El Grupo Afín Positivo y la Transformada de Ondícula

Gerardo Ramos Vázquez

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Grupo Afín Positivo

Sean $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$ definimos la *transformación afín positiva*

$$T_{\lambda,a}(x) = \lambda x + a,$$

$$T_{\lambda,a}T_{\delta,b}(x) = (\lambda\delta)x + (a + \lambda b).$$

Definimos sobre el conjunto $\mathbb{G} := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ la operación

$$(\lambda, a) \cdot (\delta, b) = (\lambda\delta, a + \lambda b).$$

Entonces $(\mathbb{G}, \cdot)$ es un grupo.
Se define sobre $\mathbb{G}$ la medida

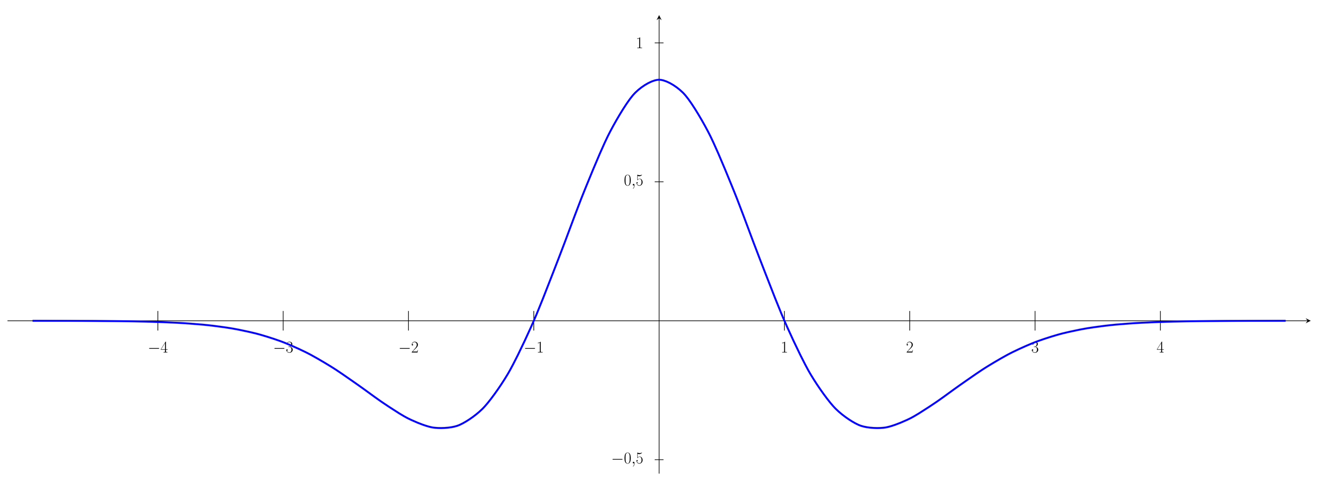
$$\mathrm{d}\nu_L = \frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}a,$$

la cual es invariante bajo traslaciones por la izquierda (medida de Haar).

