_{\mu, b})_{\lambda, a} = \mathcal{K}((\lambda, a), \psi_{\mu, b}) = \mathcal{K}((\lambda, a), \mathcal{K}((\mu, b), \psi)).$$

En consecuencia, la función $\mathcal{K}_{\lambda,a}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definida por $\mathcal{K}_{\lambda,a}(\psi) := \mathcal{K}((\lambda,a),\psi)$ es un operador biyectivo en $L^2(\mathbb{R})$. Este operador también es lineal: sean $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, entonces:

$$\mathcal{K}_{\lambda,a}(\psi_1 + \alpha \,\psi_2) = (\psi_1 + \alpha \,\psi_2)_{\lambda,a} = (\psi_1)_{\lambda,a} + \alpha \,(\psi_2)_{\lambda,a} = \mathcal{K}_{\lambda,a}(\psi_1) + \alpha \,\mathcal{K}_{\lambda,a}(\psi_2).$$

Así,
$$\mathcal{K}_{\lambda,a} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$$
 para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$.

Sea $\mathbb{K} := \{ \mathcal{K}_{\lambda,a} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : (\lambda,a) \in \mathbb{G} \} \subseteq \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Entonces:

a)
$$(\mathcal{K}_{\lambda,a}\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)$$
, para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}$.

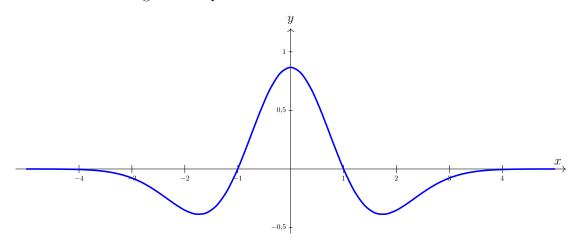
b)
$$\mathcal{K}_{\lambda,a}\mathcal{K}_{\mu,b}\psi = \mathcal{K}_{\lambda\mu,a+\lambda a}\psi$$
, para cualesquiera $\mathcal{K}_{\lambda,a},\mathcal{K}_{\mu,b} \in \mathbb{K}$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Finalmente notemos que de acuerdo con (1.4), los operadores en \mathbb{K} preservan la norma de los elementos del espacio $L^2(\mathbb{R})$, es decir $\|\mathcal{K}_{\lambda,a}\psi\|_2 = \|\psi\|_2$ para todo $\mathcal{K}_{\lambda,a} \in \mathbb{K}$ y $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.15. Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definida como

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3} \pi^{1/4}} (1 - x^2) e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

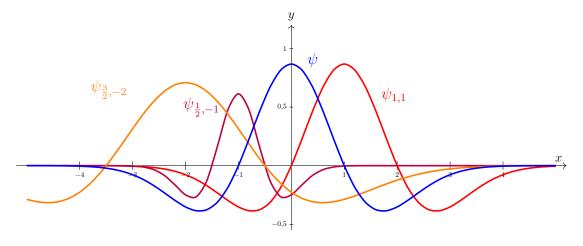
Esta función tiene el siguiente aspecto:



Para algunos puntos $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, la acción \mathcal{K} sobre la función ψ produce las funciones

$$\psi_{\lambda,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right),$$

que se muestran en la siguiente figura:



Más adelante retomaremos la función ψ definida en este ejemplo y veremos que cumple cierta condición de admisiblidad que nos permitirá llamarla ondícula. La función ψ será la ondícula madre y para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, llamaremos ondícula hija a la función $\psi_{\lambda,a}$.

1.5. Medidas de Haar sobre el grupo G

En las secciones anteriores dotamos al conjunto \mathbb{G} de una estructura algebraica, la cual nos permitió establecer una acción de este conjunto sobre la clase de las funciones $L^2(\mathbb{R})$. El propósito de esta sección es dotar al grupo \mathbb{G} de una estructura de espacio medible, la cual nos permitirá aplicar los teoremas del análisis real. Lograremos esto a través de la definición de un par de medidas invariantes bajo traslaciones sobre el grupo \mathbb{G} , llamadas también medidas de Haar.

Una medida de Haar izquierda

Definamos sobre G la medida

$$\mathrm{d}\nu_L = \frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2},\tag{1.5}$$

donde da y d λ corresponden a las medidas de Lebesgue en \mathbb{R} y \mathbb{R}^+ respectivamente. La fórmula anterior significa que si $X \subseteq \mathbb{G}$ medible, entonces

$$\nu_L(X) = \int_{\mathbb{G}} \frac{\mathbf{1}_X(\lambda, a)}{\lambda^2} \, da \, d\lambda,$$

donde $\mathbf{1}_X$ es la función indicadora del conjunto X.

Teorema 1.16 (Invarianza de la medida ν_L)

La medida ν_L es invariante bajo traslaciones por la izquierda, es decir que si X es un subconjunto de \mathbb{G} medible,

$$\nu_L((\mu, b) \cdot X) = \nu_L(X), \quad \forall (\mu, b) \in \mathbb{G},$$

 $donde\ (\mu,b)\cdot X\ es\ el\ conjunto\ \{\ (\mu,b)\cdot (\lambda,a)\in \mathbb{G}\ :\ (\lambda,a)\in X\ \}.$

A este tipo de medida se le conoce como medida de Haar izquierda.

Demostración. Sea $(\mu, b) \in \mathbb{G}$. Utilizaremos el teorema de cambio de variable tomando las funciones

$$X \xrightarrow{\phi} \mathbb{G} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

definidas como $\phi(\lambda, a) = (\mu, b) \cdot (\lambda, a) = (\lambda \mu, b + \mu a)$ y $f(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda^2}$, para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. Es claro que ϕ es una biyección y que

$$\partial_{\lambda} \phi(\lambda, a) = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$
 $y \quad \partial_{a} \phi(\lambda, a) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}$

así que

$$\phi'(\lambda, a) = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

De donde $|\det(\phi'(\lambda,a))| = \mu^2$. Además $(f \circ \phi)(\lambda,a) = f(\mu\lambda,\mu a + b) = 1/\mu^2\lambda^2$, luego,

$$\nu_L(\phi(X)) = \int\limits_{\phi(X)} \frac{1}{\lambda^2} da d\lambda = \int\limits_X \frac{1}{\mu^2 \lambda^2} \mu^2 da d\lambda = \int\limits_X \frac{1}{\lambda^2} da d\lambda = \nu_L(X).$$

De modo que $\nu_L((\mu, b)X) = \nu_L(X)$, como queríamos probar.

Una medida de Haar derecha

De manera análoga, se
a ν_R la medida sobre $\mathbb G$ definida como

$$\mathrm{d}\nu_R = \frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

la cual, como probaremos a continuación, es una medida de Haar derecha.

Teorema 1.17 (Invarianza de la medida ν_R)

La medida ν_R es invariante bajo traslaciones por la derecha.

Demostración. Probaremos que dado $X \subseteq \mathbb{G}$ medible y $(\mu, b) \in \mathbb{G}$ se cumple que

$$\nu_R(X \cdot (\mu, b)) = \nu_R(X).$$

Utilicemos nuevamente el teorema del cambio de variable aplicado a las funciones f y ϕ ,

$$X \xrightarrow{\phi} \mathbb{G} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

definidas como $\phi(\lambda, a) = (\lambda, a) \cdot (\mu, b) = (\lambda \mu, a + \lambda b)$ y $f(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda}$, para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. De nuevo se tiene que ϕ es una biyección y que

$$\partial_{\lambda} \phi(\lambda, a) = \begin{bmatrix} \mu \\ b \end{bmatrix}$$
 $y \quad \partial_{a} \phi(\lambda, a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

así que

$$\phi'(\lambda, a) = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

De donde $|\det(\phi'(\lambda,a))| = \mu$. Notemos que $(f \circ \phi)(\lambda,a) = f(\lambda\mu,a+\lambda b) = 1/\lambda\mu$, luego,

$$\nu_R(\phi(X)) = \int_{\phi(X)} \frac{1}{\lambda} da d\lambda = \int_X \frac{1}{\lambda \mu} \cdot \mu da d\lambda = \int_X \frac{1}{\lambda} da d\lambda = \nu_R(X).$$

Capítulo 2

Sobre la transformada de ondícula y su propiedad isométrica

En este capítulo se realiza un estudio detallado de una herramienta novedosa del análisis armónico. En la Sección 2.1 se define formalmente la transformada de ondícula continua \mathcal{W}_{Ψ} relativa a la ondícula Ψ y se establece su relación con la transformada de Fourier. En la Sección 2.2 se muestra que el operador W_{Ψ} es isométrico cuando la función Ψ cumple la condición de admisibilidad enunciada en esta sección. Las funciones que cumplen dicha condición son llamadas ondículas y en la Sección 2.3 se muestran algunos ejemplos. Para cierta elección de ondícula se calcula de manera numérica la transformada de ondícula de una función. Las propiedades de las isometrías son estudiadas independientemente en la Sección 2.4, y los resultados para la transformada de ondícula continua son enunciados en la Sección 2.6. Asimismo, en la Sección 2.5, se estudian los sistemas de estados coherentes y los espacios con núcleo reproductor. En la Sección 2.6 se muestra que el espacio $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$ tiene a la vez, un sistema de estados coherentes y un núcleo reproductor. En la Sección 2.7 demostraremos la fórmula de inversión para la transformada de ondícula continua. Y finalmente en la Sección 2.8 estudiaremos la proyección ortogonal inducida por el operador \mathcal{W}_{Ψ} . El contenido de este capítulo se basa en [GasWit, PerWar, Wong2, Daub, GroMorPau].

2.1. La transformada de ondícula continua

La transformada de Fourier

La transformada de Fourier es un operador $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$ que actúa sobre una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ del modo siguiente:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}.$$
 (2.1)

Esta definición puede extenderse por continuidad a $L^2(\mathbb{R})$. En el Apéndice A de esta tesis, se encuentra detallada la manera en que esta definición es extendida para funciones en $L^2(\mathbb{R})$. En ocasiones escribiremos \widehat{f} en vez de $\mathcal{F}f$, aunque también es común encontrar la notación $\mathcal{F}[f]$.

Recordamos a continuación algunas propiedades de la transformada de Fourier que serán de mucha utilidad. Si consideramos $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ en el sentido en el que se ha estudiando en el Apéndice A, este operador es biyectivo y su inverso se expresa para una función $F \in L^2(\mathbb{R})$ como

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
 (2.2)

Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1 (Fórmula de multiplicación). Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \widehat{g}(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{-2\pi i \xi x} d\xi \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi.$$

El intercambio de las integrales es posible gracias al Teorema de Tonelli-Fubini (ver, por ejemplo, [Rudin FA, Rocha]), pues por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| e^{-2\pi i \xi x} | dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \le ||f||_2 ||g||_2.$$

Proposición 2.2. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F} \ \overline{f} = \overline{\mathcal{F}^{-1}f}$.

Demostración. Tenemos que para todo $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F} \ \overline{f})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}x} = \overline{(\mathcal{F}^{-1}f)}(\xi).$$

Teorema 2.3 (Identidad de Plancherel para la transformada de Fourier) La transformada de Fourier es unitaria, es decir que si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2. \tag{2.4}$$

Demostración. Tomemos $\widehat{g} = \overline{f}$, es decir $g = \mathcal{F}^{-1}\overline{f}$. Por la proposición 2.2, se tiene que

$$\overline{g} = \overline{\mathcal{F}^{-1}\overline{f}} = \widehat{f},$$

de donde $g = \overline{\hat{f}}$. Luego, sustituyendo lo anterior en la fórmula de multiplicación (2.1), tenemos que

$$\|f\|_{2}^{2} = \int_{\mathbb{R}} |f|^{2} d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \overline{f} d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \widehat{g} d\mu$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} g d\mu = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} \overline{\widehat{f}} d\mu = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^{2} d\mu = \|\widehat{f}\|_{2}^{2}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.4 (Identidad de Parseval para la transformada de Fourier) Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$
 (2.5)

Con ayuda de la identidad de polarización es fácil deducir esta expresión a partir de la identidad de Plancherel. Más adelante mostraremos identidades semejantes a (2.4) y (2.5) para la transformada de ondícula continua.

La transformada de ondícula continua

Definición 2.5 (Transformada de ondícula continua). Sea $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. La transformada de ondícula continua asociada a la función Ψ es el operador $\mathcal{W}_{\Psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{G})$ tal que para cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$ y cada $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$,

$$(\mathcal{W}_{\Psi}f)(\lambda, a) := \langle f, \Psi_{\lambda, a} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Psi_{\lambda, a}(x)} \, \mathrm{d}x, \qquad (2.6)$$

donde $\Psi_{\lambda,a}$ denota la acción de \mathbb{G} sobre Ψ descrita en (1.3).

Este operador está bien definido, ya que por la desigualdad de Chauchy-Schwarz, para cada $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot |\Psi_{\lambda,a}(x)| \, \mathrm{d}x \le \|f\|_2 \cdot \|\Psi_{\lambda,a}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|\Psi\|_2 < +\infty.$$

En comparación con la transformada de Fourier, la transformada de ondícula continua tiene una gran ventaja que expondremos a continuación. Es bien sabido que, mediante la transformada de Fourier, cada señal (cada función en $L^2(\mathbb{R})$) puede ser analizada en términos de la frecuencia, es decir, la transformada de Fourier de una señal nos indica la gama de frecuencias presentes en dicha señal a lo largo de su vida. También la transformada de ondícula continua es capaz de hacerlo. La diferencia radica en que, aunque en ambos casos podemos reconocer alguna frecuencia particular, la transformada de Fourier no es capaz de indicar en qué momento preciso la señal tuvo dicha frecuencia, mientras que la transformada de ondícula continua es capaz de localizar dicha frecuencia en el dominio del tiempo.

La relación entre la transformada de Fourier y la transformada de ondícula continua

Existe una relación muy estrecha entre ambas transformadas. La transformada de ondícula puede expresarse en términos de la transformada de Fourier, como veremos a continuación.

Sean $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. Calculemos en primer lugar la transformada de Fourier de la función $\Psi_{\lambda,a}$. Con ayuda del cambio de variable $x = \lambda y + a$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{\lambda,a}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

$$= \sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \Psi(y) e^{-2\pi i \xi (\lambda y + a)} dy = \sqrt{\lambda} e^{-2\pi i a \xi} \widehat{\Psi}(\lambda \xi).$$

Notemos que $\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(\xi) = \sqrt{\lambda} \widehat{\Psi}(\lambda \xi)$. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Lema 2.6. Sean $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ $y(\lambda, a) \in \mathbb{G}$. Entonces

$$\mathcal{F}[\Psi_{\lambda,a}](\xi) = \widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(\xi) e^{-2\pi i a \xi}, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}.$$
(2.7)

Teorema 2.7 (Relación entre la transformada de Fourier y la transformada de ondícula) $Sea\ \Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})\ y\ (\lambda, a) \in \mathbb{G}.\ Entonces$

$$\mathcal{W}_{\Psi}f(\lambda, a) = \mathcal{F}^{-1} \left[\widehat{f} \cdot \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda}, 0}} \right] (a). \tag{2.8}$$

Demostración. Por (2.5), tenemos que

$$\mathcal{W}_{\Psi}f(\lambda, a) = \langle f, \Psi_{\lambda, a} \rangle = \langle \widehat{f}, \mathcal{F}[\Psi_{\lambda, a}] \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \, \overline{\mathcal{F}[\Psi_{\lambda, a}](\xi)} \, \mathrm{d}\xi,$$

sustituyendo (2.7),

$$\mathcal{W}_{\Psi}f(\lambda, a) = \int_{\mathbb{P}} \widehat{f}(\xi) \ \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda}, 0}(\xi)} \ e^{2\pi i a \xi} \ \mathrm{d}\xi.$$

Tomando $h(\xi) = \widehat{f}(\xi) \ \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(\xi)}$, se tiene

$$\mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a) = \int_{\mathbb{R}} h(\xi) e^{2\pi i a \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}[h](a).$$

2.2. La propiedad isométrica de la transformada de ondícula continua

La transformada de ondícula continua tiene propiedades semejantes a las de la transformada de Fourier siempre y cuando la fucnión Ψ que determina el operador \mathcal{W}_{Ψ} cumpla ciertas características. En lo que sigue enunciaremos las condiciones que la *ondícula* Ψ deberá cumplir para poder garantizar que \mathcal{W}_{Ψ} es un operador isométrico.

La identidad de Plancherel para la transformada de ondícula continua

La identidad de Plancherel para la transformada de Fourier (2.4) garantiza que la norma de una función transformada coincide con la norma de la función original. De esta propiedad se deduce también que el operador \mathcal{F} preserva productos (identidad de Parseval para la transformada de Fourier (2.5)). Debido a la estrecha relación entre la transformada de ondícula continua y la transformada de Fourier, es natural requerir que el operador \mathcal{W}_{Ψ} cumpla también estas propiedades, mas debido a la dependencia de la función Ψ , es necesario que ésta cumpla ciertas condiciones.

Proposición 2.8. Sea $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{\Psi}(a) := \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, d\lambda < +\infty, \quad \forall \, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
 (2.9)

Entonces para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\| \mathcal{W}_{\Psi} f \|_{L^{2}(\mathbb{G})} = \sqrt{c_{\Psi}(a)} \| f \|_{L^{2}(\mathbb{R})}.$$
 (2.10)

Demostración. Por (2.8) se tiene que

$$\| \mathcal{W}_{\Psi} f \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} = \int_{\mathbb{R}^{+}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a)|^{2} \frac{\mathrm{d} a \, \mathrm{d} \lambda}{\lambda^{2}} = \int_{\mathbb{R}^{+}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}^{-1} \left[\widehat{f} \cdot \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda}, 0}} \right] (a) \right|^{2} \, \mathrm{d} a \right) \frac{\mathrm{d} \lambda}{\lambda^{2}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{+}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(a)|^{2} |\sqrt{\lambda} \, \widehat{\Psi}(\lambda a)|^{2} \, \mathrm{d} a \right) \frac{\mathrm{d} \lambda}{\lambda^{2}} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(a)|^{2} \left(\int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^{2}}{\lambda} \, \mathrm{d} \lambda \right) \, \mathrm{d} a,$$

lo que finalmente lleva a que $\|\mathcal{W}_{\Psi}f\|_{L^2(\mathbb{G})}^2 = c_{\Psi}(a)\|\widehat{f}\|_2^2 = c_{\Psi}(a)\|f\|_2^2$, de donde se deduce la igualdad (2.10).

El número c_{Ψ} es denominado coeficiente de admisibilidad asociado a la función Ψ . Aunque aparentemente c_{Ψ} depende del parámetro de traslación a, es fácil demostrar bajo el cambio de variable $t = \lambda a$ que c_{Ψ} depende a lo sumo del signo de a. Se tiene entoces que 2.9 puede ser reemplazada por las condiciones siguientes:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda < +\infty \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda < +\infty.$$

Definición 2.9 (Condición de admisibilidad). Diremos que una función $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es una *ondícula admisible* (o simplemente *ondícula*) si cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda)|^2}{\lambda} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(-\lambda)|^2}{\lambda} \, d\lambda = 1.$$

Observación. La definición anterior implica que

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A menudo encontraremos esta forma. Además, como $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$, se tiene que $\widehat{\Psi}$ es continua en \mathbb{R} . Supongamos que $\widehat{\Psi}(0) \neq 0$, entonces

$$c_{\Psi}(0) = \widehat{\Psi}(0) \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = +\infty.$$

Para evitar esto, tomemos $\widehat{\Psi}(0) = 0$, así

$$\widehat{\Psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

de donde Ψ debe tener *promedio* cero en \mathbb{R} .

Siempre que Ψ sea una ondícula admisible, se cumplirán las identidades análogas a (2.4) y (2.5) para el operador \mathcal{W}_{Ψ} . En particular (2.10) puede reescribirse del siguiente modo.

Teorema 2.10 (Identidad de Plancherel para la transformada de ondícula continua) Sean Ψ una ondícula admisible $y \ f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\| \mathcal{W}_{\Psi} f \|_{L^{2}(\mathbb{G})} = \| f \|_{L^{2}(\mathbb{R})}.$$
 (2.11)

La propiedad isométrica de la transformada de ondícula continua

Teorema 2.11 (Identidad de Parseval para la transformada de ondícula continua) Sean Ψ una ondícula admisible $y \ f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\langle \mathcal{W}_{\Psi} f, \mathcal{W}_{\Psi} q \rangle = \langle f, q \rangle \quad \forall f, q \in L^2(\mathbb{R}).$$
 (2.12)

Demostración. La igualdad en (2.12) se tiene gracias a la identidad de polarización,

$$\langle \mathcal{W}_{\Psi} f, \mathcal{W}_{\Psi} g \rangle = \frac{1}{4} \left(\| \mathcal{W}_{\Psi} f + \mathcal{W}_{\Psi} g \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} - \| \mathcal{W}_{\Psi} f - \mathcal{W}_{\Psi} g \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\| \mathcal{W}_{\Psi} (f + g) \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} - \| \mathcal{W}_{\Psi} (f - g) \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\| f + g \|_{2}^{2} - \| f - g \|_{2}^{2} \right)$$

$$= \langle f, g \rangle. \quad \blacksquare$$

La propiedad de preservar el producto interno bajo \mathcal{W}_{Ψ} se denomina propiedad isométrica de la transformada de ondícula. También se dice que \mathcal{W}_{Ψ} es una isometría lineal.

2.3. Ondículas

Una ondícula madre ψ (ondícula del fracés ondelette, en inglés wavelet) es, de manera informal, una función con promedio cero, generalmente con propiedades como continuidad y derivabilidad que resultan ventajosas para su propósito: encontrar en cada instante con ayuda de la transformada de ondícula continua la correlación entre una señal dada (cualquier función en $L^2(\mathbb{R})$) y una versión dilatada y trasladada de la ondícula ψ llamada ondícula hija y denotada $\psi_{\lambda,a}$ para algunos parámetros $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$.

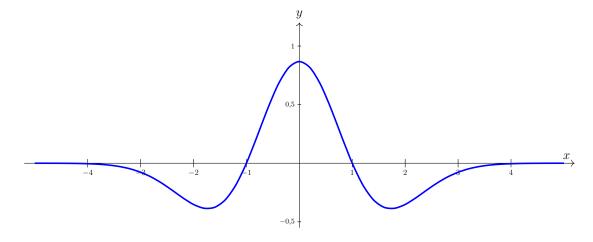
Algunas ondículas

Se muestran a continuación un par de ejemplos de *ondículas madres* (ondículas admisibles).

Ejemplo 2.12. La ondícula sombrero mexicano (mexican-hat wavelet) es la función:

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3} \pi^{1/4}} (1 - x^2) e^{-x^2/2},$$

cuya gráfica es la siguiente:

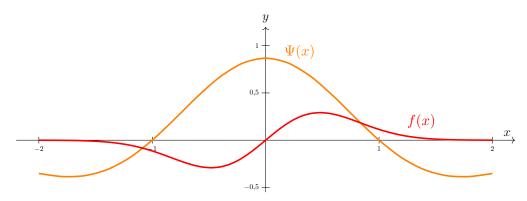


Un ejemplo numérico

Para ilustrar este capítulo, tomaremos una función y mediante un algoritmo numérico, encontraremos su transformada de ondícula. Elijamos la ondícula descrita en el ejemplo 2.12 y la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) e^{-2x^2},$$

Las gráficas de la función f y la ondícula Ψ se muestran en la siguiente figura:



La siguiente función está escrita para GNU Octave. Dadas una función f y una ondícula admisible Ψ , el siguiente algoritmo calcula algunos valores de la función $\mathcal{W}_{\Psi}f$ realizando el producto interno de f con $\Psi_{\lambda,a}$ para una gran cantidad de puntos $(\lambda,a) \in \mathbb{G}$.

El siguiente algoritmo, con ayuda del comando mat2gray de GNU Octave, convierte los valores obtenidos por la función cwt_quadcc.m en una matriz de tonos de grises, asignando tonos oscuros a valores pequeños o nulos y tonos claros a los valores más grandes.

```
function [] = WT_ejemplo1(),
    c = 1 / (sqrt(3)* pi ^ 0.25);
    mother_wavelet = @(x) c * (1 - x ^ 2) .* exp(- x ^ 2 / 2);
    f = @(x) sin(x) .* exp( -2*x^2);

na = 160; da = 0.05;
    nla = 120; dla = 0.05;
    xmax=15;

%Wavelet Transform
    t1=cputime();
    wcoefs = cwt_quadcc(f, mother_wavelet, dla, nla, da, na, xmax);
    t2=cputime();
    disp(t2-t1);
    myimage = mat2gray(abs(wcoefs));
    imwrite(myimage, 'cwt_plot_quadcc.png');
end
```

El resultado es una copia del espacio \mathbb{G} , limitado a ciertos valores de los parámetros λ y a, en el que a cada punto se le ha asignado un color en la escala de grises dependiendo del valor de la transformada en dicho punto.

Este algoritmo también calcula el tiempo de ejecución. La operación que tiene mayor costo (en tiempo) es la integración. El comando quadco utilizado en la función cwt_quadco es el encargado de realizar dicha labor.

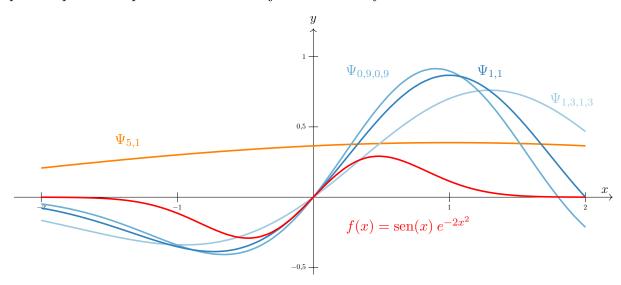
El resultado es el siguiente:



Figura 2.1: resultado del algoritmo en GNU Octave.

Aquí el espacio $\mathbb G$ está limitado a los valores $0 \le \lambda \le 6$, y $-8 \le a \le 8$. Observemos las regiones blancas: es donde la transformada de ondícula alcanza los valores más grandes.

En las regiones de puntos negros, la transformada de ondícula de la función f toma valores pequeños o nulos. Esto significa que las ondículas hijas en estos puntos están alejadas de la función f. En cambio cuando los puntos son blancos, las ondículas hijas se asemejan a f, tal como lo muestra la siguiente figura, donde se han elegido puntos sobre estas líneas blancas y se han exhibido las gráficas de las ondículas hijas correspondientes a estos puntos elegidos. También se muestra una ondícula hija asociada a un punto negro, allí puede apreciarse que ésta no se asemeja a la función f.



2.4. Sobre las isometrías lineales

El resultado (2.12) sobre la propiedad isométrica de la transformada de ondícula motiva un estudio más detallado de sus implicaciones. Abordaremos el tema de las isometrías lineales de una manera más general. Concluiremos enunciando las consecuencias que particularmente se aplican a la transformada de ondícula continua.

Isometrías en espacios de Hilbert

En adelante consideraremos dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 con productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2}$ respectivamente. A su vez estos productos inducen las normas $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_1}$ y $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_2}$ en los espacios respectivos. Los detalles sobre los espacios de Hilbert pueden ser encontrados en cualquier libro básico de análisis funcional, por ejemplo [Conway, Lang An, Rudin FA, Zhu, Royden].

Definición 2.13 (Isometría lineal). Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert. Una función $W: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ se llama *isometría lineal* si es un operador lineal que conserva el producto interno, es decir,

$$\langle Wf, Wg \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_1.$$
 (2.13)

También decimos que si un operador W cumple (2.13), entonces es isom'etrico.

Notemos que una isometría lineal W es acotada, pues para todo $f \in \mathcal{H}_1$,

$$\|Wf\|_{\mathcal{H}_{2}}^{2} = \langle Wf, Wf \rangle_{\mathcal{H}_{2}} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_{1}} = \|f\|_{\mathcal{H}_{1}}^{2}.$$

Se sigue de ahí el siguiente resultado.

Proposición 2.14 (Norma de una isometría)

Sea $W: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ una isometría. Entonces ||W|| = 1.

Propiedades de dualidad en espacios de Hilbert

Enunciaremos a continuación algunos resultados útiles para el estudio del operador adjunto a una isometría. Recordemos, por ejemplo, que si f es un elemento de un espacio de Hilbert \mathcal{H} y $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0$, entonces necesariamente f = 0.

Proposición 2.15. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Si $f \in \mathcal{H}$ es tal que $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $g \in \mathcal{H}$, entonces f = 0.

Demostración. Si $\langle f, g \rangle = 0$ para todo $g \in \mathcal{H}$, en particular para g = f se tiene que $\langle f, f \rangle = 0$, luego f = 0.

Proposición 2.16. Sean $f, g \in \mathcal{H}$, si para todo $h \in \mathcal{H}$, $\langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle$, entonces f = g.

Demostración. Por la linealidad del producto interno, si para todo $h \in \mathcal{H}$, $\langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle$, entonces $\langle f - g, h \rangle = 0$. Por la proposición anterior, f - g = 0.

Sea $f \in \mathcal{H}$. Definamos $\Phi_f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ como $\Phi_f(h) = \langle f, h \rangle$, para todo $h \in \mathcal{H}$.

Proposición 2.17. Sea $f \in \mathcal{H}$. Entonces Φ_f es un funcional lineal y

$$\|\Phi_f\| = \|f\|_{\mathcal{H}}.$$

Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, denotamos por \mathcal{H}^* al espacio dual de \mathcal{H} , conformado por todos los funcionales lineales acotados de \mathcal{H} en \mathbb{C} .

Teorema 2.18 (de representación de Riesz)

Sea $\Lambda \in \mathcal{H}^*$. Entonces existe un único $f \in \mathcal{H}$ tal que $\Lambda = \Phi_f$.

La demostración de este teorema puede encontrarse en [Conway].

Propiedades del operador adjunto a una isometría

Proposición 2.19. Sean \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 dos espacios de Hilbert, $U, V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ operadores tales que para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $\xi \in \mathcal{H}_2$ se tiene que $\langle Uf, \xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle Vf, \xi \rangle_{\mathcal{H}_2}$, entonces U = V.

Demostración. Por 2.16, para cada $f \in \mathcal{H}_1$, Uf = Vf, entonces U = V.

Proposición 2.20. Sea $S: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal. Entonces existe un único operador lineal $T: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $g \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle Sf, g \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, Tg \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Demostración. La existencia es consecuencia del teorema de representación de Riesz, y la unicidad es consecuencia de la proposición 2.19.

Esta existencia motiva la siguiente definición.

Definición 2.21 (Operador adjunto). Sea $T: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal. El operador adjunto a T, es el operador $T^*: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $\xi \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle Tf, \xi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, T^*\xi \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Observemos además que $(T^*)^* = T$. Esta propiedad se llama *involución*.

Proposición 2.22 (Imagen de la proyección inducida por una isometría) Sea W^* el operador adjunto de una isometría $W: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$. Entonces:

- a) W^*W es el operador identidad de \mathcal{H}_1 .
- b) $P := WW^*$ es la proyección ortogonal en $W(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_2$, es decir que
 - a) Es idempotente: $P^2 = P$.
 - b) Es autoadjunto: $P^* = P$.

c) La imagen de W coincide con la imagen de P y en consecuencia puede ser descrita como el conjunto de puntos fijos de P, es decir,

$$W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2) = \{ \xi \in \mathcal{H}_2 : P\xi = \xi \}.$$
 (2.14)

d) El operador W* restringido al subespacio $P(\mathcal{H}_2)$ es un isomorfismo isométrico de $P(\mathcal{H}_2)$ en \mathcal{H}_1 .

Demostración.

a) Sean $f, g \in \mathcal{H}_1$, entonces en virtud de (2.13),

$$\langle W^*Wf, g \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Wf, Wg \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Como f y g son arbitrarios en \mathcal{H}_1 , por la proposición 2.19 se tiene que $W^*W = I_{\mathcal{H}_2}$.

b) i)
$$P^2 = (WW^*)(WW^*) = W(W^*W)W^* = WW^* = P$$
.

ii)
$$P^* = (WW^*)^* = (W^*)^*W^* = WW^* = P.$$

- c) Primero veamos que $P(\mathcal{H}_2) = \{ \xi \in \mathcal{H}_2 : P\xi = \xi \}.$
 - \subseteq) Sea $\xi \in P(\mathcal{H}_2)$, entonces existe $\nu \in \mathcal{H}_2$ tal que $P\nu = \xi$, así

$$P\xi = P(P\nu) = P^2\nu = P\nu = \xi.$$

 \supseteq) Si $\xi \in \mathcal{H}_2$ es tal que $\xi = P\xi$, entonces $\xi \in P(\mathcal{H}_2)$.

Ahora veamos que $W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2)$

 \subseteq) Sea $\xi \in W(\mathcal{H}_1)$, entonces existe $f \in \mathcal{H}_1$ tal que $Wf = \xi$. Luego

$$P\xi=P(Wf)=W(W^*W)f=(WW^*)Wf=Wf=\xi,$$

por lo que $\xi = P\xi$, luego $\xi \in P(\mathcal{H}_2)$.

 \supseteq) Si $\xi \in P(\mathcal{H}_2)$ existe $\nu \in \mathcal{H}_2$ tal que $\xi = P\nu = (WW^*)\nu = W(W^*\nu)$, pero $W^*\nu \in \mathcal{H}_1$, luego $\xi \in W(\mathcal{H}_1)$.

d) Sea $S: P(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{H}_1$, $Sg = W^*\xi$ para todo $\xi \in P(\mathcal{H}_2)$ (es decir, $S = W\big|_{P(\mathcal{H}_2)}$). Probaremos que $S^{-1} = W$. Sea $f \in \mathcal{H}_1$, luego

$$SWf = S(Wf) = W^*(Wf) = (W^*W)f = f,$$

y si $\xi \in W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2)$, entonces

$$WS\xi = W(W^*\xi) = (WW^*)\xi = P\xi = \xi,$$

la última igualdad debido a que la proyección deja fijos los puntos de su imagen.

Por último podemos calcular la norma de la proyección ortogonal inducida por una isometría lineal en un espacio de Hilbert.

Proposición 2.23. Sea P una proyección ortogonal sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces ||P|| = 1.

Demostración. Si P es proyección, entonces $P^2 = P$ y $P^* = P$. Por un lado $||P|| = ||P^2|| \le ||P||^2$, luego $||P|| \ge 1$. Por otro lado para cualquier $x \in \mathcal{H}$,

$$||Px||^2 = \langle Px, Px \rangle = \langle P^*Px, x \rangle = \langle P^2x, x \rangle = \langle Px, x \rangle,$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\langle Px, x \rangle \leq ||Px|| ||x||$, luego $||Px|| \leq ||x||$. Por lo tanto ||P|| = 1.

En la Sección 2.6 enunciaremos los resultados anteriores en el caso de la transformada de ondícula continua.

2.5. Sistemas de estados coherentes y especios con núcleo reproductor

Sistemas de estados coherentes

Originalmente, el concepto de estados coherentes fue acuñado por la física matemática, más particularmente por la que está involucrada con la mecánica cuántica. Sin embargo, las generalizaciones de este concepto han llegado incluso, al análisis armónico y es a esta acepción a la que aquí nos referimos.

Un sistema de estados coherentes es, de manera informal, una generalización del concepto de base en un espacio de funciones, en el sentido de que, tal sistema es un conjunto de funciones con cierta característica común, y tiene la propiedad de que cualquier función de dicho espacio puede ser reconstruida a partir de los elementos de este sistema.

Definición 2.24 (Sistema de estados coherentes). Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert y (G, ν) un espacio de medida. Una familia $(\psi_{\gamma})_{\gamma \in G}$ de elementos de \mathcal{H} es llamada sistema de estados coherentes si para cada $f, g \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\langle f, g \rangle = \int_{G} \langle f, \psi_{\gamma} \rangle \langle \psi_{\gamma}, g \rangle d\nu(\gamma).$$
 (2.15)

Esta expresión es llamada la fórmula de reproducción.

Para lo que sigue, fijemos un espacio de medida (G, ν) y un sistema de estados coherentes $(\psi_{\nu})_{\nu \in G}$. Definamos además el operador $K_{\psi} : \mathcal{H} \to L^2(G, \nu)$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}$,

$$(K_{\psi}f)(\gamma) := \langle f, \psi_{\gamma} \rangle \quad \forall \gamma \in G.$$
 (2.16)

Así, (2.15) puede ser reescrita en la forma siguiente:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K_{\psi} f, K_{\psi} g \rangle_{L^{2}(G,\nu)},$$
 (2.17)

De ahí se tiene que K_{ψ} preserva el producto interno, es decir que K_{ψ} es una isometría lineal, o un *encaje isométrico* de \mathcal{H} en $L^2(G,\nu)$. Note que K_{ψ} no es suprayectiva.

Denotemos por K_{ψ}^* al operador adjunto de K_{ψ} , entonces para cada $w \in L^2(G, \nu)$,

$$K_{\psi}^* w = \int_G w(\gamma) \, \psi_{\gamma} \, \mathrm{d}\nu(\gamma),$$

donde la integral esta definida en el sentido débil.

Proposición 2.25. El operador $K_{\psi}^*K_{\psi}$ es el operador identidad en \mathcal{H} .

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}$, entonces para cada $g \in \mathcal{H}$,

$$\langle K_{\psi}^* K_{\psi} f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K_{\psi} f, K_{\psi} g \rangle_{L^2(G,\nu)} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle I_{\mathcal{H}_2} f, g \rangle_{\mathcal{H}},$$

lo que implica, por 2.19, que $K_{\psi}^* K_{\psi} = I_{\mathcal{H}}$.

Proposición 2.26. Sea $P := K_{\psi}K_{\psi}^*$. Entonces P es la proyección ortogonal en $L^2(G, \nu)$.

Demostración.

a) P es idempotente:

$$P^{2} = (K_{\psi}K_{\psi}^{*})(K_{\psi}K_{\psi}^{*}) = K_{\psi}(K_{\psi}^{*}K_{\psi})K_{\psi}^{*} = K_{\psi}K_{\psi}^{*} = P.$$

b) P es autoadjunto:

$$P^* = (K_{\psi}K_{\psi}^*)^* = (K_{\psi}^*)^* K_{\psi}^* = K_{\psi}K_{\psi}^* = P.$$

Proposición 2.27. Para todo $w \in L^2(G, \nu)$ y $\gamma \in G$,

$$(Pw)(\gamma) = \langle w , K_{\psi}\psi_{\gamma} \rangle_{L^{2}(G,\nu)} = \langle K_{\psi}^{*}w , \psi_{\gamma} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Demostración. Se
a $w\in L^2(G,\nu)$ y $\gamma\in G,$ entonces

$$(Pw)(\gamma) = (K_{\psi}K_{\psi}^*w)(\gamma) = (K_{\psi}(K_{\psi}^*w))(\gamma) = \langle K_{\psi}^*w, \psi_{\gamma} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Proposición 2.28. Se tiene que $K_{\psi}(\mathcal{H}) = P(L^2(G, \nu))$.

Demostración. Si $w \in K_{\psi}(\mathcal{H})$, entonces existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $w = K_{\psi}f$, y en consecuencia

$$Pw = K_{ib}K_{ib}^*w = (K_{ib}K_{ib}^*)K_{ib}f = K_{ib}(K_{ib}^*K_{ib})f = K_{ib}f = w.$$

Recíprocamente, si $w \in P(L^2(G, \nu))$, entonces

$$w = Pw = (K_{\psi}K_{\psi}^*)w = K_{\psi}(K_{\psi}^*w) \in K_{\psi}(\mathcal{H}).$$

La proposición 2.28 ofrece una descripción conveniente de $K_{\psi}(\mathcal{H})$. Resulta así que este conjunto es la colección de funciones $w \in L^2(G, \nu)$ tales que satisfacen la propiedad reproductiva:

$$w(\gamma) = \int_{G} w(\xi) \langle \psi_{\xi}, \psi_{\gamma} \rangle d\nu(\xi), \quad \forall \xi \in G.$$
 (2.18)

Como en seguida veremos, esto significa que $K_{\psi}(\mathcal{H})$ es un espacio con núcleo reproductor, y que para cada $\gamma \in G$, la función $K_{\psi}\psi_{\gamma}$ es el núcleo reproductor del espacio $K_{\psi}(\mathcal{H})$ en el punto γ .

Núcleos reproductores en espacios de Hilbert

Consideremos un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Un funcional lineal se dice acotado en \mathcal{H} si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$, $|f(x)| \leq M ||x||$. Además un funcional lineal es acotado si y sólo si es continuo. Llamamos $espacio\ dual\ de\ \mathcal{H}$ al conjunto formado por todos los funcionales lineales acotados en \mathcal{H} , y lo denotamos por \mathcal{H}^* . A su vez \mathcal{H}^* resulta ser un espacio de Hilbert con la norma usual de operadores.

Sea $x \in \mathcal{H}$, definimos el operador evaluación en x como el operador $E_x : \mathcal{H}^* \to \mathbb{C}$ tal que $E_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{H}^*$, es decir que $E_x \in (\mathcal{H}^*)^*$. Si este operador es acotado, el teorema de representación de Riesz 2.18 garantiza que existe un único $K_x \in \mathcal{H}^*$ tal que $E_x(f) = \langle K_x, f \rangle$, para todo $f \in \mathcal{H}^*$. En tal caso definimos el núcleo reproductor en \mathcal{H} como la función $K : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que $K(x,y) = \langle K_x, K_y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

2.6. Sobre la imagen del operador \mathcal{W}_{Ψ}

La proyección en $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$

Como ya hemos mostrado en 2.12, dada una ondícula admisible Ψ , el operador \mathcal{W}_{Ψ} es una isometría, y en consecuencia:

- 1. De acuerdo con la proposición 2.14, $\| \mathcal{W}_{\Psi} \| = 1$.
- 2. Por la proposición 2.22, el operador $\mathcal{W}_{\Psi}^*\mathcal{W}_{\Psi}$ es la identidad en $L^2(\mathbb{R})$, y
- 3. El operador $P_{\Psi} := \mathcal{W}_{\Psi} \mathcal{W}_{\Psi}^*$ es la proyección ortogonal en $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$.

Para encontrar la forma explícita de la proyección en $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$, investiguemos primero el aspecto del operador \mathcal{W}_{Ψ}^* . Sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $w \in \mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$, se tiene que

$$\langle \mathcal{W}_{\Psi}^* w, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle w, \mathcal{W}_{\Psi} f \rangle_{L^2(\mathbb{G})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} w(\lambda, a) \overline{\mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a)} \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^2},$$

pero

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\lambda, a) \ \overline{W_{\Psi} f(\lambda, a)} \frac{d\lambda \, da}{\lambda^{2}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\lambda, a) \ \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Psi_{\lambda, a}(x)} \, dx\right)} \frac{d\lambda \, da}{\lambda^{2}} \\
= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(\lambda, a) \Psi_{\lambda, a}(x) \frac{d\lambda \, da}{\lambda^{2}}\right) \overline{f(x)} \, dx.$$

Si definimos el operador $V: \mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R})) \to L^2(\mathbb{R})$ tal que para cada $w \in \mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$,

$$(Vw)(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} w(\lambda, a) \Psi_{\lambda, a}(x) \frac{d\lambda da}{\lambda^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

se tendrá que $\langle W_{\Psi}^* w, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle V w, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Por la proposición 2.19, $W_{\Psi}^* = V$, así para cada $w \in W_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$ tenemos

$$\mathcal{W}_{\Psi}^* w(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} w(\lambda, a) \Psi_{\lambda, a}(x) \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^2}, \quad \forall \, x \in \mathbb{R}.$$
 (2.19)

Así pues, si $w \in L^2(\mathbb{G})$, tendremos que para todo $(\mu, b) \in \mathbb{G}$,

$$P_{\Psi}w(\mu,b) = (\mathcal{W}_{\Psi}\mathcal{W}_{\Psi}^*w)(\mu,b) = \langle \mathcal{W}_{\Psi}^*w, \Psi_{\mu,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle w, \mathcal{W}_{\Psi}\Psi_{\mu,b} \rangle_{L^2(\mathbb{G})},$$

pero

$$\langle w, \mathcal{W}_{\Psi} \Psi_{\mu,b} \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\lambda, a) \, \mathcal{W}_{\Psi} \Psi_{\mu,b}(\lambda, a) \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^{2}}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\lambda, a) \langle \Psi_{\mu,b}, \Psi_{\lambda,a} \rangle \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^{2}} \, .$$

Así,

$$P_{\Psi}w(\mu,b) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} w(\lambda,a) \langle \Psi_{\mu,b}, \Psi_{\lambda,a} \rangle \frac{\mathrm{d}\lambda \,\mathrm{d}a}{\lambda^2} \,. \tag{2.20}$$

Un sistema de estados coherentes en $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$

Si suponemos que $w \in \mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$, entonces $P_{\Psi}w = w$. Cambiando la notación, podemos ver que la ecuación (2.20) se transforma en la siguiente.

$$w(\gamma) = \int_{\mathbb{G}} w(\xi) \langle \Psi_{\gamma}, \Psi_{\xi} \rangle d\nu_{L}(\xi), \quad \forall w \in \mathcal{W}_{\Psi}(L^{2}(\mathbb{R})), \forall \gamma \in \mathbb{G}.$$
 (2.21)

que es la fórmula de reproducción (2.18) para el espacio $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$ y el grupo (\mathbb{G} , $d\nu_L$). En consecuencia $(\Psi_{\gamma})_{\gamma \in \mathbb{G}}$ es un sistema de estados coherentes.

Un núcleo reproductor en $\mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$

Definamos ahora la función $K_{\Psi}: \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to L^2(\mathbb{G})$ como

$$K_{\Psi}[(\mu, b), (\lambda, a)] = \langle \Psi_{\lambda, a}, \Psi_{\mu, b} \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})}.$$

Tenemos que

$$P_{\Psi}w(\mu, b) = \langle w, K_{\Psi}[(\mu, b), \cdot] \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})}. \tag{2.22}$$

A su vez la función $K_{\Psi}(\gamma,\xi) = \langle \Psi_{\gamma}, \Psi_{\xi} \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})}$ es el núcleo reproductor en el espacio $\mathcal{W}_{\Psi}(L^{2}(\mathbb{R}))$.

2.7. La transformada inversa de ondícula

La ecuación (2.19) describe la forma del operador $W_{\Psi}^*: L^2(\mathbb{G}) \to L^2(\mathbb{R})$, que restringido al espacio $W_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$ resulta ser, en cierto modo, el operador $\widetilde{W}_{\Psi}^{-1}$, donde \widetilde{W}_{Ψ} es W_{Ψ} con contradominio $W_{\Psi}(L^2(\mathbb{R}))$. Sin embargo la convergencia de las integrales que aparecen en esta fórmula no puede ser garantizada ni por la desigualdad de Young ni por el test de Schur. De hecho, como es probado en el siguiente teorema, la convergencia de estas integrales debe entenderse en el sentido débil.

Estudiamos primero un caso en el que las integrales de la fórmula de recostrucción convergen en el sentido usual, a saber, cuando la fórmula es aplicada a funciones en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tales que su transformada de Fourier es integrable en \mathbb{R} . Concluimos este capítulo mostrando la fórmula para funciones en $L^2(\mathbb{R})$ en el sentido en que lo indica el teorema 2.29.

Cabe mencionar que aunque son muchos los libros que abordan el tema de la transformada de ondícula continua, pocos son los que detallan su inversión. Este capítulo está esencialmente basado en la demostración de la fórmula de reproducción en [GasWit].

La fórmula de reconstrucción

Teorema 2.29 (Fórmula de reconstrucción)

Sean Ψ una ondícula admisible (def. 2.9) y $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a) \, \Psi_{\lambda, a}(x) \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^2}, \tag{2.23}$$

donde la convergencia de las integrales debe entenderse en el sentido de que si para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$f_{\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a) \, \Psi_{\lambda, a}(x) \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}a}{\lambda^2}, \tag{2.24}$$

entonces $f_{\varepsilon} \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Un resultado útil para demostrar este teorema se enuncia a continuación.

Lema 2.30. Sean Ψ una ondícula admisible $y \ f \in L^2(\mathbb{R})$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos la función $I_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como

$$I_x(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}](a) \, \Psi_{\lambda,a}(x) \, \mathrm{d}a, \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R}^+,$$

entonces

$$I_x(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(b) |\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(b)|^2 e^{2\pi i x b} db, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tomemos

$$I_x(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a) \, \Psi_{\lambda, a}(x) \, \mathrm{d}a,$$

entonces, por (2.8) se tiene que

$$I_{x}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}](a) \, \Psi_{\lambda,a}(x) \, \mathrm{d}a = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}](a) \, \Psi_{\lambda,-x}(-a) \, \mathrm{d}a$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}](a) \, J\Psi_{\lambda,-x}(a) \, \mathrm{d}a = \langle \, \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}] \, , \, CJ\Psi_{\lambda,-x} \, \rangle,$$

por la identidad de Parseval,

$$I_{x}(\lambda) = \langle \widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}} \,, \, \mathcal{F}CJ\Psi_{\lambda,-x} \, \rangle, = \langle \widehat{f} \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}} \,, \, C\mathcal{F}[\Psi_{\lambda,-x}] \, \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(b) \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(b)} \cdot \mathcal{F}[\Psi_{\lambda,-x}](b) \, \mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(b) \, \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(b)} \cdot \widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(b) \, e^{2\pi i x b} \, \mathrm{d}b$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(b) \, |\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(b)|^{2} \, e^{2\pi i x b} \, \mathrm{d}b. \quad \blacksquare$$

Inversión de la transformada de ondícula para funciones con transformada de Fourier integrable

Antes de demostrar el teorema 2.29, revisemos primero un caso más sencillo en el que las integrales convergen en el sentido usual.

Proposición 2.31. Sean Ψ una ondícula admisible $y \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple (2.23).

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Por el lema anterior, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{+}} I_{x}(\lambda) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{2}} = \int_{\mathbb{R}^{+}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(a) |\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(a)|^{2} e^{2\pi i x a} \, \mathrm{d}a \right) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^{2}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(a) \left(\int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}(a)|^{2}}{\lambda^{2}} \, \mathrm{d}\lambda \right) e^{2\pi i x a} \, \mathrm{d}a$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(a) \left(\int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^{2}}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda \right) e^{2\pi i x a} \, \mathrm{d}a$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(a) e^{2\pi i x a} \, \mathrm{d}a = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x). \quad \blacksquare$$

En la prueba anterior la convergencia de la última integral está garantizada por la integrabilidad de la transformada de Fourier de la función f. Esta hipótesis puede relajarse, pero a cambio, la convergencia de las integrales será en el sentido débil, tal como se enuncia en el teorema 2.29.