Ondículas

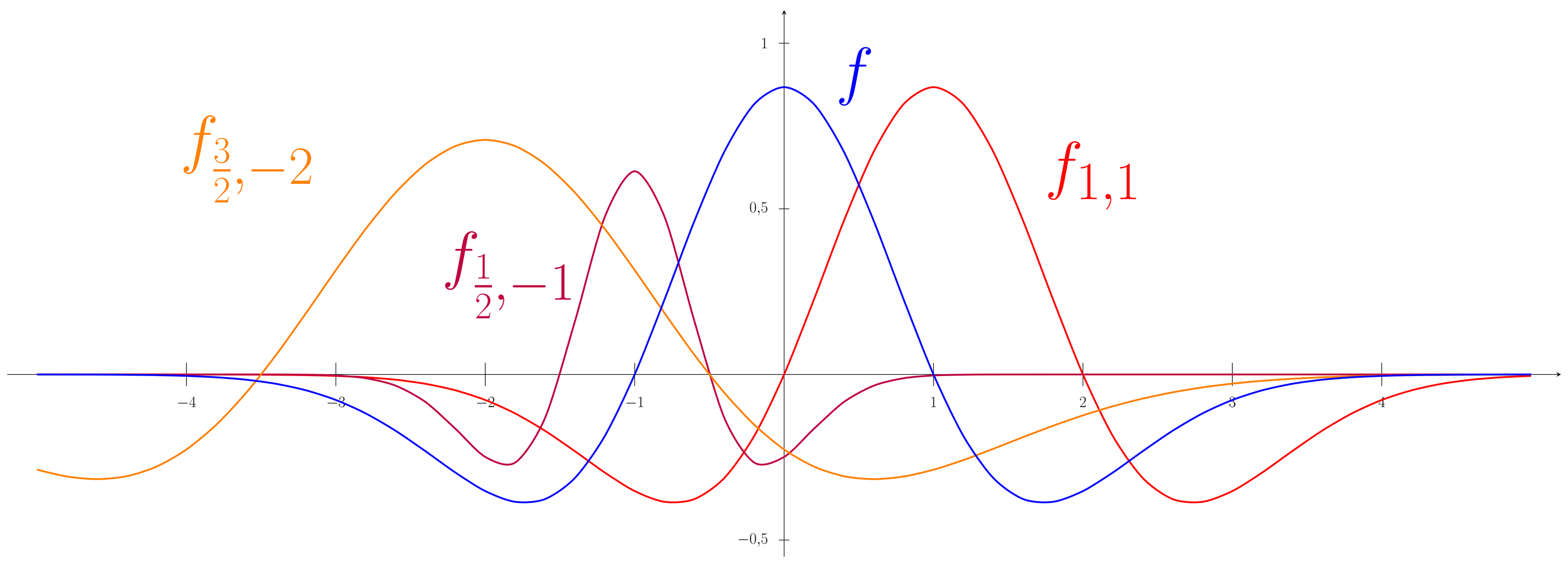
Sea $\Psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ definida como

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - x^2\right)\, e^{-x^2/2}.$$



Dado $(\lambda, a) \in \mathbb{G}$, definimos:

$$\Psi_{\lambda,a}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\Psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right).$$



Se cumple que $\|\Psi_{\lambda,a}\|_2 = \|\Psi\|_2$.

Condición de Admisibilidad

Una *ondícula* es una función $\Psi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ que cumple:

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda)|^2}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\Psi}(-\lambda)|^2}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Transformada de Ondícula Continua (Wavelet Transform)

Sea Ψ una ondícula. Para $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, definimos:

$$\mathcal{W}_\Psi f : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$$

$$(\mathcal{W}_\Psi f)(\lambda, a) := \langle\, f\,,\ \Psi_{\lambda,a}\,\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{\Psi_{\lambda,a}(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$(\mathcal{W}_\Psi^{-1} g)(x) = \int_{\mathbb{G}} g(\lambda, a)\Psi_{\lambda,a}(x)\frac{\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}a}{\lambda^2}.$$

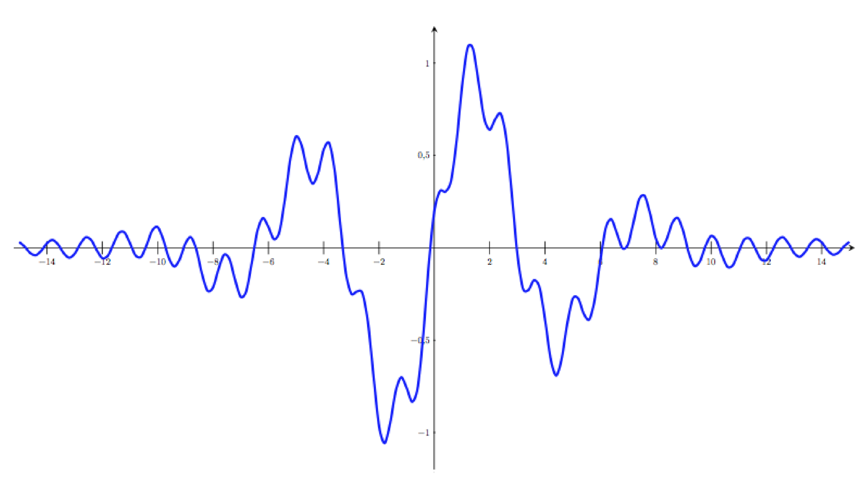
Identidad de Parseval

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{W}_\Psi f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{G})}$$