Demostración de la fórmula de reconstrucción en $L^2(\mathbb{R})$

Demostración del teorema 2.29. Sea $\varepsilon > 0$, definamos $g_{\varepsilon} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g_{\varepsilon}(x) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} I_x(\lambda) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}, \quad \forall \ x \in \mathbb{R},$$

entonces, por el lema 2.30,

$$g_{\varepsilon}(x) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(a) |\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2 e^{2\pi i a x} \, \mathrm{d}a \right) \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}. \tag{2.25}$$

Probemos que la función $G_x(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}(a) |\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2 e^{2\pi i ax}$ es integrable en $[\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}$. Tomemos

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} |G_x(\lambda, a)| \, \mathrm{d}\lambda \right) \, \mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(a)| \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda \right) \, \mathrm{d}a.$$

Notemos que si $a \ge 0$, tomando $\xi = \lambda a$, tenemos que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} d\lambda = \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \le 1,$$

y si a < 0, tomando $-\xi = \lambda a$, se tendrá que

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda = \int_{-a\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(-\xi)|^2}{\xi} \, \mathrm{d}\xi \le 1.$$

Estimemos A en dos partes:

Para $|a| \leq 1$,

$$A_1 = \int_{-1}^1 |\widehat{f}(a)| \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} d\lambda \right) da \le \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-1,1]}(a) |\widehat{f}(a)| da \le \sqrt{2} \|f\|_2,$$

la última desigualdad gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ahora bien, para |a| > 1, hagamos $\xi = \lambda |a|$, así

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda = \int_{|a|\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\mathrm{sgn}(a)\,\xi)|^2}{\xi} \, \mathrm{d}\xi \le \frac{1}{|a|\varepsilon} \, \|\Psi\|_2^2,$$

en consecuencia

$$A_2 = \int_{|a|>1} |\widehat{f}(a)| \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} d\lambda \right) da \le \frac{\|\Psi\|_2^2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(a)}{|a|} |\widehat{f}(a)| da \le \frac{\sqrt{2} \|f\|_2 \|\Psi\|_2^2}{\varepsilon}.$$

Lo anterior prueba que G_x es integrable en $[\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}$ y que las integrales en (2.25) pueden intercambiarse, es decir que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$g_{\varepsilon}(x) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(\lambda, a) \, da \, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} G_x(\lambda, a) \, d\lambda \, da.$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definimos

$$\Theta_{\alpha,\beta}(a) := \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} \, \mathrm{d}\lambda, \quad \forall \, a \in \mathbb{R}.$$

Note que $\Theta_{0,+\infty} = 1$ de acuerdo con al condición de admisibilidad para Ψ .

Tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$g_{\varepsilon}(x) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(a) |\widehat{\Psi}(\lambda a)|^{2} e^{2\pi i a x} da \right) \frac{d\lambda}{\lambda^{2}}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(a) \Theta_{\varepsilon, +\infty}(a) e^{2\pi i a x} da$$
$$= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \Theta_{\varepsilon, +\infty}](x).$$

Por último, probemos que g_{ε} converge a f en $L^{2}(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^{+}$, lo que equivale a probar que $\widehat{f} \cdot \Theta_{\varepsilon,+\infty}$ converge a \widehat{f} en $L^{2}(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^{+}$.

Se tiene que

$$\|\widehat{f} \cdot \Theta_{\varepsilon,+\infty} - \widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f}(\Theta_{\varepsilon,+\infty} - 1)\|_2 = \|\widehat{f}(\Theta_{\varepsilon,+\infty} - \Theta_{0,+\infty})\|_2^2 = \|\widehat{f} \cdot \Theta_{0,\varepsilon}\|_2.$$

Sean

$$L_1(\varepsilon) := \int_{|a| \ge 1/\sqrt{\varepsilon}} |\widehat{f}(a)|^2 |\Theta_{0,\varepsilon}(a)|^2 da$$

у

$$L_2(\varepsilon) := \int_{|a|<1/\sqrt{\varepsilon}} |\widehat{f}(a)|^2 |\Theta_{0,\varepsilon}(a)|^2 da.$$

Claramente $\| \widehat{f} \cdot \Theta_{0,\varepsilon} \|_2^2 = L_1 + L_2$.

Por una parte, tenemos que

$$L_1(\varepsilon) = \int_{|a| \ge 1/\sqrt{\varepsilon}} |\widehat{f}(a)|^2 |\Theta_{0,\varepsilon}(a)|^2 da \le \int_{|a| \ge 1/\sqrt{\varepsilon}} |\widehat{f}(a)|^2 da = \int_{\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]} |\widehat{f}|^2 d\mu \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0.$$

Por otra, notemos que si $\xi = \lambda |a|,$ y dado que $|a| < 1/\sqrt{\varepsilon},$

$$\Theta_{0,\varepsilon}(a) = \int_0^{\varepsilon} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda} d\lambda = \int_0^{|a|\varepsilon} \frac{|\widehat{\Psi}(\operatorname{sgn}(a)\xi)|^2}{\xi} d\xi \le \underbrace{\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{|\widehat{\Psi}(\operatorname{sgn}(a)\xi)|^2}{\xi} d\xi}_{B} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\varepsilon \to 0^+} 0.$$

así

$$L_2(\varepsilon) = \int_{|a|<1/\sqrt{\varepsilon}} |\widehat{f}(a)|^2 |\Theta_{0,\varepsilon}(a)|^2 da \le B_{\varepsilon}^2 ||f||_2^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0.$$

Esto conduce finalmente a que $\widehat{f} \cdot \Theta_{\varepsilon,+\infty}$ converge a \widehat{f} en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0$, es decir, que g_{ε} converge a f en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0^+$.

2.8. Factorización del operador W_{Ψ} y la proyección ortogonal

En lo que sigue, Ψ se referirá siempre a una ondícula admisible. Denotemos por Ω_{Ψ} a la imagen de $L^2(\mathbb{R})$ bajo el operador \mathcal{W}_{Ψ} , es decir

$$\Omega_{\Psi} := \mathcal{W}_{\Psi}(L^2(\mathbb{R})).$$

A continuación reescribiremos al operador W_{Ψ} como producto de algunos operadores de acuerdo con la ecuación (2.8).

Factorización del operador \mathcal{W}_{Ψ}

Recordemos que la transformada de ondícula puede expresarse a través de la transformada de Fourier de acuerdo con (2.8) de la siguiente manera:

$$(\mathcal{W}_{\Psi}f)(\lambda, a) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda}, 0}}](a), \quad \forall (\lambda, a) \in \mathbb{G}.$$
 (2.26)

Conviene aquí aclarar cierta impresición que se ha cometido en la notación de (2.26). La transformada inversa de Fourier \mathcal{F}^{-1} es aplicada a la función $\widehat{f} \cdot \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda},0}}$, la cual es una función de dos variables. A pesar de que hemos sugerido por la notación que se aplica sólo para el parámetro de traslación a, queremos hacer ahora una diferencia entre el verdadero operador \mathcal{F}^{-1} y el operador que se ocupa en esta ecuación.

Denotemos por U al operador que actúa sobre $L^2(\mathbb{G})$ tal que para una función $w(\lambda, a)$, U es la identidad para el parámetro de escalamiento λ y la transformada inversa de Fourier de w para el parámetro de traslación a. Esto es, si $w \in L^2(\mathbb{G})$, entonces $Uw(\lambda, a)$ es la transformada inversa de Fourier de la función $w_{\lambda}(a)$. A veces este operador se denota por $I \otimes \mathcal{F}^{-1}$. Formalmente, $U : L^2(\mathbb{G}) \to L^2(\mathbb{G})$ y para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$ y $(x, a) \in \mathbb{G}$,

$$(Uw)(x,a) = \int_{\mathbb{R}} w(x,y) e^{2\pi i a y} dy.$$

Ahora es claro que la transformada inversa de Fourier a la que nos referimos en (2.26) es más precisamente U.

Además tenemos que U^* es la función de $L^2(\mathbb{G})$ en $L^2(\mathbb{G})$ tal que para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$ y $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$,

$$(U^*w)(\lambda, a) = \int_{\mathbb{R}} w(\lambda, y) e^{-2\pi i a y} dy,$$

es decir, es la identidad para λ y la transformada de Fourier para a.

Definamos también el operador $N_{\Psi}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{G})$ como $(N_{\Psi}g)(\lambda, y) = g(y) \widehat{\Psi}_{1/\lambda, 0}(y)$, o equivalentemente

$$(N_{\Psi}g)(\lambda, y) = \sqrt{\lambda} g(y) \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)}, \quad \forall (\lambda, y) \in \mathbb{G},$$
 (2.27)

para cualquier $g \in L^2(\mathbb{R})$. Notemos que N_{Ψ} es un operador isométrico, pues por el teorema de Fubini tenemos que

$$\| N_{\Psi} g \|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} |g(y)|^{2} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|^{2}}{\lambda} d\lambda dy = \| g \|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2}.$$

De lo anterior, para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$,

$$(N_{\Psi}^* w)(y) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\widehat{\Psi}(\lambda y) w(\lambda, y)}{\lambda^{3/2}} \, \mathrm{d}\lambda.$$
 (2.28)

En efecto, $N_{\Psi}^*: L^2(\mathbb{G}) \to L^2(\mathbb{R})$ cumple que para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle g, N_{\Psi}^* w \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle N_{\Psi} g, w \rangle_{L^2(\mathbb{G})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{\lambda} g(y) \, \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)} \cdot \overline{w(\lambda, y)} \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}y}{\lambda^2}.$$

Esta última integral converge, ya que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} \left| \sqrt{\lambda} g(y) \, \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)} \cdot \overline{w(\lambda, y)} \, \frac{1}{\lambda^{2}} \right| \, d\lambda \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} |g(y)| \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{|w(\lambda, y)|}{\lambda} \, d\lambda \, dy \\
\leq \left[\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^{2} \left(\int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|^{2}}{\lambda} \, d\lambda \right) \, dy \right] \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} |w(\lambda, y)|^{2} \frac{d\lambda \, dy}{\lambda^{2}} \right] \\
= \|g\|_{L^{2}(\mathbb{R})}^{2} \cdot \|w\|_{L^{2}(\mathbb{G})}^{2}.$$

Tenemos entonces que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \sqrt{\lambda} \, g(y) \, \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)} \cdot \, \overline{w(\lambda, y)} \, \frac{\mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}y}{\lambda^2} = \int_{\mathbb{R}} g(y) \, \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\widehat{\Psi}(\lambda y) w(\lambda, y)}{\lambda^{3/2}} \, \mathrm{d}\lambda\right)} \, \mathrm{d}y,$$

de donde se sigue (2.28).

En términos de los operadores U, N_{Ψ} y \mathcal{F} , la relación (2.26) se tranforma en el producto siguiente:

$$W_{\Psi} = U N_{\Psi} \mathcal{F}, \tag{2.29}$$

y consecuentemente

$$\mathcal{W}_{\Psi}^* = \mathcal{F}^* N_{\Psi}^* U^*. \tag{2.30}$$

El siguiente diagrama muestra la factorización del operador W_{Ψ} de acuerdo con 2.29:

$$L^{2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^{2}(\mathbb{R})$$

$$\downarrow^{\mathcal{W}_{\Psi}} \qquad \qquad \downarrow^{N_{\Psi}}$$

$$L^{2}(\mathbb{G}) \longleftarrow_{U} L^{2}(\mathbb{G})$$

La proyección ortogonal en Ω_{Ψ}

Definamos el operador encaje $E_{\Psi}: \Omega_{\Psi} \to L^2(\mathbb{G})$, como $E_{\Psi}w = w$, para cada función w en Ω_{Ψ} .

Sea $\widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}: L^2(\mathbb{R}) \to \Omega_{\Psi}$ tal que $\widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}f = \mathcal{W}_{\Psi}f$ para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$. Tenemos que $\mathcal{W}_{\Psi} = E_{\Psi} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}$ y

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}^{-1} = \mathcal{W}_{\Psi}^* \Big|_{\Omega_{\Psi}}.$$

Como hemos visto en el capítulo 2, W_{Ψ} es una isometría lineal cuya imagen Ω_{Ψ} resulta ser un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{G})$ llamado el espacio de transformadas de ondícula. La proyección ortogonal P_{Ψ} sobre Ω_{Ψ} , está definida como $P_{\Psi} = W_{\Psi}W_{\Psi}^*$ de acuerdo con la proposición 2.22. Tenemos así que para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$ y cada $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$,

$$(P_{\Psi}w)(\lambda, a) = (\mathcal{W}_{\Psi}\mathcal{W}_{\Psi}^*w)(\lambda, a) = \langle \mathcal{W}_{\Psi}^*w, \Psi_{\lambda, a} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle w, \mathcal{W}_{\Psi}\Psi_{\lambda, a} \rangle_{L^2(\mathbb{G})},$$

pero

$$\langle w, \mathcal{W}_{\Psi} \Psi_{\lambda, a} \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\delta, b) \left(\mathcal{W}_{\Psi} \Psi_{\lambda, a} \right) (\delta, b) \frac{d\delta db}{\delta^{2}} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{+}} w(\delta, b) \left\langle \Psi_{\lambda, a}, \Psi_{\delta, b} \right\rangle \frac{d\delta db}{\delta^{2}},$$

es decir que para cada $w \in L^2(\mathbb{G})$ y para cada $\gamma \in \mathbb{G}$,

$$P_{\Psi}w(\gamma) = \int_{\mathbb{G}} w(\zeta) \langle \Psi_{\gamma}, \Psi_{\zeta} \rangle d\nu_{L}(\zeta).$$
 (2.31)

Definamos el operador $\widetilde{P}_{\Psi}: L^2(\mathbb{G}) \to \Omega_{\Psi}$ como $P_{\Psi} = E_{\Psi} \widetilde{P}_{\Psi}$. Es fácil ver que

$$\widetilde{P}_{\Psi} = \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi} \mathcal{W}_{\Psi}^*.$$

Además, tenemos que

$$E_{\Psi} = \widetilde{P}_{\Psi}^*. \tag{2.32}$$

En efecto, sean $u \in L^2(\mathbb{G})$ y $w \in \Omega_{\Psi}$. Es claro que $w = \widetilde{P}_{\Psi}w$. Entonces

$$\langle E_{\Psi}w, u \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})} = \langle E_{\Psi} \widetilde{P}_{\Psi}w, u \rangle_{L^{2}(\mathbb{G})} = \langle P_{\Psi}w, u \rangle = \langle w, P_{\Psi}^{*}u \rangle_{\Omega_{\Psi}},$$

pero $P_{\Psi}^* = P_{\Psi}$ por ser proyección y $P_{\Psi}u = \widetilde{P}_{\Psi}u$, luego

$$\langle E_{\Psi}w, u \rangle = \langle w, P_{\Psi}u \rangle_{\Omega_{\Psi}} = \langle w, \widetilde{P}_{\Psi}u \rangle_{\Omega_{\Psi}}.$$

Esto se cumple para cada $u \in L^2(\mathbb{G})$ y $w \in \Omega_{\Psi}$, de donde se sigue (2.32).

Capítulo 3

Los operadores de localización

En esta sección se estudian los operadores de localización asociados a ondículas admisibles y se trata el caso particular de aquellos cuyos símbolos generadores sólo dependen del parámetro de escalamiento. Los resultados principales son: 1) la prueba de que estos operadores de localización son unitariamente equivalentes a ciertos operadores de multiplicación, y 2) que el álgebra C^* generada por este tipo de operadores es isométricamente isomorfa al álgebra C^* de las funciones uniformemente continuas en \mathbb{R} . Esto es resultado de la reciente investigación de Hutník, Hitníková, Maximenko y Mišcová, y se encuentra en los artículos [HutHut, HutMaxMis], publicados en 2011 y 2016 respectivamente.

En la Sección 3.1 se revisan las propiedades básicas de los operadores de Toeplitz-Calderón y de localización. Además se presenta un par de ejemplos en los que el operador de localización asociado a la ondícula sombrero es aplicado a una función tomando símbolos generadores diferentes. En la Sección 3.2 se encuentra la diagonalización, mediante una función espectral, de los operadores de localización cuyos símbolos generadores dependen solamente del parámetro de escalamiento. El rango esencial y los operadores de multiplicación (que surgen de manera natural en estos resultados) son estudiados en los Apéndices B y C. Finalmente en la Sección 3.3 se comparan de manera numérica los resultados de aplicar un operador de localización asociado a la ondícula sombrero mexicano y cuyo símbolo generador sólo depende del parámetro de escalamiento, primero de acuerdo a su definición y después utilizando la función espectral resultante de la diagonalización de dicho operador.

3.1. Los operadores de localización

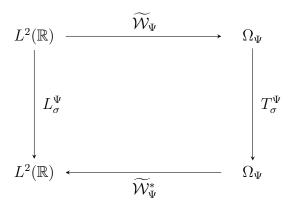
Operadores de Toeplitz-Calderón y localización

Definición 3.1 (Operador de Toeplitz-Calderón). Sea $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G})$ y Ψ una ondícula admisible. El operador de Toeplitz-Calderón relativo a la ondícula Ψ con símbolo generador σ es el operador $T_{\sigma}^{\Psi}: \Omega_{\Psi} \to \Omega_{\Psi}$ definido como $T_{\sigma}^{\Psi} = \widetilde{P}_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi}$, donde M_{σ} es el operador de multiplicación con símbolo σ .

Los detalles sobre la definición y propiedades del operador de multiplicación se encuentran en el apéndice B.

Definición 3.2 (Operador de localización). Sea $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G})$ y Ψ una ondícula admisible. Definimos el operador de localización relativo a la ondícula Ψ con símbolo generador σ , $L^{\Psi}_{\sigma}: L^{2}(\mathbb{R}) \to L^{2}(\mathbb{R})$, como $L^{\Psi}_{\sigma} = \widetilde{W}_{\Psi}^{*} T^{\Psi}_{\sigma} \widetilde{W}_{\Psi}$.

El siguiente diagrama muestra la aplicación de los operadores de Toeplitz-Calderón y de localización:



A partir de la definición del operador de Toeplitz-Calederón, es fácil ver que podemos reescribir al operador de localización sustituyendo simplemente la definición de la proyección del siguiente modo:

$$L_{\sigma}^{\Psi} = \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}^{*} T_{\sigma}^{\Psi} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi} = \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}^{*} \widetilde{P}_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi} = \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}^{*} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi} \mathcal{W}_{\Psi}^{*} M_{\sigma} E_{\Psi} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi},$$

dado que $\mathcal{W}_{\Psi}^* \mathcal{W}_{\Psi} = I$ y $\mathcal{W}_{\Psi} = E_{\Psi} \widetilde{\mathcal{W}}_{\Psi}$, se sigue que

$$L_{\sigma}^{\Psi} = \mathcal{W}_{\Psi}^* M_{\sigma} \mathcal{W}_{\Psi}. \tag{3.1}$$

A continuación se presentan algunas propiedades aritméticas de los dos tipos de operadores definidos anteriormente.

Proposición 3.3 (Propiedades aritméticas del operador de Toeplitz-Calderón). Sean $\sigma, \sigma' \in L^2(\mathbb{G})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el operador T_{σ}^{Ψ} es lineal y cumple

a)
$$T^{\Psi}_{\sigma + \sigma'} = T^{\Psi}_{\sigma} + T^{\Psi}_{\sigma'}$$
.

b)
$$T^{\Psi}_{\alpha\sigma} = \alpha T^{\Psi}_{\sigma}$$
.

$$c) \ (T^{\Psi}_{\sigma})^* = T^{\Psi}_{\overline{\sigma}} \ .$$

$$d) \parallel T_{\sigma}^{\Psi} \parallel \leq \parallel \sigma \parallel_{\infty}.$$

Demostración. Las propiedades a) y b) son prácticamente consecuencias de las propiedades del operador de multiplicación enunciadas en la proposición C.15.

c) Por (2.32) tenemos que

$$(T_{\sigma}^{\Psi})^* = (\widetilde{P}_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi})^* = E_{\Psi}^* M_{\sigma}^* \widetilde{P}_{\Psi}^* = \widetilde{P}_{\Psi} M_{\overline{\sigma}} E_{\Psi} = T_{\overline{\sigma}}^{\Psi}$$

d) Sea $w \in \Omega_{\Psi}$, entonces

$$\| T_{\sigma}^{\Psi} w \|_{2} = \| (\widetilde{P}_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi}) w \|_{2} = \| \widetilde{P}_{\Psi} (M_{\sigma} w) \|_{2} = \| P_{\Psi} (M_{\sigma} w) \|_{2} \le \| P_{\Psi} \| \| M_{\sigma} w \|_{2},$$
pero $\| P_{\Psi} \| = 1$, y

$$|| M_{\sigma} w ||_{2} \le || M_{\sigma} || || w ||_{2} = || \sigma ||_{\infty} || w ||_{2}.$$

Proposición 3.4 (Propiedades aritméticas del operador de localización) Sean $\sigma, \sigma' \in L^2(\mathbb{G})$ $y \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces el operador L^{Ψ}_{σ} es lineal y cumple:

a)
$$L^{\Psi}_{\sigma+\sigma'} = L^{\Psi}_{\sigma} + L^{\Psi}_{\sigma'}$$
.

b)
$$L^{\Psi}_{\alpha\sigma} = \alpha L^{\Psi}_{\sigma}$$
.

$$c) (L^{\Psi}_{\sigma})^* = L^{\Psi}_{\overline{\sigma}}.$$

$$d) \parallel L_{\sigma}^{\Psi} \parallel \leq \parallel \sigma \parallel_{\infty}.$$

Demostración. Los incisos a) y b) son consecuencias directas de las propiedades del operador de multiplicación y la propiedad distributiva. Para mostrar c) y d) ocuparemos la forma mostrada en (3.1) del operador de Localización.

c)
$$(L_{\sigma}^{\Psi})^* = (\mathcal{W}_{\Psi}^* M_{\sigma} \mathcal{W}_{\Psi})^* = \mathcal{W}_{\Psi}^* M_{\sigma}^* \mathcal{W}_{\Psi} = \mathcal{W}_{\Psi}^* M_{\overline{\sigma}} \mathcal{W}_{\Psi} = L_{\overline{\sigma}}^{\Psi}.$$

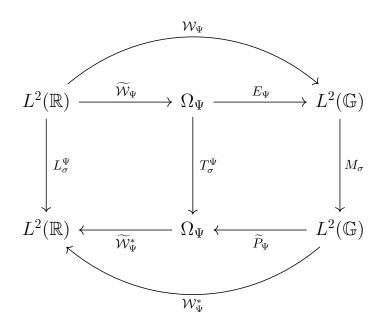
d) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|L_{\sigma}^{\Psi} f\|_{L^{2}(\mathbb{R})} = \|(\mathcal{W}_{\Psi}^{*} M_{\sigma} \mathcal{W}_{\Psi}) f\|_{L^{2}(\mathbb{R})} = \|(M_{\sigma} \mathcal{W}_{\Psi}) f\|_{L^{2}(\mathbb{G})}$$

$$\leq \|M_{\sigma}\| \|\mathcal{W}_{\Psi} f\|_{L^{2}(\mathbb{G})} = \|M_{\sigma}\| \|f\|_{L^{2}(\mathbb{R})},$$

luego, por la proposición C.14, $\parallel L_{\sigma}^{\Psi} \parallel \leq \parallel M_{\sigma} \parallel = \parallel \sigma \parallel_{\infty}$.

El siguiente diagrama muestra un panorama más general de los operadores hasta ahora definidos:



Ejemplos numéricos

Los siguientes son ejemplos que muestran la aplicación del operador de localización con dos diferentes símbolos sobre la misma función.

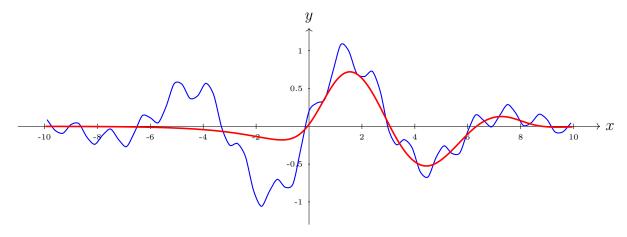
Ejemplo 3.5. Consideremos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^{-x^2/32} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{5} e^{-x^2/128} \cos(5x).$$

Apliquemos sobre ésta el operador de localización con símbolo generador

$$\sigma_1(\lambda, a) = \mathbf{1}_{[1/2, +\infty[}(\lambda) \cdot \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(a).$$

La siguiente figura muestra la gráfica de f en azul y la de $L^{\Psi}_{\sigma_1}\,f$ en rojo.

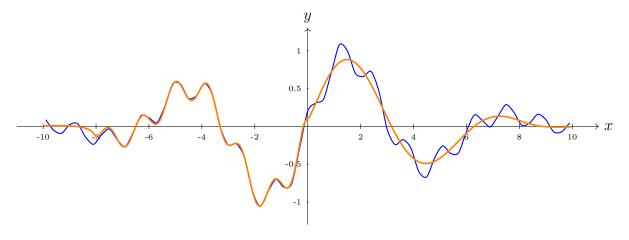


Ejemplo 3.6. Ahora apliquemos sobre la misma función el operador de localización con símbolo generador

$$\sigma_2(\lambda, a) = \mathbf{1}_G(\lambda, a),$$

donde
$$G = \mathbb{G} \setminus \{ (\lambda, a) : 0 \le \lambda \le 1/2, a > 0 \}.$$

La siguiente figura muestra la gráfica de f en azul y la de $L_{\sigma_2}^{\Psi} f$ en anaranjado.



En la gráfica podemos observar que la localización se aplicó de manera selectiva respecto a la "frecuencia" y al "tiempo".

3.2. Diagonalización de operadores de localización con símbolos que dependen sólo de la primera coordenada

En lo que sigue, sustituiremos en la definición del operador de localización la equivalencia de W_{Ψ} en términos de los operadores U, N_{Ψ} y \mathcal{F} y veremos que esta sustitución simplifica la definición del operador de localización de manera significativa cuando el símbolo de éste sólo depende del paarámetro de escalamiento, digamos, de manera informal, cuando $\sigma(\lambda, a) = \sigma(\lambda)$. Más aún, bajo esta hipótesis encontraremos un operador que diagonaliza al operador de localización. Aclaremos primero lo que formalmente significa esta hipótesis.

Símbolos que sólo dependen del parámetro de escalamiento

Definición 3.7. Sea $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G})$. Decimos que σ sólo depende del parámetro de escalamiento, si existe una función $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ tal que para cada $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, $\sigma(\lambda, a) = \tau(\lambda)$. Denotemos por $\Lambda(\mathbb{G})$ a la clase de las funciones en $L^{\infty}(\mathbb{G})$ que sólo dependen del parámetro de escalamiento,

$$\Lambda(\mathbb{G}) := \left\{ \ \sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G}) \ : \ \exists \tau : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{C}, \ \forall \ (\lambda, a) \in \mathbb{G}, \quad \sigma(\lambda, a) = \tau(\lambda) \ \right\}.$$

Abusando de la notación, escribiremos $\sigma(\lambda)$ en vez de $\sigma(\lambda, a)$ cuando $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$.

El operador R_{Ψ}

Definamos el operador $R_{\Psi}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{G})$ como $R_{\Psi} = U N_{\Psi}$. El siguiente teorema muestra algunas propiedades importantes el operador R_{Ψ} .

Teorema 3.8. El operador $R_{\Psi}^* = N_{\Psi}^* U^* : L^2(\mathbb{G}) \to L^2(\mathbb{R})$ es suprayectivo y su restricción \widetilde{R}_{Ψ}^* a Ω_{Ψ} es un isomorfismo isométrico. También el operador $\widetilde{R}_{\Psi} = (\widetilde{R}_{\Psi}^*)^* : L^2(\mathbb{R}) \to \Omega_{\Psi}$ es un isomorfismo isométrico. Además:

- a) $E_{\Psi}\widetilde{R}_{\Psi} = R_{\Psi}$,
- b) $\widetilde{R}_{\Psi}^* \widetilde{R}_{\Psi} = I : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$
- c) $\widetilde{R}_{\Psi} R_{\Psi}^* = \widetilde{P}_{\Psi}$.

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y definamos $g = \mathcal{F}^{-1} f \in L^2(\mathbb{R})$. Tomemos ahora $w = \mathcal{W}_{\Psi} g$. De acuerdo con (2.26), $w(\lambda, y) = U\left[\widehat{g} \cdot \overline{\widehat{\Psi}_{\frac{1}{\lambda}, 0}}\right](y)$, entonces

$$(U^*w)(\lambda, y) = \widehat{g}(y) \ \overline{\widehat{\Psi}_{1/\lambda,0}(y)} = \sqrt{\lambda} \ \widehat{g}(y) \ \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)}.$$

Así,

$$(N_{\Psi}^* U^* w)(y) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{(U^* w)(\lambda, y) \widehat{\Psi}(\lambda y)}{\lambda^{3/2}} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\sqrt{\lambda} \, \widehat{g}(y) \, \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)} \, \widehat{\Psi}(\lambda y)}{\lambda^{3/2}} d\lambda$$
$$= \widehat{g}(y) \cdot \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|^2}{\lambda} d\lambda = \widehat{g}(y) = f(y),$$

es decir, $R_{\Psi}^*w=f$, luego R_{Ψ}^* es suprayectiva. Claramente $w\in\Omega_{\Psi}$, luego $\widetilde{R}_{\Psi}^*=R_{\Psi}^*\Big|_{\Omega_{\Psi}}$ es biyectiva, y dado que U^* y N_{Ψ}^* son isometrías, se sigue que \widetilde{R}_{Ψ}^* es un isomorfismo isométrico sobre Ω_{Ψ} . De manera análoga se prueba que \widetilde{R}_{Ψ} es también un isomorfismo isométrico sobre $L^2(\mathbb{R})$.

- a) Se sigue de la definición de E_{Ψ} y \widetilde{R}_{Ψ} .
- b) $\widetilde{R}_{\Psi}^* \widetilde{R}_{\Psi} = N_{\Psi}^* U^* U N_{\Psi} = N_{\Psi}^* N_{\Psi} = I_{L^2(\mathbb{R})}.$

c) Tenemos que

$$\widetilde{P}_{\Psi} = E_{\Psi} P_{\Psi} = E_{\Psi} \mathcal{W}_{\Psi} \mathcal{W}_{\Psi}^* = E_{\Psi} (U N_{\Psi} \mathcal{F}) (\mathcal{F}^* N_{\Psi}^* U^*)$$

$$= E_{\Psi} (U N_{\Psi}) (\mathcal{F} \mathcal{F}^*) (N_{\Psi}^* U^*) = E_{\Psi} R_{\Psi} R_{\Psi}^*$$

$$= \widetilde{R}_{\Psi} R_{\Psi}^*. \quad \blacksquare$$

Diagonalización de operadores

La siguiente parte trata sobre la diagonalización de los operadores de localización cuyo símbolo generador depende sólo del parámetro de escalamiento. Esta idea fue desarrollada por Hutník y Hitníková en [HutHut] inspirados en los trabajos de Vasilevski [Vasil].

Suponemos a partir de aquí que Ψ denota una ondícula admisible.

Para cualquier $\sigma\in\Lambda(\mathbb{G}),$ definamos $\gamma^\Psi_\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ como la función

$$\gamma_{\sigma}^{\Psi}(y) = \int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|^{2}}{\lambda} \, \sigma(\lambda) \, d\lambda, \quad \forall \, y \in \mathbb{R}.$$
 (3.2)

Esta función está bien definida ya que gracias a la condición de admisibilidad para la ondícula Ψ y a que σ es una función esencialmente acotada, la integral converge casi en todas partes.

Lema 3.9. Sea $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces $N_{\Psi}^* M_{\sigma} N_{\Psi} = M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$.

Demostración. Notemos primero que $N_{\Psi}^* M_{\sigma} N_{\Psi} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces para cada $g \in \mathbb{R}$,

$$(N_{\Psi}^{*}M_{\sigma}N_{\Psi}g)(y) = \int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{\widehat{\Psi}(\lambda y)(M_{\sigma}N_{\Psi}g)(\lambda, y)}{\lambda^{3/2}} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{\widehat{\Psi}(\lambda y)\sigma(\lambda)\sqrt{\lambda} g(y) \overline{\widehat{\Psi}(\lambda y)}}{\lambda^{3/2}} d\lambda$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^{+}} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda y)|^{2}}{\lambda} \sigma(\lambda) d\lambda\right) g(y) = \gamma_{\sigma}^{\Psi}(y) g(y) = (M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}g)(y). \quad \blacksquare$$

La siguiente proposición muestra que el operador de Toeplitz-Calderón es diagonalizado por el operador R_{Ψ} cuando el símbolo generador σ es un elemento de $\Lambda(\mathbb{G})$.

Teorema 3.10 (Diagonalización del operador de Toeplitz-Calderón). Sea $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces

$$\widetilde{R}_{\Psi} T_{\sigma}^{\Psi} \widetilde{R}_{\Psi}^* = M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}. \tag{3.3}$$

Demostración. Dado que $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$, existe $\tau : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ tal que $\sigma(\lambda, a) = \tau(\lambda)$ para todo $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, luego

$$(U\sigma)(\lambda, a) = (U\tau)(\lambda) = \tau(\lambda) = \sigma(\lambda, a),$$

es decir $U\sigma = \sigma$ cuando $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces se tiene que

$$\widetilde{R}_{\Psi} T_{\sigma}^{\Psi} \widetilde{R}_{\Psi}^{*} = \widetilde{R}_{\Psi} (\widetilde{P}_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi}) \widetilde{R}_{\Psi}^{*} = \widetilde{R}_{\Psi} (\widetilde{R}_{\Psi}^{*} R_{\Psi} M_{\sigma} E_{\Psi}) \widetilde{R}_{\Psi}^{*}
= (\widetilde{R}_{\Psi} \widetilde{R}_{\Psi}^{*}) R_{\Psi} M_{\sigma} (E_{\Psi} \widetilde{R}_{\Psi}^{*}) = R_{\Psi} M_{\sigma} R_{\Psi}^{*}
= (N_{\Psi} U) M_{\sigma} (U^{*} N_{\Psi}^{*}) = N_{\Psi} M_{\sigma} (UU^{*}) N_{\Psi}^{*} = N_{\Psi} M_{\sigma} N_{\Psi}^{*},$$

y finalmente, por el lema 3.9, $\widetilde{R}_{\Psi} T_{\sigma}^{\Psi} \widetilde{R}_{\Psi}^* = M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$.

Teorema 3.11 (Diagonalización del operador de localización). Sea $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces el operador L_{σ}^{Ψ} es unitariamente equivalente al operador $M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$:

$$\mathcal{F}L_{\sigma}^{\Psi}\mathcal{F}^* = M_{\gamma\Psi} \tag{3.4}$$

Demostración. Sustituyendo (2.29) y (2.30) en (3.1) se tiene que

$$L_{\sigma}^{\Psi} = \mathcal{W}_{\Psi}^{*} M_{\sigma} \mathcal{W}_{\Psi} = \mathcal{F}^{*} N_{\Psi} U^{*} M_{\sigma} U N_{\Psi}^{*} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{*} N_{\Psi} M_{\sigma} U^{*} U N_{\Psi}^{*} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{*} N_{\Psi} M_{\sigma} N_{\Psi}^{*} \mathcal{F},$$

por el lema 3.9 tenemos que $L_{\sigma}^{\Psi} = \mathcal{F}^* M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}} \mathcal{F}$, o equivalentemente $\mathcal{F} L_{\sigma}^{\Psi} \mathcal{F}^* = M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$.

Como hemos visto en los teoremas 3.3 y 3.11, la función γ_{σ}^{Ψ} hace un papel importante en la diagonalización de los operadores T_{σ}^{Ψ} y L_{σ}^{Ψ} cuando $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Otra manera de denotar el operador $M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$ es γ_{σ}^{Ψ} I, y ya que esta forma remite a las matrices espectrales, suele llamarse a γ_{σ}^{Ψ} , como analogía, función espectral.

La norma del operador $M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}$ es $\|\gamma_{\sigma}^{\Psi}\|_{\infty}$ y su espectro es el rango esencial de la función γ_{σ}^{Ψ} . En consecuencia la norma y el espectro del operador L_{σ}^{Ψ} son los mismos:

$$\|L_{\sigma}^{\Psi}\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\xi)| \quad \text{y} \quad \operatorname{Sp}(L_{\sigma}^{\Psi}) = \mathcal{R}(\gamma_{\sigma}^{\Psi}).$$
 (3.5)

De acuerdo con lo anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$L^{2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^{2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{N_{\Psi}} L^{2}(\mathbb{G}) \xrightarrow{U} L^{2}(\mathbb{G})$$

$$\downarrow L_{\sigma}^{\Psi} \qquad \downarrow M_{\sigma} \qquad \downarrow M_{\sigma}$$

$$L^{2}(\mathbb{R}) \longleftarrow_{\mathcal{F}^{*}} L^{2}(\mathbb{R}) \longleftarrow_{N_{\Psi}^{*}} L^{2}(\mathbb{G}) \longleftarrow_{U^{*}} L^{2}(\mathbb{G})$$

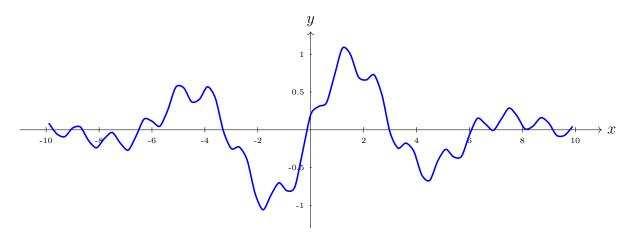
3.3. Un ejemplo numérico

De acuerdo con lo anterior, dadas una ondícula admisible Ψ , una función $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$, y una función $f \in L^2(\mathbb{R})$, existen dos maneras de aplicar a f el operador de localización relativo a la ondícula Ψ y con símbolo generador σ . Una de ellas es utilizando la definición, es decir, calculando la transformada de ondícula continua, en seguida aplicando el operador de multiplicación con símbolo σ y, finalmente, calculando la transformada inversa de ondícula. La otra manera es consecuancia de la proposición 3.11, para la cual debemos primero calcular explícitamente la función γ_{σ}^{Ψ} , y después aplicar sobre la función f (1) la transformada de Fourier, (2) el operador de multiplicación con símbolo γ_{σ}^{Ψ} y (3) la transformada inversa de Fourier. El propósito de esta sección es comparar el resultado que ambos procedimientos arrojan sobre una función dada.

Tomemos, por ejemplo, la función

$$f(x) = e^{-x^2/32} \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{5} e^{-x^2/128} \cos(5x),$$

cuya gráfica es la siguente:



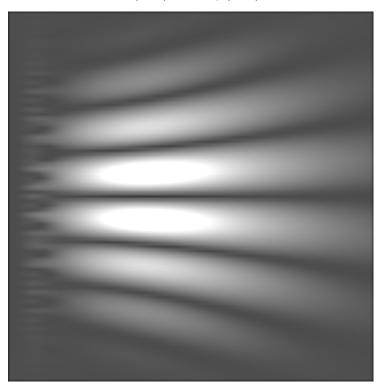
Esta función puede verse como la sobreposición de dos ondas con diferentes frecuencias. Las oscilaciones más rápidas son provocadas por el factor $\cos(5x)$ en el segundo sumando.

Para remover esas oscilaciones, consideremos sólo valores grandes del factor de escalamiento, es decir, hagamos $\sigma(\lambda) = \mathbf{1}_{[h,+\infty[}(\lambda), \text{ para algún } h \in \mathbb{R}^+ \text{ suficientemente grande.}$

Elijamos además la ondícula sombrero mexicano Ψ introducida en el ejemplo 2.12. El operador de localización L_{σ}^{Ψ} pertenece entonces a la clase de aquellos cuyo símbolo sólo depende de la primera coordenada.

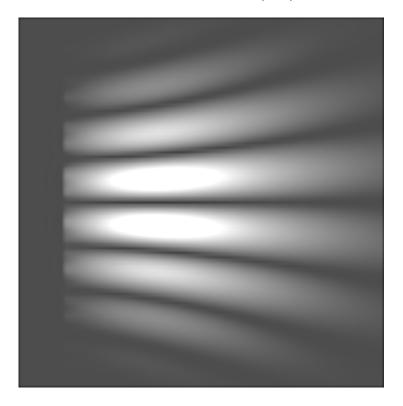
Ejemplo 3.12 (Aplicación del operador de localización de acuerdo con su definición). Mediante el algoritmo mostrado en la Sección 2.3, se calcula la transformada de ondícula continua de la función f. El resultado es el siguiente:

$$F(\lambda, a) = \mathcal{W}_{\Psi} f(\lambda, a)$$



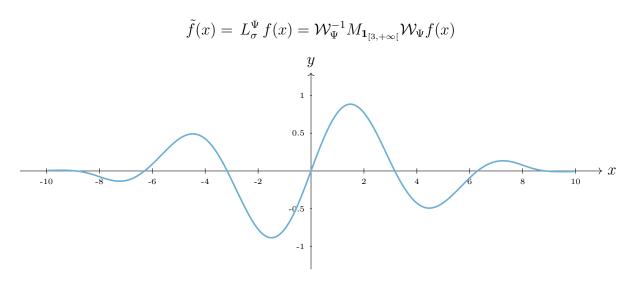
Los valores del parámetro λ más cercanos a cero están relacionados con las frecuencias más altas de la función. Para eliminarlas, escojamos como símbolo generador a la función indicadora del intervalo $[3, +\infty[$, así tenemos que

$$g(\lambda, a) = \mathbf{1}_{[3, +\infty[}(\lambda)F(\lambda, a) = M_{\mathbf{1}_{[3, +\infty[}}\mathcal{W}_{\Psi}f(\lambda, a))$$



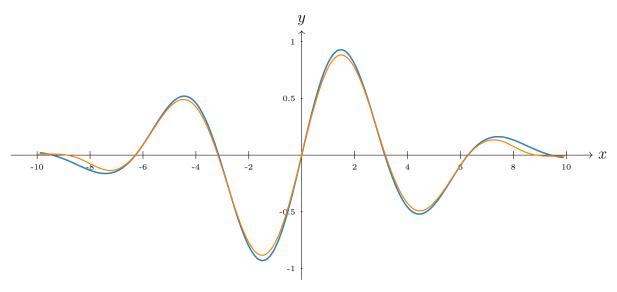
La franja negra vertical que se encuentra a la izquierda es el resultado de eliminar los valores de λ más pequeños.

Finalmente, calculamos la transformada inversa de ondícula a la función g. El resultado es el siguiente:



Como puede verse, comparando las gráficas de las funciones f y \tilde{f} , este proceso ha eliminado las oscilaciones rápidas que provoca en f el segundo sumando, dejando sólo las oscilaciones lentas del primero. Aquí adquiere, quizás, su significado más literial el nombre del operador de localizacón L_{σ}^{Ψ} , pues con la elección del símbolo $\sigma = \mathbf{1}_{[3,+\infty[}$, se ha logrado "localizar" y "separar" de la gráfica de f el primer sumando. Si la función f fuera en realidad una señal (de radio, por ejemplo) que cierto dispositivo ha logrado captar, es posible que contenga ruido como consecuencia de viajar en un medio que no es vacío. La señal podría haber sido perturbada por diferentes fuentes y habría sufrido cambios durante su viaje desde el dispositivo emisor hasta el receptor. El efecto del ruido en las señales es similar al del segundo sumando de la función que hemos analizado en el ejemplo: ocasiona oscilaciones rápidas, no siempre de manera uniforme. Este proceso que hemos realizado es análogo a la eliminación del ruido en una señal recibida.

Comparemos la función \tilde{f} en color azul con la función $f_1(x) = e^{-x^2/32} \operatorname{sen}(x)$ en color anaranjado:



Ejemplo 3.13 (Aplicación del operador de localización de acuerdo con su diagonalización). El resultado presentado en el teorema 3.11 garantiza que para la ondícula Ψ y el símbolo generador $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$, es posible encontrar una función γ_{σ}^{Ψ} tal que $L_{\sigma}^{\Psi} = \mathcal{F}^* M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}} \mathcal{F}$, donde \mathcal{F} y \mathcal{F}^* son la transformada de Fourier y su inversa.

Calculemos la función γ_{σ}^{Ψ} para la ondícula sombrero mexicano (ejemplo 2.12), cuya transformada de Fourier es

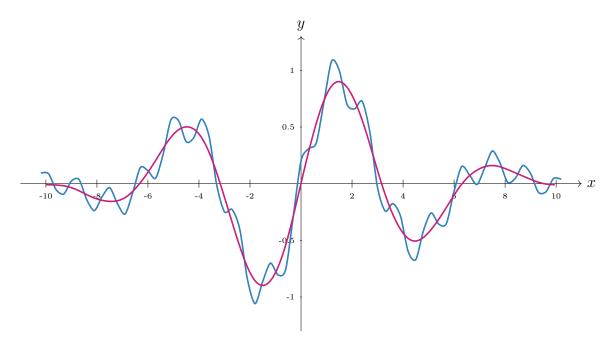
$$\widehat{\Psi}(\xi) = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi^{1/4} \xi^2 e^{-\xi^2/2}.$$

Así que

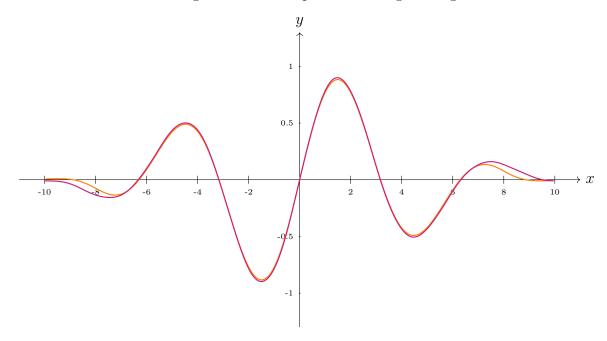
$$\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\xi) = \frac{8}{3} \pi^{1/4} \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(\lambda) \, \lambda^3 \xi^4 \, e^{-\lambda^2 \xi^2} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Tomando nuevamente $\sigma=\mathbf{1}_{[3,+\infty[},$ tenemos

$$\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\xi) = \frac{8}{3}\pi^{1/4} \int_{3}^{+\infty} \lambda^{3} \xi^{4} e^{-\lambda^{2} \xi^{2}} d\lambda = \frac{4}{3}\pi^{1/4} (9\xi^{2} + 1) e^{-9\xi^{2}}.$$



Los resultados de los dos algoritmos se comparan en la siguiente gráfica:



3.4. El álgebra C* generada por operadores de localización cuyos símbolos dependen sólo del parámetro de escalamiento

Funciones espectrales como convoluciones

Agreguemos una condición de simetría a la ondícula Ψ con el fin de alcanzar los nuevos resultados presentados en [HutMaxMis], pidamos que $|\widehat{\Psi}(-t)| = |\widehat{\Psi}(t)|$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Con esa condición adicional, tendremos que cada función espectral γ_{σ}^{Ψ} relativa al operador L_{σ}^{Ψ} con símbolo generador $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$ que ha sido construida mediante la fórmula (3.2) puede ser escrita como una convolución.

Proposición 3.14 (Deconvolución de una función espectral relativa a un operador de Toeplitz-Calderón). Sea $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces $\gamma_{\sigma}^{\Psi} = K_{\Psi} * \sigma$, para alguna función K_{Ψ} .

Demostración. Tenemos que

$$\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^+} \sigma(\lambda) \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda \xi)|^2}{\lambda} d\lambda,$$

tomemos el cambio de variable $\lambda = e^{-u}$ y $\xi = e^v$. La simetría que hemos pedido arriba nos permite ocuparnos sólo del caso donde $\xi > 0$, el otro es idéntico. Notemos además que $u = -\ln(\lambda)$, así que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} u = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} u = -\infty.$$

De este modo,

$$\gamma_{\sigma}^{\Psi}(e^{v}) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(e^{-u}) |\widehat{\Psi}(e^{v-u})|^{2} du.$$

Definamos ahora las funciones

$$\widetilde{\gamma_{\sigma}^{\Psi}}(u) := \gamma_{\sigma}^{\Psi}(e^{-u}),$$

$$\widetilde{\sigma}(u) := \sigma(e^{-u}),$$

$$K_{\Psi}(x) := |\widehat{\Psi}(e^{x})|^{2},$$

de este modo, encontramos que

$$\widetilde{\gamma_{\sigma}^{\Psi}} = \widetilde{\sigma} * K_{\Psi} . \tag{3.6}$$

La idea de deconvolución de las funciones espectrales fue resuelta por Esmeral y Maximenko en [EsmMax].

Corolario 3.15. Sea Ψ una ondícula y $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces la función espectral γ_{σ}^{Ψ} relativa al operador L_{σ}^{Ψ} es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Demostración. Es claro que $\widetilde{\sigma} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Por otro, tomando el cambio de variable $\xi = e^x$ tenemos que

 $\|K_{\Psi}\|_{1} = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\Psi}(e^{x})| dx = \int_{\mathbb{R}^{+}} |\widehat{\Psi}(\xi)|^{2} \frac{d\xi}{\xi} = 1,$

de donde $K_{\Psi} \in L^1(\mathbb{R})$. Por la proposición D.14, $\widetilde{\sigma} * K_{\Psi} \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$.

El siguiente resultado es consecuencia de la diagonalización descrita en el teorema 3.11 y de la continuidad de la función espectral mostrada en el corolario anterior.

Corolario 3.16 (Espectro del operador de localización asociado a la ondícula Ψ con simbolo generador $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$). Sea una ondícula Ψ y $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$. Entonces

$$\parallel L_{\sigma}^{\Psi} \parallel = \parallel \gamma_{\sigma}^{\Psi} \parallel_{\infty} \quad y \quad \operatorname{Sp}(L_{\sigma}^{\Psi}) = \operatorname{clos}(\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\mathbb{R})).$$

Demostración. De la proposición C.14 tenemos que

$$\parallel L_{\sigma}^{\Psi} \parallel = \parallel \mathcal{F}^* M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}} \mathcal{F} \parallel = \parallel M_{\gamma_{\sigma}^{\Psi}} \parallel = \parallel \gamma_{\sigma}^{\Psi} \parallel_{\infty},$$

y de las proposiciones B.7 y C.17, tenemos

$$\operatorname{Sp}(L_{\sigma}^{\Psi}) = \mathcal{R}(\gamma_{\sigma}^{\Psi}) = \operatorname{clos}(\gamma_{\sigma}^{\Psi}(\mathbb{R})).$$

Este corolario pone de manifiesto que en el caso en el que el símbolo generador sólo dependa del parámetro de dilatación, el estudio del operador de localización L^{Ψ}_{σ} se reduce al estudio de la función γ^{Ψ}_{σ} , lo cual resulta una gran ventaja.

Densidad de las funciones espectrales

Varios de los resultados siguientes son mostrados de manera más general en el Apéndice D. Con base en ellos y utilizando la deconvolución de Wiener (o lema de división de Wiener [ReiSte, Lema 1.4.2]) en \mathbb{R} , tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.17. Sea $K_{\Psi} \in L^1(\mathbb{R})$ el núcleo de convolución en (3.6). Si $\widehat{K_{\Psi}}(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ (K_{Ψ} cumple la condición de Wiener), entonces el conjunto

$$\mathcal{G}_{\Psi} := \{ K_{\Psi} * \sigma : \sigma \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \}$$

es un subconjunto denso de $C_u(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G})$. Por la proposición 3.14, tenemos que $\gamma_{\sigma}^{\Psi} = K_{\Psi} * \sigma$. Si K_{Ψ} cumple la condición de Wiener, por la proposición D.23, el conjunto \mathcal{G}_{Ψ} descrito en el teorema es un subespacio denso de $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$.

Definamos además el conjunto \mathcal{T}_{Ψ} de los operadores de Toeplitz-Calderón cuyo símbolo sólo dependen de la primera coordenada,

$$\mathcal{T}_{\Psi} := \left\{ T_{\sigma}^{\Psi} : \sigma \in \Lambda(\mathbb{G}) \right\}. \tag{3.7}$$

Corolario 3.18. El álgebra C* generada por el conjunto \mathcal{T}_{Ψ} es isométricamente isomorfa a $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$.

Del teorema anterior y su corolario se sigue que la cerradura uniforme del conjunto \mathcal{T}_{Ψ} coincide con el álgebra C* generada por el mismo conjunto.

La clase de los operadores de Toeplitz-Calderón con símbolo generador en el espacio $\Lambda(\mathbb{G})$

En lo siguiente, aplicaremos los resultados anteriores sobre densidad a la clase de los operadores de Toeplitz-Calderón relativos a ondículas formadas a partir de funciones de Laguerre, y cuyo símbolo depende sólo del parámetro de escalamiento.

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ consideremos la familia de ondículas admisibles $\Psi^{(k)}$ definida a través de su tranformada de Fourier como

$$\widehat{\Psi}^{(k)}(\xi) = \sqrt{2|\xi|} \,\ell_k(2|\xi|),$$

donde $\ell_n = e^{-x^2/2}L_n(x)$ es una función de Laguerre, definida mediante el polinomio de Laguerre $L_n(x)$ de orden $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el espacio $\mathcal{W}_{\Psi^{(k)}}(L^2(\mathbb{R}))$ es isométricamente isomorfo al espacio

$$A^{(k)} := \{ \mathcal{W}_k f(\lambda, a) : f \in H_2(\mathbb{R}) \} \subseteq L^2(\mathbb{G}),$$

donde $W_k f$ es el espacio de las transformadas de ondícula continua de las funciones en el espacio de Hardy $H_2(\mathbb{R})$ respecto a la ondícula $\Psi^{(k)}$.

De la diagonalización descrita en el teorema 3.3, dado $k \in \mathbb{N}_0$ y $\sigma \in \Lambda(\mathbb{G})$, el operador $T_{\sigma}^{\Psi^{(k)}}$ es unitariamente equivalente a la función espectral $\gamma_{\sigma}^{\Psi^{(k)}}$. Para simplificar la notación, escribiremos $T_{\sigma}^{(k)}$ en vez de $T_{\sigma}^{\Psi^{(k)}}$, y $\gamma_{\sigma,k}$ en vez de $\gamma_{\sigma}^{\Psi^{(k)}}$. La forma explícita de la función $\gamma_{\sigma,k}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ es

$$\gamma_{\sigma,k}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^+} \sigma\left(\frac{a}{2\lambda}\right) \ell_k^2(a) \, \mathrm{d}a.$$

Denotemos el conjunto de las funciones espectrales definidas anteriormente por \mathcal{G}_k , esto es, dado $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathcal{G}_k = \{ \gamma_{\sigma,k} : \sigma \in \Lambda(\mathbb{G}) \}.$$

Denotamos, asimismo, por $VSO(\mathbb{R}^+)$ al álgebra C^* de las funciones lentamente oscilantes en \mathbb{R}^+ . Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.19. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el conjunto \mathcal{G}_k es denso en el álgebra $C^* VSO(\mathbb{R}^+)$.

Demostración. Dividimos esta demostración en cuatro pasos descritos a continuación:

- I. Trasladamos este problema de densidad a la recta real mediante un cambio de variable apropiado para aplicar la técnica de deconvolución de Wiener.
- II. Expresamos la transformada de Fourier del núcleo de convolución como un producto de la función Gamma con un polinomio complejo P_k .
- III. Para probar que P_k no tiene ceros reales, expresamos P_k como una combinación lineal de polinomios simétricos de Miexner-Pollaczek, y trasladamos los ceros a la recta real usando ciertas transformaciones lineales.
- IV. Probamos que los polinomios transformados satisfacen cierta relación de recurrencia y en consecuencia son ortogonales. Esto garantizará la condición de Wiener, necesaria para que el conjunto \mathcal{G}_k sea denso en VSO(\mathbb{R}^+) para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Paso I: Trasladando el problema a la recta real.

Después del cambio de variable $\lambda = e^x/2$, $a = e^y$, con

$$b(x) = \sigma(e^{-x})$$
 y $\Gamma_{b,k}(x) = \gamma_{\sigma,k}(e^x/2),$

obtenemos

$$\Gamma_{b,k}(x) = \int_{\mathbb{R}} b(x - y) K_k(y) \, dy,$$

donde

$$K_k(x) = e^x \ell_k^2(e^x) = \frac{e^x}{e^{e^x}} (L_k(e^x))^2.$$

Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}_0, K_k \in L^1(\mathbb{R}), y$

$$||K_k||_1 = \int_{\mathbb{R}} K_k(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \ell_k^2(e^x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \ell_k^2(t) dt = 1.$$

Necesitamos ahora probar que para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el conjunto

$$\mathcal{G}_k = \{ \Gamma_{b,k} : b \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \}$$

es un subconjunto denso en el álgebra C* de las funciones uniformemente continuas. Como $b \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ y $K_k \in L^1(\mathbb{R})$, se tiene por la proposición D.14, $\Gamma_{b,k} \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$. De acuerdo con el teorema 3.17, es suficiente probar que K_k cumple la condición de Wiener, es decir, que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{K}_k(t) \neq 0$.

Paso II: La transformada de Fourier del núcleo de convolución.

Comencemos con la fórmula de Howell,

$$\left(L_n^{(\lambda)}(x)\right)^2 = \frac{\Gamma(1+\lambda+n)}{2^{2n}n!} \sum_{r=0}^n \binom{2n-2r}{n-r} \frac{(2r)!}{r!} \frac{1}{\Gamma(1+\lambda+r)} L_{2r}^{(2\lambda)}(2x).$$

En particular, para $\lambda = 0$,

$$L_k^2(x) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{r=0}^k \alpha_r(k) L_{2r}(2x)$$
, donde $\alpha_r(k) := \binom{2k-2r}{k-r} \binom{2r}{r}$.

Entonces, el núcleo de convolución K_k se puede escribir como

$$K_k(x) = \frac{1}{2^{2k}} \frac{e^x}{e^{e^x}} \sum_{r=0}^k \alpha_r(k) L_{2r}(2e^x),$$

y la transformada de Fourier de cada sumando es

$$\int_{\mathbb{R}} L_{2r}(2e^x) e^{-2\pi ixt - e^x} e^x dx = 2^{2\pi it - 1} \int_{\mathbb{R}^+} L_{2r}(z) e^{-z/2} z^{-2\pi it} dz.$$

Aplicando [GraRyz] (fórmula 7.414(7)) a la última integral,

$$2^{2\pi it-1} \int_{\mathbb{R}^+} L_{2r}(z) e^{-z/2} z^{-2\pi it} dz = \Gamma(1 - 2\pi it) {}_{2}F_{1}(-2r, 1 - 2\pi it; 1; 2)$$
$$= \Gamma(1 - 2\pi it) {}_{2}F_{1}(-2r, 2\pi it; 1; 2),$$

donde $_2F_1(a,b;c;z)$ es la función hipergeométrica gaussiana. De ahí, la transformada de Fourier de K_k es

$$\widehat{K}_k(t) = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \Gamma(1 - 2\pi i t) P_k(2\pi t),$$

donde

$$P_k(t) = \frac{(-1)^k (k!)^2}{2^{2k}} \sum_{r=0}^k \alpha_r(k) {}_2F_1(-2r, it; 1; 2).$$

Los primeros polinomios son:

$$P_0(t) = 1,$$

$$P_1(t) = -1 + it + t^2,$$

$$P_2(t) = 4 - 6it - 7t^2 + 2it^3 + t^4, \text{ y}$$

$$P_3(t) = -36 + 66it + 85t^2 - 39it^3 - 22t^4 + 3it^5 + t^6.$$

Como Γ no tiene ceros, sólo falta probar que cada polinomio P_k no tiene raíces reales, es decir que $P_k(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Paso III: P_k como combinación lineal de polinomios ortogonales.

Los polinomios de Mixner del segundo tipo, $m_n^{(\lambda)}(x,\phi)$ (también llamados polinomios de Meixner-Pollaczek) son, de acuerdo con [KoeLesSwa, fórmula 9.7.1],

$$m_n^{(\lambda)}(x,\phi) := \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\phi} {}_2F_1(-n,\lambda+ix;2\lambda;1-e^{-2i\phi}).$$

Y ya que

$$_{2}F_{1}(-2r, it; 1; 2) = (-1)^{r} m_{2r}^{(1/2)} \left(t + \frac{i}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

cada P_k puede escribirse como

$$P_k(t) = \frac{(-1)^k (k!)^2}{2^{2k}} \sum_{r=0}^k (-1)^r \alpha_r(k) \, m_{2r}^{(1/2)} \left(t + \frac{i}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Algunos experimentos en Wolfram Mathematica muestran que los ceros de P_k están sobre la recta horizontal Im(t) = -1/2. Esta observación motiva el siguiente cambio de variables:

$$Q_k(x) = 4^k P_k\left(\frac{x-i}{2}\right).$$

Sustituyendo P_k en la expresión anterior, tenemos

$$Q_k(x) = (-1)^k (k!)^2 \sum_{r=0}^k (-1)^r \alpha_r(k) \, m_{2r}^{(1/2)} \left(\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Los primeros polinomios de esta clase son:

$$Q_0(x) = 1,$$

$$Q_1(x) = -3 + x^2,$$

$$Q_2(x) = 41 - 22x^2 + x^4, \text{ y}$$

$$Q_3(x) = -1323 + 907x^2 - 73x^4 + x^6.$$

Los polinomios $m_n^{(1/2)}(\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2})$ tienen un interés particular pues poseen diversas propiedades interesantes (ver, por ejemplo, [Araaya]). Éstos son conocidos como polinomios simétricos de Meixner-Pollaczek, pues satisfacen la relación simétrica

$$m_n^{(1/2)}\left(\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n m_n^{(1/2)}\left(-\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

lo que significa que cada polinomio $m_{2r}^{(1/2)}(\frac{x}{2},\frac{\pi}{2})$ es una función par. Por lo tanto, cada polinomio Q_k es también una función par.

Sea M_n la forma mónica (transformada) de $m_n^{(1/2)}(\frac{x}{2}, \frac{\pi}{2})$, es decir,

$$M_n(x) := (2n)! \, m_{2n}^{(1/2)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Esta forma mónica está completamente descrita por la fórmula de recursión [Araaya]:

$$xM_n(x) = M_{n+1}(x) + a_n M_n(x) + b_n M_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$
(3.8)

donde $M_{-1}(x) = 0$, $M_0(x) = 1$, y $a_n = 4n(2n+1) + 1$, $b_n = 4n^2(2n-1)^2$.

Entonces escribimos $Q_k(x)$ como $R_k(x^2)$, donde

$$R_k(x) = \sum_{r=0}^k \beta_r(k) M_r(x)$$
 y $\beta_r(k) := (-1)^{k-r} {k \choose r}^2 (2k - 2r)!$

Los primeros polinomios de este tipo son:

$$R_0(x) = 1,$$

 $R_1(x) = -3 + x,$
 $R_2(x) = 41 - 22x + x^2, \text{ y}$
 $R_3(x) = -1323 + 907x - 73x^2 + x^3.$

Luego, cada R_k es un polinomio mónico de grado k y cada R_k alterna su signo (debido a que M_k es alternante).

Observación. La aparición de los polinomios simétricos de Meixner-Pollaczek en la parte de la transformada de Fourier del núcleo de convolución relativo a las funciones de Laguerre es natural, pues las funciones de Laguerre y los polinomios de Meixner-Pollaczek están conectados vía la transformada de Mellin [Inoue, Koor].

Paso IV: $(R_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una familia de polinomios ortogonales.

Proposición 3.20. Los polinomios R_k satisfacen la relación de recurrencia

$$xR_k(x) = R_{k+1}(x) + A_k R_k(x) + B_k R_{k-1}(x),$$
(3.9)

donde $A_k = 8k(k+1) + 3$, $B_k = 16k^4$, $y R_{-1}(x) = 0$, $R_0(x) = 1$.

Demostración. Para k=0 el resultado es trivial. Consideremos $k\geq 1$. De la relación

$$xR_k(x) = xM_k(x) + \sum_{r=0}^{k-1} \beta_r(k)xM_r(x)$$

y de la relación descrita en (3.8) para los polinomios M_r , se sigue que

$$xR_{k}(x) = R_{k+1}(x) + A_{k}R_{k}(x) + B_{k}R_{k-1}(x)$$

$$+ [a_{k} + \beta_{k-1}(k) - \beta_{k}(k+1) - A_{k}]M_{k}(x)$$

$$+ \sum_{r=0}^{k-1} [b_{r+1}\beta_{r+1}(k) + (a_{r} - A_{k})\beta_{r}(k) + \beta_{r-1}(k) - \beta_{r}(k+1) - B_{k}\beta_{r}(k-1)]M_{r}(x),$$

usando la convención de que $\beta_{-1}(k):=0$. Entonces R_k satisface la relación de recurrencia 3.8 si y sólo si

$$a_k + \beta_{k-1}(k) - \beta_k(k+1) = A_k,$$

$$b_{r+1}\beta_{r+1}(k) + (a_r - A_k)\beta_r(k) - B_k\beta_r(k-1) = \beta_r(k+1) - \beta_{r-1}(k)$$

para $r=0,1,\ldots,k-1$. La primera identidad se tiene debido a que $\beta_n(n+1)=-2(n+1)^2$ para cada n, y entonces

$$a_k + \beta_{k-1}(k) - \beta_k(k+1) = 4k(2k+1) + 1 - 2k^2 + 2(k+1)^2 = 8k^2 + 8k + 3 = A_k.$$

Para los siguientes cálculos, aplicamos algunas identidades binomiales. Para cada $k \geq 1$ y $r=0,1,\ldots,k-1$, tenemos

$$\beta_r(k+1) - \beta_{r-1}(k) = (-1)^{k+r+1} (2k - 2r + 2)! \left(\binom{k+1}{r}^2 - \binom{k}{r-1}^2 \right)$$
$$= (-1)^{k+r+1} (2k - 2r + 2)! \binom{k}{r} \binom{k+1}{r} \frac{k+1+r}{k+1}$$
$$= \lambda_r(k) \cdot (2k - 2r + 1)(2k - 2r - 1)(k+r+1),$$

donde la identidad de Pascal.

$$\binom{n+1}{m} - \binom{n}{m-1} = \binom{n}{m},$$

así como las identidades del coeficiente binomial,

$$\binom{n+1}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m} \frac{n+1+m}{n+1},$$
$$(m+1) \binom{n}{m+1} = n \binom{n-1}{m},$$

son usadas, y

$$\lambda_r(k) := 4 (-1)^{r+k+1} {k \choose r}^2 (k-r) \cdot (2k-2r+2)!.$$

Por otro lado, utilizando las mismas identidades del coeficiente binomial, se llega a que

$$b_{r+1}\beta_{r+1}(k) = \lambda_r(k) \cdot (2r+1)^2(k-r),$$

$$(a_r - A_k)\beta_r(k) = \lambda_r(k) \cdot (2k-2r-1)[4k(k+1) - 2r(2r+1) + 1],$$

$$B_k\beta_r(k-1) = \lambda_r(k) \cdot 4k^2(k-r).$$

Por lo que

$$b_{r+1}\beta_{r+1}(k) + (a_r - A_k)\beta_r(k) - B_k\beta_r(k-1) = \lambda_r(k) \cdot \Theta(k,r),$$

donde

$$\Theta(k,r) := (2r+1)^2(k-r) + (2k-2r-1)[4k(k+1) - 2r(2r+1) + 1] - 4k^2(k-r).$$

De ahí que, finalmente,

$$\Theta(k,r) = (2k - 2r + 1)(2k - 2r - 1)(k + r + 1).$$

Entonces, la sucesión $(R_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ satisface la relación de recurrencia (3.9).

Ahora continuamos con la demostración del teorema 3.19.

Del teorema de Favard [MarAlv], los polinomios R_k son ortogonales con respecto a una medida positiva en \mathbb{R} . Por lo tanto, todo los ceros de R_k son reales y simples.

Así, los ceros de Q_k pertenecen al conjunto $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, y los ceros de P_k pertenece a su vez a

$$\left(\mathbb{R} - \frac{1}{2}i\right) \cup \left(i\mathbb{R} - \frac{1}{2}i\right).$$

La única intersección de este conjunto con la recta real es el punto 0, y puede ser fácilmente verificado que

$$P_k(0) = (-1)^k (k!)^2 \neq 0.$$

Así que ningún polinomio P_k se anula en \mathbb{R} , y en consecuencia

$$\widehat{K}_k(t) = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \Gamma(1 - 2\pi i t) P_k(2\pi t)$$

tampoco se anula en \mathbb{R} . Por lo tanto, del teorema 3.17, el conjunto $\mathcal{G}_k = \{\Gamma_{b,k}; b \in L_{\infty}(\mathbb{R})\}$ es denso en $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ y esto implica que \mathcal{G}_k es denso en $VSO(\mathbb{R}^+)$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Ahora la prueba del teorema 3.19 está completa.

Apéndice A

La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

Este apéndice estudia la extensión del operador de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$. En la Sección A.1 se estudian algunas de las propiedades de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ y se enuncia un criterio para su inversión. Se estudian en la Sección A.2 las funciones $r\'{a}pidamente$ decrecientes y la clase de Schwartz. A continuación, se muestra que esta clase de funciones es un subespacio de $L^1(\mathbb{R})$ que es cerrado bajo transformacón de Fourier. Se define la transformada inversa de Fourier para funciones en la clase de Schwartz y se muestra que es un mapeo biyectivo. En la Sección A.3, empleando sucesiones de Dirac, se muestra que la clase de funciones continuas infinitamente diferenciables de soporte compacto es densa en $L^1(\mathbb{R})$ y además se prueba que la clase de Schwartz es un subespacio lineal denso en $L^2(\mathbb{R})$ y se muestra la identidad de Parseval. Finalmente, en la Sección A.4 se concluye que la transformada de Fourier definida en $L^1(\mathbb{R})$ puede ser extendida de manera única a una isometría en $L^2(\mathbb{R})$ y se da una interpretación de límite a la integral que define la transformada de Fourier para funciones en $L^2(\mathbb{R})$. Estos resultados y sus demostraciones se basan en [GasWit].

A.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Convergencia de la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definición A.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos la transformada de Fourier de f como

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$
 (A.1)

Usualmente se escribe \hat{f} en vez de $\mathcal{F}f$. La integral anterior tiene sentido debido a que $|e^{-2\pi i \xi x}| = 1$.

Teorema A.2 (Riemann-Lebesgue). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

- a) \widehat{f} es continua y acotada en \mathbb{R} .
- b) \mathcal{F} es un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^{\infty}(\mathbb{R})$ $y \parallel \widehat{f} \parallel_{\infty} \leq \parallel f \parallel_1$.
- $c)\,\lim_{|\xi|\to+\infty}|\widehat{f}(\xi)|=0.$

Proposición A.3 (Fórmula de intercambio). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces \widehat{fg} y $f\widehat{g}$ están ambas en $L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$
 (A.2)

La transformada inversa de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definamos la transformada de Fourier conjugada como la función $\overline{\mathcal{F}}$ tal que para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx. \tag{A.3}$$

Al igual que \mathcal{F} , la transformada $\overline{\mathcal{F}}$ es un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^{\infty}(\mathbb{R})$, además tiene las mismas propiedades enunciadas para \mathcal{F} en el teorema A.2, y satisface la fórmula de intercambio (A.2). Como resultado se tiene el siguiente teorema.

Teorema A.4 (Inversión de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$). Si f y \hat{f} están ambas en $L^1(\mathbb{R})$, entonces $\overline{\mathcal{F}}\hat{f}(t) = f(t)$ en todos los puntos donde f es continua.

Proposición A.5. Sea f una función dos veces continuamente diferenciable. Si f, f' y f'' están en $L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

A.2. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

La clase de Schwartz

Ahora hablaremos sobre un subespacio de $L^1(\mathbb{R})$ que es invariante bajo la transformda de Fourier, la derivación y la multiplicación por polinomios.

Definición A.6. Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ decae o decrece rápidamente si para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|x| \to +\infty} |x^n f(x)| = 0.$$

Por ejemplo, la función $x\mapsto e^{-|x|}$ decae rápidamente.

Diremos además que una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es localmente integrable si para cada conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$, la integral $\int_K |f|$ es finita. En tal caso escribimos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

Proposición A.7. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y decae rápidamente, entonces x^n $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición A.8. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ decae rápidamente, \widehat{f} es infinitamente diferenciable. Si f es infinitamente diferenciable y $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces \widehat{f} decae rápidamente.

Definición A.9 (Clase de Schwartz). Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciables y tales que ellas y todas sus derivadas decaen rápidamente. Al conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ le llamamos la *clase de Schwartz*.

Proposición A.10. El espacio $S(\mathbb{R})$ tiene las siguientes propiedades:

- a) $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo multiplicación por polinomios.
- b) $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo derivación.
- c) $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

Teorema A.11. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo transformaciones de Fourier.

Ahora necesitamos la noción de convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición A.12 (Convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Se dice que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si para todo $p,q\in\mathbb{N}_0$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f_n^{(q)}(x)| = 0.$$

En tal caso escribimos $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$. Claramente $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} f$ si y sólo si $f_n - f \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$.

Tomando p = 0, la definición anterior implica que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y las sucesiones de todas sus derivadas $\left(f_n^{(q)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, con $q \in \mathbb{N}$, convergen uniformemente en \mathbb{R} .

Proposición A.13. Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces

- a) (Continuidad de la derivada) $f'_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$,
- b) $Pf_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ para todo polinomio P,
- c) $f_n \to 0$ en $L^1(\mathbb{R})$,
- d) (Continuidad de la transformada de Fourier) $\widehat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$.

La transformada inversa de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces f es continua en todas partes y $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. De acuerdo con el teorema A.4, $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$. Del mismo modo $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f$, así que \mathcal{F} es un operador biyectivo en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y su inversa es $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

Ejemplo A.14 (Función gaussiana). La transformada de Fourier de $g(x) = e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es la misma función $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. Esta función es un punto fijo de \mathcal{F} .

A.3. Densidad de $S(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$

La convolución en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

En el Apéndice D de esta tesis se encuentran algunos resultados útiles acerca de las convoluciones en $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ y $L^{\infty}(\mathbb{R})$, así como el concepto de aproximación de la identidad a través de sucesiones de Dirac.

Denotamos por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ al conjunto de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en \mathbb{R} .

Teorema A.15 (Densidad de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ y en $L^2(\mathbb{R})$). El conjunto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$ y en $L^2(\mathbb{R})$.

Dado que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, sabemos que la convolución de dos elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está también en $L^1(\mathbb{R})$. El siguiente resultado mejora esta situación.

Proposición A.16. Supongamos que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Como consecuencia, la convolución en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un operador continuo.

Teorema A.17 (Densidad de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$). $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subespacio lineal denso de $L^2(\mathbb{R})$.

Este teorema es consecuencia del teorema A.15.

A.4. La extensión de la transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R})$

Proposición A.18 (La identidad de Plancherel-Parseval en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Sean $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces

(i)
$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle,$$
 (A.4)

(ii)
$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$
 (A.5)

Teorema A.19 (Extensión de la transformada de Fourier)

Los operadores \mathcal{F} y \mathcal{F}^{-1} se extienden de manera única a isometrías en $L^2(\mathbb{R})$. Con la misma notación para las extensiones, tenemos que para todo $f, g \in L^2(\mathbb{R})$,

a)
$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f \ \mu - \text{c.t.p.}$$

b)
$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle$$
,

c)
$$|| f ||_2 = || \mathcal{F} f ||_2$$
.

Proposición A.20 (Sentido de la integral para la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$) La transformada de Fourier definida en $L^1(\mathbb{R})$ y la que se obtiene por extensión en $L^2(\mathbb{R})$ coinciden en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $\mathcal{F}f$ es el límite en $L^2(\mathbb{R})$ de la sucesión g_n definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$g_n(\xi) = \int_{-n}^n f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}.$$
 (A.6)

Asimismo, si $F\in L^2(\mathbb{R}),\,\mathcal{F}^{-1}F$ es el límite en $L^2(\mathbb{R})$ de la sucesión h_n definida como

$$h_n(x) = \int_{-n}^{n} F(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A.5. Los operadores de conjugación y reflexión

Definamos los operadores C y J como sigue: dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$(Jf)(x) = f(-x),$$

 $(Cf)(x) = \overline{f(x)}.$

Proposición A.21 (Operadores de reflexión y conjugación). Los operadores J y C definidos arriba y el operador de Fourier \mathcal{F} cumplen las siguientes propiedades:

a)
$$JJ = CC = I$$
.

b)
$$CJ = JC$$
.

c)
$$J\mathcal{F} = \mathcal{F}J$$
.

d)
$$\mathcal{F}CJ = J\mathcal{F}C = C\mathcal{F}$$

e)
$$C\mathcal{F}J = \mathcal{F}C$$
.

Demostración. Es claro que JJ = CC = I. Notemos ahora que

$$C(Jf)(x) = \overline{Jf(x)} = \overline{f(-x)} = \overline{f}(-x) = Cf(-x) = J(Cf)(x),$$

así que (CJ)f(x) = (JC)f(x).

Tenemos además que

$$(J\mathcal{F})[f](x) = \mathcal{F}[f](-x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i(-x)\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i x(-\xi)} d\xi,$$

tomando $u = -\xi$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i x(-\xi)} d\xi = -\int_{\mathbb{R}} f(-u) e^{-2\pi i x u} (-1) du = \int_{\mathbb{R}} Jf(u) e^{-2\pi i x u} du = (\mathcal{F}J)[f](x),$$

de donde $J\mathcal{F} = \mathcal{F}J$.

Asimismo,

$$(C\mathcal{F})[f](x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\xi)} e^{-2\pi i (-x) \xi} d\xi$$
$$= \int_{\mathbb{R}} Cf(\xi) e^{-2\pi i (-x) \xi} d\xi = (J\mathcal{F}C)[f](x),$$

de donde $C\mathcal{F} = J\mathcal{F}C$.

Además $\mathcal{F}CJ = \mathcal{F}JC = J\mathcal{F}C = C\mathcal{F}$. Y finalmente

$$C\mathcal{F}J = J\mathcal{F}CJ = J\mathcal{F}JC = JJ\mathcal{F}C = \mathcal{F}C.$$

Apéndice B

El rango esencial

Estudiamos en este apéndice algunas propiedades del rango esencial de una función desde el punto de vista de la teoría de la medida. En la Sección B.1 tratamos sobre las propiedades topológicas del rango esencial de una función definida en un espacio de medida y contradominio en un espacio topológico. A partir de aquí, se estudia sólo el caso en el que dicho espacio de medida es un espacio de Lindelöf. En la Sección B.2 se muestra que para el caso de las funciones continuas, el rango esencial puede escribirse en términos de la imagen. La relación entre rango esencial y supremo esencial de una función se describe en la Sección B.3. Algunas propiedades artiméticas del rango esencial son enunciadas en la Sección B.4, y finalmente, en la Sección B.5 exponemos, de manera general, algunas aplicaciones de este concepto en el análisis funcional y la teoría de operadores.

La importancia de este apéndice recae sobre todo en el resultado de diagonalización del operador de localización en el Capítulo 3, pues surge de manera natural cierta función (denominada función espectral) cuyo rango esencial coincide con el espectro de dicho operador. En general, resulta complicado encontrar reunido este material en un mismo libro, y es por eso que hemos dedicado este apéndice al estudio y recopilación de algunos resultados importantes sobre el rango esencial.

B.1. Definición y propiedades topológicas

Supondremos en lo que sigue que (X, \mathscr{A}, μ) es un espacio de medida y que (Y, τ_Y) es un espacio topológico. Denotamos por $\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, Y)$ al conjunto de todas las funciones \mathscr{A} —medibles de X en Y:

$$\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \tau_Y \quad f^{-1}(B) \in \mathscr{A} \right\}.$$

Dado $y \in Y$, denotamos por $\tau_Y(y)$ al conjunto de todos los conjuntos abiertos en Y que contienen a y:

$$\tau_Y(y) := \{ B \in \tau_Y : y \in B \}.$$

Dado un conjunto $A \subseteq Y$, denotamos por clos(A) su cerradura.

Definición B.1 (Rango esencial de una función). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, Y)$. Entonces, el rango esencial de f se define como el conjunto

$$\mathcal{R}(f) := \left\{ y \in Y : \forall B \in \tau_Y(y) \mid \mu(f^{-1}(B)) > 0 \right\}.$$

Proposición B.2 (El rango esencial es siempre cerrado). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, Y)$. Entonces $\mathcal{R}(f)$ es un subconjunto de Y cerrado.

Demostración. Probaremos que $Y \setminus \mathcal{R}(f)$ es abierto. Sea $y \in Y \setminus \mathcal{R}(f)$. Por la definición de rango esencial, existe $B_0 \in \tau_Y(y)$ tal que $\mu(f^{-1}(B_0)) = 0$. El resultado se sigue del hecho de que $B_0 \cap \mathcal{R}(f) = \emptyset$. Sea $w \in B_0$ y $B_1 \in \tau_Y(w)$ tales que $B_1 \subseteq B_0$. Entonces $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_0)$. La última imagen inversa tiene medida cero, en consecuencia también la primera. Así, $w \notin \mathcal{R}(f)$.

Un espacio topológico Y se dice espacio de Lindelöf si para cada cubierta abierta de Y, existe una subcubierta numerable. En la siguiente proposición nos restringimos al caso de espacios de Lindelöf. Note que todo espacio metrizable es segundo numerable y, en consecuencia, un espacio de Lindelöf. Los ejemplos más comunes son cuando $Y = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{C}^m$, $Y = [-\infty, +\infty]$ y $Y = [0, +\infty]$.

Proposición B.3 (Los valores de una función casi siempre pertenecen a su rango esencial). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, Y)$, donde Y es un espacio de Lindelöf. Denotemos por A la imagen inversa del complemento de $\mathcal{R}(f)$:

$$A := f^{-1}(Y \setminus \mathcal{R}(f)) = X \setminus f^{-1}(\mathcal{R}(f)).$$

entonces $\mu(A) = 0$.

Demostración. Para cada $v \in Y \setminus \mathcal{R}(f)$, por definición de $\mathcal{R}(f)$, existe una vecindad abierta $U(v) \in \tau_v$ tal que $\mu(f^{-1}(U(v))) = 0$. Intersectando U(v) con $Y \setminus \mathcal{R}(f)$, obtenemos una vecindad abierta B(v) de v que está completamente contenida en $Y \setminus \mathcal{R}(f)$ y satisface que $\mu(f^{-1}(B(v))) = 0$.

La familia $(B(v))_{v \in Y \setminus \mathcal{R}(f)}$ es una cubierta abierta del conjunto abierto $Y \setminus \mathcal{R}(f)$. Como Y es un espacio de Lindelöf, existe un conjunto numerable C tal que

$$Y \setminus \mathcal{R}(f) = \bigcup_{v \in C} B(v).$$

Luego, por la propiedad subaditiva de μ ,

$$\mu(A) \le \sum_{v \in C} \mu\left(f^{-1}\left(B(v)\right)\right) = 0.$$

Proposición B.4. Sea Y un espacio de Lindelöf, $\mu(X) > 0$ y $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, Y)$. Entonces el conjunto $\mathcal{R}(f)$ no es vacío.

Demostración. Este es un corolario de la proposición anterior. De hecho, si suponemos que $\mathcal{R}(X) = \emptyset$, entonces

$$\mu(X) = \mu(f^{-1}(\mathcal{R}(f))) + \mu(f^{-1}(Y \setminus \mathcal{R}(f))) = 0,$$

lo que contradice la hipótesis de que $\mu(X) > 0$.

Proposición B.5. Sea Y un espacio de Lindelöf, Z un espacio topológico, $f \in \mathcal{M}(X, \mathscr{A}, Y)$ y sea $\varphi : Y \to Z$ una función continua. Entonces

$$\mathcal{R}(\varphi \circ f) = \operatorname{clos}(\varphi(\mathcal{R}(f))).$$

Demostración. Primero probaremos que para cada $w \in \mathcal{R}(\varphi \circ f)$ y cada $B \in \tau_Z(w)$ la intersección $B \cap \varphi(\mathcal{R}(f))$ no es vacía.

Supongamos que $B \cap \varphi(\mathcal{R}(f)) = \emptyset$, entonces $B \subseteq Z \setminus \varphi(\mathcal{R}(f))$. Como esta contención se preserva bajo la imagen inversa de φ , y $\varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{R}(f)) \supseteq \mathcal{R}(f)$, tenemos que

$$\varphi^{-1}(B) \subseteq \varphi^{-1}(Z \setminus \varphi(\mathcal{R}(f))) = Y \setminus \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{R}(f))) \subseteq Y \setminus \mathcal{R}(f).$$

Se sigue que $f^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(Y \setminus \mathcal{R}(f))$, pero $\mu(f^{-1}(Y \setminus \mathcal{R}(f))) = 0$ como ya se probó en la proposición B.2, entonces

$$\mu\Big(f^{-1}(\varphi^{-1}(B)\Big) = \mu\Big(\big(\varphi \circ f\big)^{-1}(B)\Big) = 0,$$

lo que implica que $w \in Z \setminus \mathcal{R}(\varphi \circ f)$, lo que resulta una contradicción. Por lo tanto

$$\mathcal{R}(\varphi \circ f) \subseteq \operatorname{clos}(\varphi(\mathcal{R}(f))).$$

Por otro lado, probaremos que $\varphi(\mathcal{R}(f)) \subseteq \mathcal{R}(\varphi \circ f)$. Como $\mathcal{R}(\varphi \circ f)$ es un subconjunto cerrado de Z, la conclusión se sigue de inmediato.

Sean $w \in \varphi(\mathcal{R}(f))$ y $B \in \tau_Z(w)$. Entonces existe $z \in \mathcal{R}(f)$ tal que f(z) = w. Como φ es una función continua y B es un conjunto abierto, $\varphi^{-1}(B)$ es también abierto en Y, luego, existe $U \in \tau_Y(z)$ tal que $U \subseteq \varphi^{-1}(B)$.

Dado que $z \in \mathcal{R}(f)$, se tiene que $\mu(f^{-1}(U)) > 0$, pero $f^{-1}(U) \subseteq (\varphi \circ f)^{-1}(B)$, luego $\mu((\varphi \circ f)^{-1}(B)) > 0$. Esto ocurre para cada $B \in \tau_Z(w)$, entonces $w \in \mathcal{R}(\varphi \circ f)$. En consecuencia, $\varphi(\mathcal{R}(f)) \subseteq \mathcal{R}(\varphi \circ f)$.

B.2. Rango esencial de funciones continuas

En general, $\mathcal{R}(f)$ no está determinado por f(X), pero probaremos que al menos siempre está contenido en $\operatorname{clos}(f(X))$.

Proposición B.6. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, Y)$. Entonces $\mathcal{R}(f) \subseteq \operatorname{clos}(f(X))$.

Demostración. Probaremos que $Y \setminus \operatorname{clos}(f(X)) \subseteq Y \setminus \mathcal{R}(f)$. Sea $y \in Y \setminus \operatorname{clos}(f(X))$, como $Y \setminus \operatorname{clos}(f(X))$ es un conjunto abierto, podemos hallar $B \in \tau_Y(y)$ tal que $B \subseteq Y \setminus \operatorname{clos}(f(X))$. Desde luego $B \cap f(X) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(B) = \emptyset$ y $\mu(f^{-1}(B)) = \emptyset$, lo que significa que $y \notin \mathcal{R}(f)$. Por lo tanto, $\mathcal{R}(f) \subseteq \operatorname{clos}(f(X))$.

Esta situación mejora en el caso de funciones continuas.

Proposición B.7. Sea (X, τ_X) un espacio topológico, \mathscr{A} una σ -algebra que contiene a τ_X , $y \ \mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ una medida tal que $\mu(A) > 0$ para cada $A \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Si $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, entonces $\mathcal{R}(f) = \operatorname{clos}(f(X))$.

Demostración. La contención \subseteq ya fue probada en la proposición B.2. Probemos ahora que $\mathcal{R}(f) \supseteq \operatorname{clos}(f(X))$.

Sea $v \in \operatorname{clos}(f(X))$ y $B \in \tau_Y(v)$. Esto significa que v es un punto límite y B es una vecindad de v, entonces $B \cap f(X) \neq \emptyset$. Sea $u \in B \cap f(X)$, luego $B \in \tau_Y(u)$. Como f es una función continua, $f^{-1}(B) \in \tau_X$. En consecuencia $\mu(f^{-1}(B)) > 0$. Ya que el conjunto B es una vecindad arbitraria de v, se tiene que $v \in \mathcal{R}(f)$.

Proposición B.8. Sea (X, τ_X) un espacio topológico compacto, \mathscr{A} una σ -algebra que contiene a τ_X , $y \mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ una medida tal que $\mu(A) > 0$ para cada $A \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$. Sea $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, con Y un espacio de Hausdorff. Entonces $\mathcal{R}(f) = f(X)$.

Demostración. Como X es compacto y f es continua, el conjunto f(X) es compacto en el espacio de Hausdorff Y, y por lo tanto es cerrado en Y. El resultado se sigue de la proposición B.7.

En los siguientes ejemplos, consideremos al conjunto \mathbb{R} con la topología usual y [0,1] como un subespacio topológico de \mathbb{R} . Consideremos además la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Ejemplo B.9. Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ una función definida como f(x) = x para cada $x \in [0,1]$. Entonces $\mathcal{R}(f) = [0,1] = f([0,1])$.

Ejemplo B.10. La hipótesis de que f es continua no puede ser omitida, por ejemplo, sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida como f(x)=x para cada $x\in[0,1[$ y f(1)=2. Entonces $\mathcal{R}(f)=[0,1],$ pero $f([0,1])=[0,1[\cup\{2\}.$

Ejemplo B.11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1/(1+x^2)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Es fácil probar que f es continua en \mathbb{R} . Sin embargo, $f(\mathbb{R}) \neq \mathcal{R}(f)$. Esto proviene del hecho de que \mathbb{R} no es un conjunto compacto, y en realidad $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$ mientras que $\mathcal{R}(f) = [0, 1]$.

B.3. Rango esencial y supremo esencial

Podemos definir el supremos esencial de un subconjunto no vacío de \mathbb{R} como el mínimo de las cotas superiores esenciales de dicho conjunto.

Proposición B.12. Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, [0, +\infty])$. Entonces

$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \sup(\mathcal{R}(f)).$$

Demostración. Denotamos $\sup(\mathcal{R}(f))$ por α . Primero, notemos que si $w \in \mathcal{R}(f)$, entonces $w \leq \alpha$. Esto significa que

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \subseteq X \setminus f^{-1}(\mathcal{R}(f)).$$

Aplicando la propiedad monótona de μ , obtenemos que $\mu(\{x \in X : f(x) > \alpha\}) = 0$, es decir, α es una cota superior esencial de la función f.

Sea β una cota superior esencial de f, es decir,

$$\mu(\{\,x\in X\,:\, f(x)>\beta\,\})=0.$$

Entonces, cada $\gamma > \beta$ tiene una vecindad $B(\gamma, \gamma - \beta)$ tal que $\mu(f^{-1}(B(\gamma, \gamma - \beta))) = 0$, y por lo tanto, $\gamma \notin \mathcal{R}(f)$. Esto significa que $\mathcal{R}(f) \subseteq [0, \beta]$ y $\alpha \leq \beta$. Entonces, α es la mínima cota superior esencial de f.

B.4. Rango esencial y operadores aritméticos

Proposición B.13 (Rango esencial y producto por escalar). Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathcal{R}(\lambda f) = \lambda \mathcal{R}(f).$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varphi(z) = \lambda z$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Esta función es claramente continua y por la proposición B.6,

$$\mathcal{R}(\lambda f) = \mathcal{R}(\varphi \circ f) = \operatorname{clos}(\varphi(\mathcal{R}(f))) = \operatorname{clos}(\lambda \mathcal{R}(f)).$$

Como $\mathcal{R}(f)$ es cerrado, $\lambda \mathcal{R}(f)$ también es cerrado. Así $\operatorname{clos}(\lambda \mathcal{R}(f)) = \lambda \mathcal{R}(f)$.

Proposición B.14 (Rango esencial de la suma de dos funciones). Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$. Entonces

$$\mathcal{R}(f+g) \subseteq \operatorname{clos}(\mathcal{R}(f) + \mathcal{R}(g)). \tag{B.1}$$

Ejemplo B.15. Este ejemplo muestra que la cerradura en el lado derecho de (B.1) no puede ser omitida. Sea $X = \{1, 2, 3, ...\}$ y $\mathscr{A} = 2^X$. Definimos $\mu : \mathscr{A} \to [0, 1]$ por

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_A(k)}{2^k},$$

donde $\mathbf{1}_A$ es la función característica del conjunto A. Entonces (X, \mathscr{A}, μ) es un espacio de medida (más aún, es un espacio de probabilidad). Definimos $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{C})$ mediante

$$f(k) = k + \frac{1}{k}, \qquad g(k) = -k.$$

Entonces $0 \in \mathcal{R}(f+g)$, pero $0 \notin \mathcal{R}(f) + \mathcal{R}(g)$.

B.5. Aplicaciones

Mencionamos aquí sin pruebas algunas aplicaciones del rango esencial en el análisis funcional y la teoría de operadores.

Proposición B.16. Sea $\sigma \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Entonces $\mathcal{R}(\sigma)$ es el espectro del elemento σ en el álgebra $C^*L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Proposición B.17. Sea $\sigma \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y M_{σ} el operador de multiplicación por σ en el espacio $L^{2}(X, \mathscr{A}, \mu)$. Entonces $\mathcal{R}(\sigma)$ es el espectro del operador M_{σ} .

Lema B.18. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, A un operador lineal en \mathcal{H} y P la proyección ortogonal en \mathcal{H} . Denotemos por A_P la compresión de A sobre $P(\mathcal{H})$:

$$A_P f := PAf$$
 $(f \in P(\mathcal{H})).$

Entonces el espectro de A_P está contenido en la envolvente convexa del espectro de A.

Proposición B.19. Sean $\sigma \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$, S un subespacio cerrado de $L^{2}(X, \mathcal{A}, \mu)$ y P la proyección ortogonal de $L^{2}(X, \mathcal{A}, \mu)$ sobre S. Denotemos por T_{σ} al operador de Toeplitz que actúa sobre S mediante la regla

$$T_{\sigma}(f) = P(M_{\sigma}f).$$

Entonces el espectro de T_{σ} está contenido en la envolvente convexa de $\mathcal{R}(\sigma)$.

Apéndice C

Norma, invertibilidad y espectro del operador de multiplicación

En este apéndice estudiamos el operador de multiplicación en los espacios \mathbb{C}^n , $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y $L^2(X,\mu)$. Para cada uno, calculamos la norma, mostramos algunas propiedades aritméticas, probamos un criterio de invertibilidad y describimos su espectro. En todos los casos notaremos que las propiedades del operador de multiplicación son esencialmente consecuancia de las propiedades de su símbolo.

El material recopilado en este apéndice aparece generalmente en los textos básicos sobre análisis funcional. Puede encontrarse, por ejemplo, en [Zhu, Conway], aunque aquí se encuentra de manera más detallada.

La importancia del estudio de este operador se revela en el Capítulo 3, en la diagonalización del operador de localización.

Aunque de los resultados que en este apéndice se presentan sólo ocuparemos aquellos relativos al espacio $L^2(X,\mu)$, los análogos para los espacios \mathbb{C}^n y $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ sirven como base y dan motivación a las definiciones y resultados presentados en la última parte.

C.1. El operador de multiplicación en \mathbb{C}^n

Sobre el espacio \mathbb{C}^n

Llamamos \mathbb{C}^n al espacio de todas las n-tuplas de números complejos representadas mediante una matriz columna de longitud n (es decir una matriz de tamaño $n \times 1$). Denotemos por $\mathbf{1}_n$ al vector constante $[1]_{j=1}^n$. Este espacio dotado de la norma euclidiana constituye un espacio unitario. Para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ definimos el vector $\mathbf{e}_j = [\delta_{j,k}]_{k=1}^n$, con $\delta_{j,k}$ la delta de Kronecker. Los vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ forman una base ortonormal del espacio \mathbb{C}^n .

Las transformaciones lineales en este espacio están represantas mediante matrices cuadradas de orden n. El operador de multiplicación que definiremos a continuación es una transformación lineal cuya matriz asociada es una matriz diagonal, es decir, una matriz cuyas entradas fuera de la diagonal principal son nulas. Formalmente, si $a \in \mathbb{C}^n$, definimos la matriz diagonal asociada al vector a como la matriz diag $(a) := [a_j \delta_{j,k}]_{j,k=1}^n$. Notemos que si $a, b \in \mathbb{C}^n$, entonces para $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene

$$\left(\operatorname{diag}(a)\operatorname{diag}(b)\right)_{j,k} = \sum_{r=1}^{n} (a_j \delta_{j,r})(b_r \delta_{r,k}) = (a_j b_k)\delta_{j,k},$$

lo cual también denota una matriz diagonal. Si denotamos por $a \odot b$ el producto componente a componente de a y b, es decir $a \odot b = \left[a_j b_j \right]_{j=1}^n$, entonces tendremos que

$$\operatorname{diag}(a)\operatorname{diag}(b)=\operatorname{diag}(a\odot b).$$

El operador de multiplicación en \mathbb{C}^n y su norma

Definición C.1 (Operador de multiplicación en \mathbb{C}^n). Sea $a \in \mathbb{C}^n$, definamos el operador de multiplicación en \mathbb{C}^n con símbolo a como el operador $M_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que para cada $x \in \mathbb{C}^n$, $M_a x = \operatorname{diag}(a) x$.

El producto diag(a)x está bien definido pues diag $(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{C}^n$, luego diag $(a)x \in \mathbb{C}^n$. Como una alternativa, el operador M_a se puede definir mediante la regla

$$M_a x = [a_j x_j]_{j=1}^n = a \odot x, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Definamos la norma infinito de un elemento $a \in \mathbb{C}^n$ como

$$||a||_{\infty} := \max_{1 \le j \le n} |a_j|.$$

Se verifica fácilmente que en efecto es una norma en el sentido usual sobre el espacio \mathbb{C}^n . Se tiene además que para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}, |a_j| \leq ||a||_{\infty}$.

Proposición C.2 (Norma del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n). Sea $a \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$|| M_a || = || a ||_{\infty}$$
.

Demostración. La norma del operador M_a inducida por la norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ del espacio \mathbb{C}^n , es por definición

$$|| M_a || := \sup \{ || M_a x ||_2 : x \in \mathbb{C}^n, || x ||_2 = 1 \}.$$

Sabemos que $\|a\|_{\infty} \ge |a_j|$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$, por lo que si $x \in \mathbb{C}^n$,

$$|| M_a x ||_2^2 = \sum_{j=1}^n |a_j x_j|^2 \le \sum_{j=1}^n || a ||_{\infty}^2 |x_j|^2 = || a ||_{\infty}^2 \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = || a ||_{\infty}^2 \cdot || x ||_2^2,$$

de donde $\|M_a\| \le \|a\|_{\infty}$. Por otro lado, para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}, \|\mathbf{e}_k\|_2 = 1$. Si suponemos que $|a_{j_0}| = \|a\|_{\infty}$, entonces

$$|| M_a \mathbf{e}_{j_0} ||_2 = || a_{j_0} \mathbf{e}_{j_0} ||_2 = |a_{j_0}| = || a ||_{\infty},$$

lo que implica que $||M_a|| = ||a||_{\infty}$.

Artimética de los operadores de multiplicación en \mathbb{C}^n

Sea $a = [a_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$, denotemos por \overline{a} al vector $[\overline{a_j}]_{j=1}^n$ y por a^{-1} al vector $[1/a_j]_{j=1}^n$ siempre que a no tenga componentes nulas. La siguiente proposición enuncia algunas propiedades del símbolo del operador de multiplicación.

Proposición C.3 (Propiedades del símbolo del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n). Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

a)
$$M_{a+b} = M_a + M_b$$
.

b)
$$\lambda M_a = M_{\lambda a}$$
.

c)
$$M_a M_b = M_{ab}$$
.

$$d) M_a^* = M_{\overline{a}}.$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

a)
$$M_a + M_b = diag(a) + diag(b) = diag(a+b) = M_{a+b}$$
.

b)
$$\lambda M_a = \lambda \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(\lambda a) = M_{\lambda a}$$
.

c)
$$M_a M_b = \operatorname{diag}(a) \operatorname{diag}(b) = \operatorname{diag}(a \odot b) = M_{a \odot b}$$
.

d)
$$M_a^* = (\operatorname{diag}(a))^* = \left(\overline{\operatorname{diag}(a)}\right)^{\top} = \overline{\operatorname{diag}(a)} = \operatorname{diag}(\overline{a}) = M_{\overline{a}}.$$

Muchas propiedades de los operadores en \mathbb{C}^n asociados a matrices son análogas a las propiedades de estas matrices. En particular, un operador T que está asociado a una matriz A será invertible siempre que A lo sea. Nos proponemos ahora encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el operador de multiplicación en \mathbb{C}^n sea invertible.

Invertibilidad del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n

Sea $a \in \mathbb{C}^n$, luego la matriz asociada al operador M_a es diag $(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Una matriz cuadrada es invertible siempre que su determinante sea diferente de cero, así diag(a) es invertible si y sólo si det $(\text{diag}(a)) = \prod_{j=1}^n a_j \neq 0$, es decir si ningún a_j es cero. Llegamos entonces al siguiente criterio:

Proposición C.4 (Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n) Sea $a \in \mathbb{C}^n$. El operador de multiplicación M_a es invertible si y sólo si $a_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración. Ya se mostró la necesidad. Sea $a \in \mathbb{C}^n$ tal que para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $a_j \neq 0$. Denotemos por a^{-1} a la n-tupla definida por $\begin{bmatrix} a_j^{-1} \end{bmatrix}_{j=1}^n$. Es claro que cada entrada está bien definida. Se tiene que

$$M_a M_{a^{-1}} = \text{diag}(a) \, \text{diag}(a^{-1}) = \text{diag}(aa^{-1}) = \text{diag}(\mathbf{1}_n) = I_n,$$

y análogamente se tiene que $M_{a^{-1}}M_a={\rm I},$ de donde el operador M_a es invertible.

El espectro del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n

El espectro de un operador generaliza la idea de valor propio de una matriz. Uno de los objetivos es determinar cuándo el operador de multiplicación es diagonalizable, y para ello requerimos del estudio de su espectro.

Recordemos brevemente que el espectro de un operador T es el conjunto de números complejos λ para los que el operador $\lambda I - T$ no es invertible. En el caso en que el operador T esté asociado con una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, el espectro de T es el conjunto de los valores propios de A, esto es, los números complejos λ para los que la matriz $\lambda I_n - A$ no es invertible (donde I_n es la matriz identidad de tamaño n).

Así pues, dado $a \in \mathbb{C}^n$, el operador de multiplicación M_a está asociado con la matriz diag(a). Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\lambda I_n - \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(\lambda \mathbf{1}_n) - \operatorname{diag}(a) = \operatorname{diag}(\lambda \mathbf{1}_n - a),$$

donde $\lambda \mathbf{1}_n - a$ es la n-tupla $[\lambda - a_j]_{j=1}^n$. Si ese λ es tal que $\lambda \mathbf{I}_n - \operatorname{diag}(a)$ no es invertible, entonces

$$\det(\operatorname{diag}(\lambda \mathbf{1}_n - a)) = \prod_{j=1}^n (\lambda - a_j) = 0,$$

lo que implica que $\lambda = a_j$ para algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Recíprocamente, para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, a_j es un valor propio de diag(a), y en consecuencia será un elemento del espectro del operador M_a . Finalmente denotando por $\operatorname{Sp}(M_a)$ al espectro del operador M_a , se ha probado la siguiente proposición.

Proposición C.5 (Espectro del operador de multiplicación en \mathbb{C}^n) Sea $a \in \mathbb{C}^n$, con $a = [a_j]_{j=1}^n$ entonces

$$Sp(M_a) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Como conclusión, la norma y el espectro del operador de multiplicación se expresan de manera muy simple a través de su símbolo: el espectro del operador de multiplicación tiene como elementos las componentes de su símbolo y la norma es el máximo de los valores absolutos de éstas.

C.2. El operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Sobre el espacio $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Denotaremos por \mathbb{N}_0 al conjunto de los enteros no negativos $\{0, 1, 2...\}$. El espacio $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ es *el espacio de sucesiones complejas cuadrado-sumables*, es decir, sucesiones de números complejos indexadas por el conjunto de los números naturales que cumplen que la suma de los módulos al cuadrado de las entradas de cada sucesión converge en \mathbb{R} . Formalmente

$$\ell^2(\mathbb{N}_0) := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty \right\}.$$

Éste es un espacio de Hilbert respecto al producto interno definido como

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} x_j \, \overline{y_j}.$$

Es fácil comprobar que este producto es lineal respecto al primer argumento. La norma en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ inducida por este producto se expresa a continuación. Para cada $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$,

$$||x||_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j \, \overline{x_j}\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definamos la sucesión $\mathbf{e}_n = (\delta_{n,j})_{j \in \mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\|\mathbf{e}_n\|_2 = 1$ y dados $m, n \in \mathbb{N}_0$, $\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n \rangle = 0$. El conjunto $E = \{\mathbf{e}_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es entonces una base ortonormal llamada *la base canónica* de $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Nuestro objetivo ahora es definir el operador de multiplicación en este espacio de forma tal que tenga propiedades cuando no análogas al operador definido en la Sección C.1, al menos parecidas. La idea, aunque muy natural, de definirlo como un producto componente a componente con un elemento $a \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, trae consigo el problema de que el operador inverso, si es posible definirlo, no será acotado, pues una consecuencia de que la sucesión

a sea cuadrado-sumable es que converge a cero, luego el conjunto de los recíprocos de sus entradas no será acotado.

Para evitar este problema, definamos *el espacio de sucesiones complejas acotadas* como el conjunto

$$\ell^{\infty}(\mathbb{N}_{0}) := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_{0}} : \exists M (M > 0) (j \in \mathbb{N}_{0} \Rightarrow |x_{j}| \leq M) \right\}.$$

Definimos $\|a\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |a_j|$ para cada $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, la función $\|\cdot\|_{\infty} : \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{R}_0^+$ resulta ser una norma en el espacio $\ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$.

El operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ y su norma

Dadas dos sucesiones de números complejos indexadas por \mathbb{N}_0 , digamos x y y, denotemos por xy el producto componente a componente de estas sucesiones, es decir

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (xy)_n = x_n y_n.$$

Definición C.6 (Operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$). Sea $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, definimos el operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ con símbolo a como el operador $M_a : \ell^2(\mathbb{N}_0) \to \ell^2(\mathbb{N}_0)$ tal que para todo $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, $M_a x = a x$.

Notemos que este operador está bien definido, pues si $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, se tiene que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(M_a x)_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |(ax)_j|^2 \le ||a||_{\infty}^2 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty,$$

y en consecuencia $M_a x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Dado $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}_0$,

$$M_a \mathbf{e}_n = a \mathbf{e}_n = a_n \mathbf{e}_n = \langle a, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n,$$

y además $|| M_a \mathbf{e}_n ||_2 = || a_n \mathbf{e}_n ||_2 = |a_n|$.

Proposición C.7 (Norma del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$). Sea $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, entonces

$$|| M_a || = || a ||_{\infty}.$$

Demostraci'on. Si $x\in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ es tal que $\parallel x\parallel_2=1,$ se tiene que

$$|| M_a x ||_2 = || ax ||_2 \le || a ||_{\infty} || x ||_2 = || a ||_{\infty},$$

de donde $\|a\|_{\infty}$ es una cota superior para el conjunto $\{\|M_ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\}$, luego $\|M_a\| \le \|a\|_{\infty}$.

Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$. Dado que $||a||_{\infty}$ es por definición el supremo del conjunto $\{|a_j|: j \in \mathbb{N}_0\}$, existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $||a||_{\infty} - \varepsilon < |a_{j_0}|$. Se tiene entonces que

$$|| M_a || = \sup_{\|x\|_2=1} || M_a x ||_2 \ge || M_a \mathbf{e}_{j_0} ||_2 = |a_{j_0}| > || a ||_{\infty} - \varepsilon,$$

y como ε es un real positivo arbitrario, se tiene que $\|M_a\| \ge \|a\|_{\infty}$, lo que finalmente conduce a que $\|M_a\| = \|a\|_{\infty}$.

Artimética de los operadores de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Sea $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, denotemos por \overline{a} a la sucesión $(\overline{a_n})_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$.

Proposición C.8 (Propiedades del símbolo del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$). Sean $a, b \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

- a) $M_{a+b} = M_a + M_b$.
- b) $\lambda M_a = M_{\lambda a}$.
- c) $M_a M_b = M_{ab}$.
- $d) \ M_a^* = M_{\overline{a}}.$

Demostración. Sean $a, b \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0), \lambda \in \mathbb{C} \text{ y } x, y \in \ell^2(\mathbb{N}_0).$

- a) $M_{a+b} x = (a+b)x = ax + bx = M_a x + M_b x$.
- b) $\lambda M_a x = \lambda(ax) = (\lambda a)x = M_{\lambda a}x$.
- c) $(M_a M_b) x = a(bx) = (ab) x = M_{ab} x$.
- d) Notemos que

$$\langle M_a^* x, y \rangle = \langle x, M_a y \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} x_j \overline{M_a y} = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} x_j \overline{(a_j y_j)}$$
$$= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} (\overline{a_j} x_j) \overline{y_j} = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} (M_{\overline{a}} x) \overline{y_j} = \langle M_{\overline{a}} x, y \rangle,$$

para todo $x, y \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, luego $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

Sobre los operadores en espacios normados

Dejemos por un momento de lado el espacio $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ para hablar de propiedades más generales de los operadores en cierto tipo de espacios. Sean pues $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados. Decimos que un operador lineal acotado $T: X \to Y$ es invertible si existe otro operador lineal acotado $S: Y \to X$ tal que $TS = I_X$ y $ST = I_Y$. En caso de existir, el operador S es único y se denota por T^{-1} . Es claro que si T es invertible, $\|T^{-1}\| \neq 0$.

Lema C.9. Sean X y Y dos espacios normados y sea $T: X \to Y$ un operador lineal acotado.

- a) Si T es invertible, para todo $x \in X$, $||Tx||_Y \ge ||T^{-1}||^{-1} ||x||_X$.
- b) Si T es invertible, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $||x||_X = 1$, $||Tx||_Y \ge \delta$.
- c) Si para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ con $||x||_X = 1$ tal que $||Tx||_Y < \varepsilon$, entonces T no es invertible.

Demostraci'on. Sea $T:X\to Y$ un operador lineal acotado.

a) Si T es invertible, entonces para cada $x \in X$,

$$\parallel x \parallel_{X} = \parallel T^{-1}T \ x \parallel_{X} \leq \parallel T^{-1} \parallel \parallel Tx \parallel_{Y},$$

de donde $\|Tx\|_Y \ge \|T^{-1}\|^{-1} \|x\|_X$.

- b) De la expresión anterior, si $||T^{-1}|| = 1/\delta$, entonces $||Tx||_Y \ge \delta$ para todo $x \in X$ con $||x||_X = 1$.
- c) Sea $\varepsilon > 0$, y sea $x \in X$ con $||x||_X = 1$ tal que $||Tx||_Y < \varepsilon$. Supongamos que T es invertible, entonces

$$\left\| T^{-1} \right\|^{-1} = \left\| T^{-1} \right\|^{-1} \left\| x \right\|_{X} \le \left\| Tx \right\|_{Y} \le \varepsilon,$$

como ε es un real positivo arbitrario, el operador T^{-1} no es acotado, esto es una contradicción.

Ocupémonos ahora en encontrar un criterio para garantizar la invertibilidad del operador de multiplicaicón en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Invertibilidad del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Convengamos primero en que si $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de números complejos, las sucesiones |a| y a^{-1} son respectivamente las sucesiones $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$ y $(1/a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ (esta última quedará definida siempre que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$).

A diferencia del operador de multiplicación en el espacio \mathbb{C}^n , donde para ser invertible era suficiente que ninguna de las entradas del símbolo fuera igual a cero, en el espacio $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ esta condición resulta insuficiente. Si deseamos definir de manera "natural" el operador inverso M_a^{-1} como el operador $M_{a^{-1}}$, antes hay que asegurarnos de que éste último sea también un operador acotado. Descartamos primero la posibilidad de que alguna de las entradas de la sucesión a sea nula.

Si por desgracia tenemos una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que converja a cero, entonces el operador $M_{a^{-1}}$ definido mediante $x\mapsto (x_n/a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ no será acotado, pues resulta que $\|M_{a^{-1}}\mathbf{e}_{n_j}\|_2 = \|\mathbf{e}_{n_k}/a_{n_k}\|_2 \to +\infty$ cuando $k\to\infty$. Necesitamos entonces que ninguna de las entradas de la sucesión a sea nula y que ninguna subsucesión de a converja a cero, esto es, necesitamos que |a| sea acotada inferiormente por un real positivo.

Para formalizar este criterio, definamos el rango de la sucesión $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$ como el conjunto

$$\mathcal{R}(a) = \{ z \in \mathbb{C} : \exists j_0 \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } z = a_{j_0} \}.$$

También suele llamársele imagen de a o conjunto de valores de a. Escribamos CR(a) para denotar la cerradura de este conjunto. Es claro que si existe una subsucesión de a que converge a cero, entonces se tendrá que $0 \in CR(a)$.

Notemos que si $0 \notin C\mathcal{R}(a)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $j \in \mathbb{N}_0$, $|a_j| \ge \varepsilon$, lo que equivale a que $\inf_{j \in \mathbb{N}_0} |a_j| > 0$ (la sucesión a es acotada inferiormente por un real positivo). Tenemos así el siguiente criterio.

Proposición C.10 (Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$). Sea $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$. El operador de multiplicación M_a es invertible si y sólo si $0 \notin C\mathcal{R}(a)$.

Demostración. Es claro que si $0 \notin C\mathcal{R}(a)$ entonces la sucesión $a^{-1} = (1/a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ está bien definida y si M > 0 es tal que $\inf_{j \in \mathbb{N}_0} |a_j| \geq M^{-1} > 0$, entonces $\sup_{j \in \mathbb{N}_0} |1/a_j| \leq M$, lo que implica que $a^{-1} \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$. Podemos definir así el operador $M_{a^{-1}}$ que por lo anterior es acotado y cumple que si $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, para cada $j \in \mathbb{N}_0$

$$(M_a M_{a^{-1}} x)_j = a_j (1/a_j) x_j = x_j,$$

$$(M_{a^{-1}}M_ax)_j = (1/a_j)a_jx_j = x_j,$$

es decir $M_a M_{a^{-1}} = M_{a^{-1}} M_a = I$, luego M_a es invertible.

Ahora supongamos que $0 \in C\mathcal{R}(a)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $|a_{j_0}| < \varepsilon$. Se tiene así que $\|\mathbf{e}_{j_0}\|_2 = 1$ y $\|M_a\mathbf{e}_{j_0}\|_2 = |a_{j_0}| < \varepsilon$, por el lema C.9, M_a no es invertible.

El espectro del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$

Finalmente, dado $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, ocupémonos en encontrar el espectro del operador M_a .

Dado $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$, el espectro del operador M_a es por definición el conjunto

$$\operatorname{Sp}(M_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \operatorname{I} - M_a \text{ no es invertible } \}.$$

Por el lema C.9, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ el operador $\lambda \mathbf{I} - M_a$ no es invertible si $\|\lambda \mathbf{I} - M_a\| = 0$. Claramente, si $\lambda = a_j$ para algún $j \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\|(\lambda \mathbf{I} - M_a) \mathbf{e}_j\|_2 = \|a_j \mathbf{e}_j - M_a \mathbf{e}_j\|_2 = |a_j - a_j| = 0,$$

luego $\|\lambda \mathbf{I} - M_a\| = 0$, por lo que $a_j \in \operatorname{Sp}(M_a)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Sin embargo éstos no son lo únicos elementos que puede tener el espectro del operador M_a , pues si alguna subsucesión del símbolo a converge a un número complejo λ , el operador $\lambda \mathbf{I} - M_a$ no será invertible. La siguiente proposición especifica cuáles son los elementos del espectro de un operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.

Proposición C.11 (Espectro del operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$) Sea $a \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$. Entonces $\operatorname{Sp}(M_a) = \operatorname{C}\mathcal{R}(a)$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $\lambda \in C\mathcal{R}(a)$, entonces existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\lambda - a_j| < \varepsilon$, así

$$\|(\lambda \mathbf{I} - M_a) \mathbf{e}_j\|_2 = \|\lambda \mathbf{e}_j - M_a \mathbf{e}_j\|_2 \le |\lambda - a_j| < \varepsilon,$$

como $\|\mathbf{e}_j\|_2 = 1$ y ε es un real positivo arbitrario, por el lema C.9 el operador $\lambda \mathbf{I} - M_a$ no es invertible y así $C\mathcal{R}(a) \subseteq \mathrm{Sp}(a)$.

Ahora sea $\lambda \in \operatorname{Sp}(a)$, entonces el operador $\lambda \operatorname{I} - M_a$ no es invertible. Observemos que si denotamos por $\mathbf{1}$ a la sucesión constante $(1)_{n \in \mathbb{N}_0}$, entonces $\operatorname{I} = M_1$, luego por la proposición C.8, $\lambda \operatorname{I} - M_a = M_{\lambda \mathbf{1} - a}$. Éste último no es invertible de acuedo con la proposición C.10 cuando $0 \in \operatorname{CR}(\lambda \mathbf{1} - a)$, y esto pasa si y sólo si $\lambda \in \operatorname{CR}(a)$.

C.3. El operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$

Sobre los espacios
$$L^2(X,\mu)$$
 y $L^{\infty}(X,\mu)$

Consideremos ahora un conjunto X, una σ -alegebra de subconjuntos de X denotada por \mathscr{A} y una medida μ definida sobre \mathscr{A} . La terna (X,\mathscr{A},μ) es llamada espacio de medida. Como la función μ ya contiene información sobre la σ -algebra \mathscr{A} , suele simplifarse la notación a (X,μ) .

Dadas dos funciones $f, g: X \to \mathbb{C}$, diremos que éstas son iguales casi en todas partes respecto a la medida μ (y lo escribiremos $f = g \mu - \text{c.t.p.}$) si

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Esta relación entre funciones es, de hecho, una relación de equivalencia. Cada clase será, en adelante y por conveniencia, tratada como una función.

Ahora denotemos por $L^2(X,\mu)$ al conjunto de funciones de cuadrado integrable con dominio sobre el espacio (X,μ) y contradominio en \mathbb{C} , es decir,

$$L^{2}(X,\mu) := \left\{ f \in \mathbb{C}^{X} : \int_{X} |f(x)|^{2} d\mu(x) < +\infty \right\}.$$

En realidad $L^2(X,\mu)$ es un conjunto de clases de equivalencia, como ya dijimos, y bajo esta relación, podemos definir un producto interno del siguiente modo:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad \forall f, g \in L^2(X, \mu).$$

Este producto induce la siguiente norma:

$$||f||_{L^2(X,\mu)} := \left(\int_X |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2}, \quad \forall f \in L^2(X,\mu).$$

Para abreviar la notación, escribiremos $\|\cdot\|_2$ en vez de $\|\cdot\|_{L^2(X,\mu)}$. Con esta norma, el conjunto $L^2(X,\mu)$ resulta ser un espacio unitario completo, es decir, un espacio de Hilbert.

Durante el desarrollo de esta sección agregaremos algunas hipótesis sobe el espacio (X, μ) que nos ayudarán a construir mejor la teoría del operador de multiplicación definido en $L^2(X, \mu)$.

Tomando $X = \mathbb{N}_0$, $\mathscr{A} = 2^{\mathbb{N}_0}$ y μ la medida de conteo, el espacio $L^2(X,\mu)$ coincide con el espacio $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Recordemos que para definir el operador de multiplicación en $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, era necesario escoger un elemento en el espacio de sucesiones acotadas $\ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$. El espacio análogo en esta sección será el espacio de funciones esencialmente acotadas definido como sigue:

$$L^{\infty}(X,\mu) := \left\{ a \in \mathbb{C}^X : \exists M(M \ge 0) \mid |a(x)| \le M \ \mu - \text{c.t.p.} \right\},\,$$

donde la expresión " $|a(x)| \leq M \ \mu - {\rm c.t.p.}$ " significa que

$$\mu\left(\{\ x\in X\ :\ |a(x)|>M\ \}\right)=0,$$

y llamaremos en este caso a M una cota superior esencial de la función a.

Definamos también la función $\|\cdot\|_{\infty}$ que a cada $a\in L^{\infty}(X,\mu)$ le asocia el real no negativo

$$\parallel a \parallel_{\infty} := \inf \left\{ \; M \geq 0 \; : \; |a(x)| \leq M \;\; \mu - \mathrm{c.t.p.} \; \right\},$$

es decir, el ínfimo de las cotas superiores esenciales de a. Esta función resulta ser una norma (llamada norma infinito) en el espacio $L^{\infty}(X,\mu)$.

Lema C.12. Sea $a \in L^{\infty}(X, \mu)$, entonces

$$\parallel a \parallel_{\infty} = \min \left\{ \; M \geq 0 \; : \; |a(x)| \leq M \; \; \mu - \text{c.t.p.} \; \right\}.$$

Demostración. Denotemos por A al conjunto $\{M \ge 0 : |a(x)| \le M \ \mu - \text{c.t.p.} \}$. Primero notemos que si $M_1 \in A$ y $M_2 > M_1$, entonces $M_2 \in A$. Además se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}, \|a\|_{\infty} < \|a\|_{\infty} + \frac{1}{n}$, como $\|a\|_{\infty} = \inf A$, entonces necesariamente $\|a\|_{\infty} + \frac{1}{n} \in A$.

Sea J el intervalo $]\|a\|_{\infty}, +\infty],$ y para cada $n \in \mathbb{N}, J_n =]\|a\|_{\infty} + \frac{1}{n}, +\infty].$ Es claro que $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ y además se tiene que

$$\mu(a^{-1}(J_n)) = \mu\left(\left\{x \in X : |a(x)| > ||a||_{\infty} + \frac{1}{n}\right\}\right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por la σ -aditividad de la medida μ ,

$$\mu\left(\left\{x \in X : |a(x)| > \|a\|_{\infty}\right\}\right) = \mu(a^{-1}(J)) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(a^{-1}(J_n)) = 0,$$

es decir,

$$|a(x)| \le ||a||_{\infty} \ \mu - \text{c.t.p.},$$

luego, $||a||_{\infty} \in A$, y en consecuencia $||a||_{\infty} = \min A$.

El operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$ y su norma

Definición C.13 (Operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$). Sea $a \in L^\infty(X,\mu)$, definimos el operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$ con símbolo a como $M_a: L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ tal que a cada $f \in L^2(X,\mu)$ asocia la función (af)(x) = a(x)f(x) para todo $x \in X$.

Notemos que este operador está bien definido pues si $a \in L^{\infty}(X,\mu)$ y $f \in L^{2}(X,\mu)$, entonces (utilizando el lema C.12)

$$\int_{X} |(M_a f)(x)|^2 d\mu(x) = \int_{X} |a(x)f(x)|^2 d\mu(x) \le ||a||_{\infty}^2 \int_{X} |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty,$$

y en consecuencia $M_a f \in L^2(X, \mu)$. Aquí se usa el hecho de que si $f \leq g$ casi en todas partes respecto a μ , entonces $\int_X f \leq \int_X g$, pues si D es el conjunto $\{x \in X : f(x) > g(x)\}$, entonces $\mu(D) = 0$ y por lo tanto $\int_D f = \int_D g = 0$, así

$$\int_X f = \int_{X \setminus D} f + \int_D f \le \int_{X \setminus D} g + \int_D g = \int_X g.$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar la norma del operador de multiplicación. El mejor candidato es por supuesto la norma infinito del símbolo, sin embargo debemos dotar al

espacio (X, μ) de una estructura menos general para que ésto se cumpla. Agreguemos entonces la hipótesis de que la medida μ sea σ -finita, es decir, pidamos que exista una familia a lo sumo numerable de subconjuntos de X con medida finita cuya unión sea X. Bajo esta nueva hipótesis se tiene la siguiente proposición.

Proposición C.14 (Norma del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$)

Sea (X, μ) un espacio de medida con μ una medida σ -finita. Sea $a \in L^{\infty}(X, \mu)$, entonces

$$|| M_a || = || a ||_{\infty}$$
.

Demostración. Sea $f \in L^2(X, \mu)$ con $||f||_2 \neq 0$, entonces

$$\| M_a f \|_2^2 = \int_X |a(x)f(x)|^2 d\mu(x) \le \| a \|_{\infty}^2 \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) = \| a \|_{\infty}^2 \| f \|_2^2,$$

luego $||M_a|| \leq ||a||_{\infty}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $A_{\varepsilon} = \{ x \in X : |a(x)| > \|a\|_{\infty} - \varepsilon \}$. Como $\|a\|_{\infty} - \varepsilon < \|a\|_{\infty}$, se tiene que $\mu(A_{\varepsilon}) > 0$. Supongamos ahora que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ con $\mu(Y_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer además que esta familia $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es disjunta. Entonces $A_{\varepsilon} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{\varepsilon} \cap Y_n)$, y

$$\mu(A_{\varepsilon}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{\varepsilon} \cap Y_n) > 0,$$

donde todos los sumandos son finitos. Así debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(A_{\varepsilon} \cap Y_m) < +\infty$. Definamos la función

$$f = \frac{\mathbf{1}_{(A_{\varepsilon} \cap Y_m)}}{\sqrt{\mu(A_{\varepsilon} \cap Y_m)}},$$

donde $\mathbf{1}_{(A_{\varepsilon}\cap Y_m)}$ es la función indicadora del conjunto $A_{\varepsilon}\cap Y_m$. Se tiene entonces que $f\in L^2(X,\mu)$ y $||f||_2=1$, en efecto

$$||f||_2^2 = \frac{1}{\mu(A_{\varepsilon} \cap Y_m)} \int_x |\mathbf{1}_{(A_{\varepsilon} \cap Y_m)}(x)|^2 d\mu(x) = 1.$$

Más aún,

$$\mu(A_{\varepsilon} \cap Y_m) \| M_a f \|_2^2 = \int_X |a(x)|^2 |\mathbf{1}_{(A_{\varepsilon} \cap Y_m)}(x)|^2 d\mu(x)$$

$$= \int_{A_{\varepsilon} \cap Y_m} |a(x)|^2 d\mu(x)$$

$$> (\| a \|_{\infty} - \varepsilon)^2 \mu(A_{\varepsilon} \cap Y_m),$$

de donde $\|M_a f\|_2 > \|a\|_{\infty} - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\|M_a\| \ge \|a\|_{\infty}$, y finalmente $\|M_a\| = \|a\|_{\infty}$.

Artimética de los operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Sea $a \in L^{\infty}(X, \mu)$, denotemos por \overline{a} a la función $\overline{a}(x) = \overline{a(x)}$. La siguiente proposición enuncia algunas propiedades del símbolo del operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$.

Proposición C.15 (Propiedades del símbolo del operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$) Sean $a, b \in L^{\infty}(X, \mu)$ $y \lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

- a) $M_{a+b} = M_a + M_b$.
- b) $\lambda M_a = M_{\lambda a}$.
- c) $M_a M_b = M_{ab}$.
- $d) \ M_a^* = M_{\overline{a}}.$

Demostración. Sean $a, b \in L^{\infty}(X, \mu), \lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^{2}(X, \mu)$.

a)
$$M_{a+b} f = (a+b)f = af + bf = M_a f + M_b f = (M_a + M_b)f$$
.

b)
$$\lambda M_a f = \lambda(af) = (\lambda a)f = M_{\lambda a}f$$
.

c)
$$(M_a M_b) f = a(bf) = (ab) f = M_{ab} f$$
.

d) Notemos que

$$\langle M_a^* f, g \rangle = \langle f, M_a g \rangle = \int_X f(x) \overline{M_a g(x)} \, d\mu(x) = \int_X f(x) \overline{a(x)} \, \overline{g(x)} \, d\mu(x)$$
$$= \int_X \overline{a}(x) f(x) \, \overline{g(x)} \, d\mu(x) = \int_X M_{\overline{a}} f(x) \, \overline{g(x)} \, d\mu(x) = \langle M_{\overline{a}} f, g \rangle,$$

para todo $f, g \in L^2(X, \mu)$, luego $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

Invertibilidad del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Proposición C.16 (Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$). Sea $a \in L^{\infty}(X, \mu)$. El operador de multiplicación M_a es invertible si y sólo si $0 \notin \mathcal{R}(a)$, donde $\mathcal{R}(a)$ es el rango esencial de a.

Demostración. Recordemos que el rango esencial de la función a se define como el conjunto

$$\mathcal{R}(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0, \quad \mu(a^{-1}(B(z, \varepsilon))) > 0 \right\}.$$

Supongamos que $0 \notin \mathcal{R}(a)$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\mu(a^{-1}(B(0,\varepsilon_0))) = 0$. Denotemos por D al conjunto $a^{-1}(B(0,\varepsilon_0))$. Definamos ahora la función $b: X \to \mathbb{C}$ tal que b(x) = 1/a(x) si $x \in X \setminus D$, y b(x) = 0 si $x \in D$. Es claro que $ab = \mathbf{1}\mu - \text{c.t.p.}$, donde $\mathbf{1}$ es la función constante de valor 1. Además, para todo $x \in X \setminus D$, $|a(x)| > \varepsilon_0$, luego $|b(x)| < 1/\varepsilon_0 \mu - \text{c.t.p.}$, de donde $b \in L^{\infty}(X,\mu)$. Se tiene entonces que $M_a M_b = M_b M_a = \mathbf{1}\mu - \text{c.t.p.}$ Aunque este inverso no es único (pues variando un poco el valor de ε_0 obtendremos funciones b diferentes), sí es esencialmente único, es decir que si construimos otra función b' tal que $M_a M_{b'} = \mathbf{1}$, entonces $b = b' \mu - \text{c.t.p.}$

Ahora supongamos que $0 \in \mathcal{R}(a)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, $\mu(a^{-1}(B(0,\varepsilon))) > 0$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y denotemos por E al conjunto $a^{-1}(B(0,\varepsilon))$. Como μ es σ -finita, existe una colección numerable y disjunta de subconjuntos de X con medida finita que forman una partición de X. Digamos que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, y escojamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(E \cap Y_m) < +\infty$.

Definamos la función $f:(X,\mu)\to\mathbb{C}$ como

$$f = \frac{\mathbf{1}_{E \cap Y_m}}{\sqrt{\mu(E \cap Y_m)}}.$$

Se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu = \frac{1}{\mu(E \cap Y_m)} \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}_{E \cap Y_m}(x)|^2 d\mu(x) = 1 < +\infty,$$

de donde $f \in L^2(X, \mu)$ y $||f||_2 = 1$. Notemos que si $x \in E \cap Y_m$, entonces $a(x) \in B(0, \varepsilon)$, es decir $|a(x)| < \varepsilon$. Además tenemos que

$$|| M_a f ||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |a(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) = \frac{1}{\mu(E \cap Y_m)} \int_{E \cap Y_m} |a(x)|^2 d\mu(x) < \varepsilon^2,$$

es decir $||M_a f||_2 < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el lema C.9, el operador M_a no es invertible.

El espectro del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Finalmente, el espectro del operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$ se expresa a través del rango esencial del símbolo, tal como lo enuncia la siguiente proposición. Los detalles sobre el rango esencial de una función son estudiados en el Apéndice B de esta tesis.

Proposición C.17 (Espectro del operador de multiplicación en $L^2(X,\mu)$) Sea $a \in L^{\infty}(X,\mu)$. Entonces

$$\operatorname{Sp}(M_a) = \mathcal{R}(a).$$

Demostración. Supongamos que $\lambda \in \operatorname{Sp}(M_a)$, entonces el operador $\lambda \operatorname{I} - M_a = M_{\lambda \mathbf{1} - a}$ no es invertible. Por la proposición C.16, $0 \in \mathcal{R}(\lambda \mathbf{1} - a)$, es decir que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu((\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon))) > 0.$$

Sea $x \in (\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon))$, entonces $(\lambda \mathbf{1} - a)(x) \in B(0, \varepsilon)$, es decir $|\lambda - a(x)| < \varepsilon$. Esto quiere decir que $a(x) \in B(\lambda, \varepsilon)$, es decir que $x \in a^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))$.

Podemos concluir de ahí que $(\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon)) \subseteq a^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))$. Como $\mu((\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon))) > 0$, por la monotonía de la medida, $\mu(a^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) > 0$. Como ε es un real positivo arbitrario, $\lambda \in \mathcal{R}(a)$. En consecuencia $\operatorname{Sp}(a) \subseteq \mathcal{R}(a)$.

Sea ahora $x \in a^{-1}(B(\lambda, a))$, entonces $|\lambda - a(x)| < \varepsilon$, o equivalentemente $|(\lambda \mathbf{1} - a)(x)| < \varepsilon$. Esto significa que $(\lambda \mathbf{1} - a)(x) \in B(0, \varepsilon)$, o bien que $x \in (\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon))$. Así que finalmente $(\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}(B(0, \varepsilon)) = a^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))$, lo que hace reversible el razonamiento anterior. Se sigue que $\mathcal{R}(a) \subseteq \operatorname{Sp}(a)$, y en conclusión $\mathcal{R}(a) = \operatorname{Sp}(a)$.

Apéndice D

Sobre las convoluciones

Este apéndice tiene como objetivo mostrar algunos resultados sobre la densidad de la imagen de las convoluciones en $C_u(\mathbb{R})$. En la Sección D.1 se estudian algunas propiedades de las funciones uniformemente continuas y mostramos un criterio para determinar si una función es uniformemente continua a partir de su módulo de continuidad. En la Sección D.2 se estudian las propiedades artiméticas de las convoluciones y se muestran algunos resultados sobre la convergencia de convoluciones en espacios de funciones integrables. Se muestra, finalmente, que el conjunto de convoluciones de una función integrable que cumple la condición de Wiener con funciones esencialmente acotadas es un subconjunto denso del álgebra C^* de las funciones uniformemente continuas.

Los resultados reunidos en este apéndice se encuentran en [GasWit] y son expuestos de manera resumida en [HutMaxMis, HutHut].

D.1. Sobre las funciones uniformemente continuas

Continuidad puntual y uniforme

Recordeos brevemente las definiciones de continuidad puntual y continuidad uniforme de funciones real-valuadas.

Definición D.1 (Continuidad puntual). Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Diremos también que la función f es puntualmente continua en \mathbb{R} si es continua en cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

En la definición anterior δ depende tanto de ε como del punto x_0 . Cuando ocurre que δ no depende del punto x_0 se dice que la función es uniformemente continua. Formalmente:

Definición D.2 (Continuidad uniforme). Se dice que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es uniformemente continua en \mathbb{R} si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x - y| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

La continuidad uniforme implica la continuidad puntual, pero no al revés. Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ es puntualmente continua en \mathbb{R} pero no uniformemente continua. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Si $\varepsilon \le \delta^2/8$, entonces tomemos x = 0 y $y = \delta/2$, así $|x - y| = \delta/2 < \delta$, pero

$$|f(x) - f(y)| = \frac{\delta^2}{4} > \frac{\delta^2}{8} \ge \varepsilon.$$

Por otro lado, si $\varepsilon > \delta^2/8$, tomemos $x=(8\varepsilon-\delta^2)/4\delta$, y $y=x+\delta/2$. Se tiene que $|x-y|=\delta/2<\delta$, sin embargo

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \left| x\delta + \frac{\delta^2}{4} \right|$$
$$= \left| \left(\frac{8\varepsilon - \delta^2}{4\delta} \right) \delta - \frac{\delta^2}{4} \right| = 2\varepsilon > \varepsilon.$$

En consecuencia f no es uniformemente continua en \mathbb{R} . Sin embargo se tienen un par de resultados que garantizan la continuidad uniforme de una función puntualmente continua.

Proposición D.3 (Continuidad uniforme en conjuntos compactos). Sea K un conjunto compacto en \mathbb{R} y $f: K \to \mathbb{C}$ puntualmente continua en K. Entonces f es uniformemente continua en K.

Proposición D.4 (Extensión de una función uniformemente continua a un intervalo cerrado y acotado). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $y \ f : [a, b] \to \mathbb{C}$ uniformemente continua en el intervalo semiabierto [a, b] y continua en a. Entonces f es uniformemente continua en el intervalo cerrado [a, b], es decir, existe una única extensión continua de f al intervalo [a, b].

En otras palabras, esta proposición dice que es posible externer a intervalos cerrados el dominio de funciones uniformemente continuas. Notemos además que no se puede reemplazar la condición de continuidad uniforme en]a,b] por continuidad puntual. Sirva como ejemplo la función $x\mapsto 1/x$, que es continua en el intervalo]0,1] pero no uniformemente continua. Ésta función no está definida para x=0, e incluso definiendo f(x)=1/x si $x\in]0,1]$ y $f(0)=x_0$, con x_0 cualquier real, la función f no es continua y en consecuencia no es uniformemente continua en [0,1].

El módulo de continuidad

Definición D.5. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función. Definimos el módulo de continuidad de f como el real positivo extendido

$$\omega_f(\delta) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \}.$$

La siguiente proposición es una caracterización de las funciones uniformemente continuas a partir de su módulo de continuidad.

Proposición D.6 (Criterio de continuidad uniforme). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función, entonces f es uniformemente continua en \mathbb{R} si y sólo si $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Ejemplo D.7. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ es continua en \mathbb{R} . Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $|x - y| < \delta$, se tendrá que $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta$, de modo que $\omega_f(\delta) \le \delta$, de ahí que $\omega_f(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0$. En consecuencia f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Ejemplo D.8. La fucnión $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ es continua en \mathbb{R} pero no uniformemente continua, como ya hemos mostrado. Esta prueba se simplifica utilizando el módulo de continuidad. Notemos que para cada $\delta > 0$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 1/\delta$. tomemos $y = x + \delta/2$, entonces $|x - y| = \delta/2 < \delta$. Sin embargo

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\delta^2}{4},$$

de modo que para cada $\delta > 0$, $\omega_f(\delta) \ge 1/2$. Es claro que $\omega_f(\delta)$ no converge a cero cuando $\delta \to 0$, luego f no es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Incluso es posible mostrar que dado $\delta > 0$, el conjunto $\{ | f(x) - f(y) | : x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta \}$ no es acotado, y en consecuencia $\omega_f(\delta)$ no converge a cero cuando $\delta \to 0$.

Sea $C_u(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ es uniformemente continua en } \mathbb{R} \}$. El conjunto $C_u(\mathbb{R})$ forma un álgebra C^* respecto a la norma infinito y la conjugación.

D.2. Densidad de la imagen del operador de convolución en $C_u(\mathbb{R})$

La convolución en espacios de funciones integrables

Definición D.9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos la convolución de f y g como la función $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) dt.$$
 (D.1)

La existencia de la convolución de dos funciones depende en general de la convergencia de la integral (D.1). Por ejemplo, si $f = g \equiv 1$ (la función con valor constante 1), entonces es claro que f * g no está definida. A continuación se enuncian algunas propiedades de la convolución de dos funciones cuando esta existe y algunas hipótesis que garantizan la convergencia de (D.1).

Proposición D.10 (La convolución en $L^1(\mathbb{R})$). Sean $f,g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

- a) la convolución f * g está definida μ -casi en todas partes $y f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
- b) la convolución es un operador bilineal continuo de $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$||f * g||_1 \le ||f||_1 ||g||_1.$$
 (D.2)

Proposición D.11 (La convolución en $L^2(\mathbb{R})$). Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces la convolución f * g está definida μ -casi en todas partes, es continua y acotada en \mathbb{R} , y

$$|| f * g ||_{\infty} \le || f ||_{2} || g ||_{2}.$$
 (D.3)

Los dos resultados anteriores pueden ser generalizados de la siguiente manera:

Proposición D.12 (Desigualdad de Young para convoluciones). Sean $p, q, r \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Sean también $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R})$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ y

$$|| f * g ||_r \le || f ||_p || g ||_q$$
.

Como resultado particular de D.12, se tienen las dos siguientes proposiciones:

Proposición D.13 (La convolución $L^1(\mathbb{R})*L^2(\mathbb{R})$). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $f*g \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$||f * g||_2 \le ||f||_1 ||g||_2.$$
 (D.4)

Proposición D.14 (La convolución $L^1(\mathbb{R}) * L^{\infty}(\mathbb{R})$). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) y g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, entonces f * g converge absolutamente en $L^{\infty}(\mathbb{R}) y$

$$|| f * g ||_1 \le || f ||_1 || g ||_{\infty}.$$
 (D.5)

Además $f * g \in C_u(\mathbb{R})$.

Una función f se dice de soporte compacto en $\mathbb R$ si el conjunto $\{x \in \mathbb R : f(x) \neq 0\}$ es compacto. Definamos el conjunto

$$C_c(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \text{ tiene soporte compacto en } \mathbb{R} \}.$$

Es fácil ver que $C_c(\mathbb{R}) \subseteq C_u(\mathbb{R})$. Se tiene la siguiente proposición:

Proposición D.15. $C_c(\mathbb{R})$ es cerrado bajo convolución.

Propiedades aritméticas de la convolución

La siguente proposición trata de las propiedades algebraicas de la convolución cuando ésta existe, por ejemplo, en cualquiera de los casos mencionados en las proposiciones D.10, D.11, D.12, D.13 y D.14.

Proposición D.16. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que las convoluciones f * g, f * h, g * h g * h = g * h g * h = g * h existen. Entonces:

- a) f * g = g * f (la convolución es conmutativa).
- b) f * (g * h) = (f * g) * h (la convolución es asociativa).
- $c) \ f*(g+h) = f*g + f*h \ (la \ convoluci\'on \ es \ distributiva).$
- d) supp $(f * g) \subseteq clos(supp(f) + supp(g))$

Sobre las sucesiones de Dirac

Definición D.17. Una sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq L^1(\mathbb{R})$ se llama sucesión de Dirac si cumple las siguientes condiciones:

SD1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$\rho_n(x) \ge 0.$$

SD2. Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

SD3. Para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{|x| > \delta} \rho_n(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

El conjunto de las sucesiones de Dirac forma una subclase de aproximaciones de la identidad en $L^1(\mathbb{R})$.

En el siguiente ejemplo, hemos denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a la clase de las funciones continuas infinitamente diferenciables de soporte compacto. Los siguientes son ejemplos de sucesiones de Dirac:

Ejemplo D.18 (Núcleo de Cesàro-Fejér). Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, sea

$$F_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)^2}{n\pi^2 x^2}.$$

La sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Dirac en $L^1(\mathbb{R})$, denominada el *núcleo de Cesàro-Fejér* en \mathbb{R} . Además para cada $n \in \mathbb{N}$, la transformada de Fourier de F_n tiene soporte compacto. En efecto,

$$\widehat{F}_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{n}, & |t| \le n, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo D.19. Tomemos la función $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ como

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si} & |x| < 1, \\ 0 & \text{si} & |x| \ge 1, \end{cases}$$

donde

$$c = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Tomemos ahora la sucesión $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definida para cada $n\in\mathbb{N}$ como

$$\rho_n(x) = n\rho(nx).$$

Ésta es una sucesión de Dirac.

Aproximaciones de la identidad

Diremos que una función $K \in L^1(\mathbb{R})$ cumple la condición de Wiener si $\widehat{K}(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposición D.20 (Doconvolución en $L^1(\mathbb{R})$). Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que cumple la condición de Wiener. Entonces existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ tal que la sucesión $(K*\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac.

Demostración. Sea $(\rho)_{n\in\mathbb{N}}$ el núcleo de Cesàro-Fejér en \mathbb{R} descrito en el ejemplo D.18. Por el Lema de división de Wiener [ReiSte, Lema 1.4.2], para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una función $\varphi_n\in L^1(\mathbb{R})$ tal que $K*\varphi=\rho_n$.

Lema D.21 (Sucesiones de Dirac como unidades aproximadas para la convolución en $L^1(\mathbb{R})$). Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ y $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac, entonces $(K * \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a K en $L^1(\mathbb{R})$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \|K*\rho_n - K\|_1 = 0.$$

Lema D.22 (Aproximación de una función uniformemente continua mediante sucesiones de Dirac). Sea $K \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$ y $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Dirac. Entonces $(K * \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a K, es decir

$$\lim_{n \to \infty} \| K * \rho_n - K \|_{\infty} = 0.$$

Proposición D.23. Sea $K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que cumple la condición de Wiener. Entonces el conjunto $\mathcal{G} = \{ K * \sigma : \sigma \in L^{\infty}(\mathbb{G}) \}$ es un subconjunto denso de $\mathcal{C}_u(\mathbb{R})$.

Demostración. Tenemos por la proposición D.14, $K * \sigma \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$, luego $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$. Sea $\sigma \in \mathcal{C}_u(\mathbb{R})$, tomemos $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la sucesión descrita en el ejemplo D.18, y $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R})$ tal que para $K * \varphi_n = \rho_n$. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \varphi * \sigma$, entonces

$$K*f_n = K*(\varphi*\sigma) = (K*\varphi)*\sigma = \rho_n*\sigma.$$

Como $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac, por el lema D.22, $\rho_n * \sigma$ converge uniformemente a σ .

Bibliografía

- [Araaya] Araaya, T. K. (2003): The symmetric Meixner-Pollaczek polynomials. Uppsala dissertations in Mathematics 27. 70 pp. Uppsala. ISBN 9150616811.
- [Conway] Conway, J. (1985) A Course in Functional Analysis. Graduate Texts in Mathematics 96, Springer New York, ISBN: 9783540960423.
- [Daub] **Daubechies, I.** (1992), Ten Lectures on Wavelets CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. ISBN: 9780898712742.
- [EsmMax] Esmeral, K.; Maximenko, E. (2016): Radial Toeplitz operators on the Fock space and square-root-slowly oscillating sequences. Complex Anal. Oper. Theory, 10:7, 1655–1677. DOI: 10.1007/s11785-016-0557-0
- [GasWit] Gasquet, C.; Witomski, P. (1998), Fourier Analysis and Applications. Filtering, numerical computation, wavelets. In series: Texts in Applied Mathematics, Vol. 30, Springer Science. (ciudad). ISBN-13: 9780387984858.
- [GraRyz] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. (2007): Tables of Integrals, Series and Products 7th. Edition, Academic Press, Elsevier, San Diego.
- [GroMorPau] Grossmann, A.; Morlet, J.; Paul, T. (1985), Transforms associated to square integrable group representations. I: General results, J. Math. Phys. 26, 24732479.
- [HutMaxMis] **Hutník, O.; Maximenko, E.; Miškova, A.** (2016), Toeplitz localization operators: spectral functions density. Complex Anal. Oper. Theory, 10:8, 1757–1774. DOI: 10.1007/s11785-016-0564-1
- [HutHut] **Hutník O.; Hutníková M.** (2011): On Toeplitz localization operators. Arch. Math. 97, 333–344 DOI: 10.1007/s00013-011-0307-5.

- [Inoue] Inoue, H (2014): Expansion of Dirichlet L-functions on the critical line in Meixner-Pollaczek polynomials. E-print: arXiv:1412.1220v1.
- [KoeLesSwa] Koekoek, R.; Lesky, P.; Swarttouw, R. (2010): Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag. ISBN 9783642050145.
- [Koor] Koornwinder, T. (1989): Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra. J. Math. Phys. 30(4), 767–769.
- [Lang Al] Lang, S. (2002), Algebra. Springer-Verlag New York. ISBN 978-0-387-95385-4.
- [Lang An] Lang, S. (1997), *Undergraduate Analysis*. Springer-Verlag New York. ISBN 9780387948416.
- [MarAlv] Marcellán, F.; Álvarez-Nodarse, R. (2001): On the "Favard Theorem" and its extensions. J. Comput. Appl. Math. 127(1-2), 231–254.
- [PerWar] Pereyra, M. C.; Ward, L.A., (2012), Harmonic Analysis. From Fourier to Wavelets. In series: Student Mathematical Library 63. IAS/Park City. ISBN 9780821875667.
- [Pinsky] Pinsky, M. A. (2002), Introduction to Fourier analysis and wavelets. Graduate studies in mathematics; v. 102. American Mathematical Society. ISBN-13: 9780821847978.
- [ReiSte] Reiter, H.; Stegeman, D. (2001): Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups. 2nd Edition, Oxford University Press, Oxford. ISBN: 9780198511892.
- [Rocha] Rocha, J. (2013), Un primer curso de integración de Lebesgue en Rn. Instituto Politécnico Nacional. México, DF. ISBN 9786074143881.
- [Rotman] Rotman, J. (1995) An Introduction to the Theory of Groups, In series: Graduate Texts in Mathematics 148, Springer-Verlag New York. ISBN: 9781461286868,
- [Royden] Royden, H. (1988) Real analysis. Collier Macmillan, ISBN: 9780024041517.

- [Rudin FA] Rudin, W. (1991) Functional analysis McGraw-Hill Education, Michigan. ISBN-13: 9780070995581.
- [Rudin MA] Rudin, W. (1976), Principles of mathematical analysis. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, (ciudad). ISBN 9780070542358.
- [Vasil] Vasilevski, N. L. (2008): Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space. Series: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 185, Birkhäuser, Besel. ISBN: 9783764387259.
- [Wong1] Wong, M. (2003), Localization operators on the affine group and paracommutators. Progress in Analysis, I. Proc. 3rd Intern. ISAAC Congress. 663-669.
- [Wong2] Wong, M., (2002), Wavelet Transforms and Localization Operators. Birkhäuser Basel. ISBN 9783034894784.
- [Zhu] **Zhu, K.** (2007) Operator theory in function spaces. Mathematical Surveys and Monographs 138, AMS, ISN: 9780821839652.