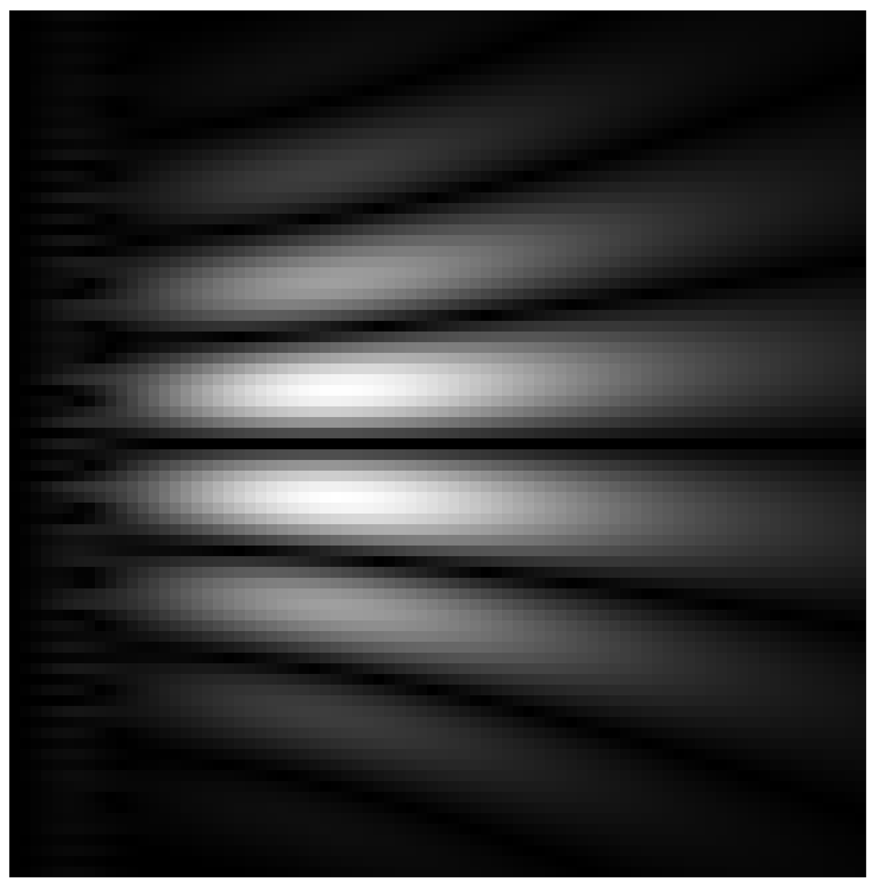
Ejemplo

$$f(x) = e^{-x^2/32}\,\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{5}\,e^{-x^2/128}\cos(5x)$$

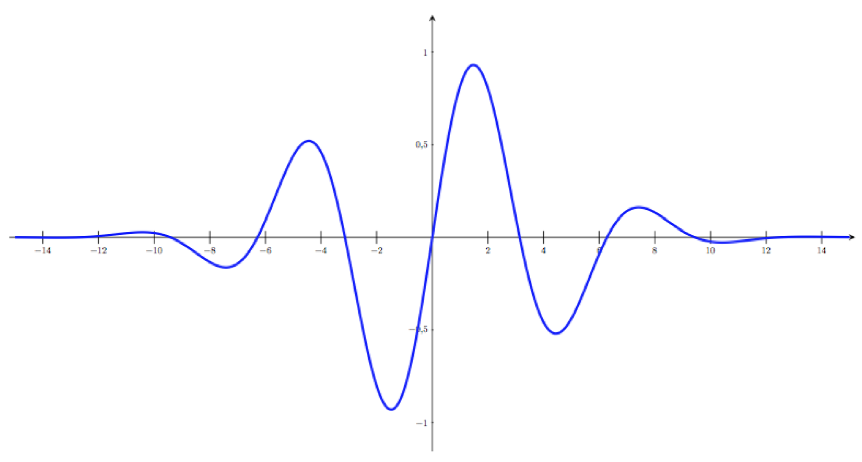
f



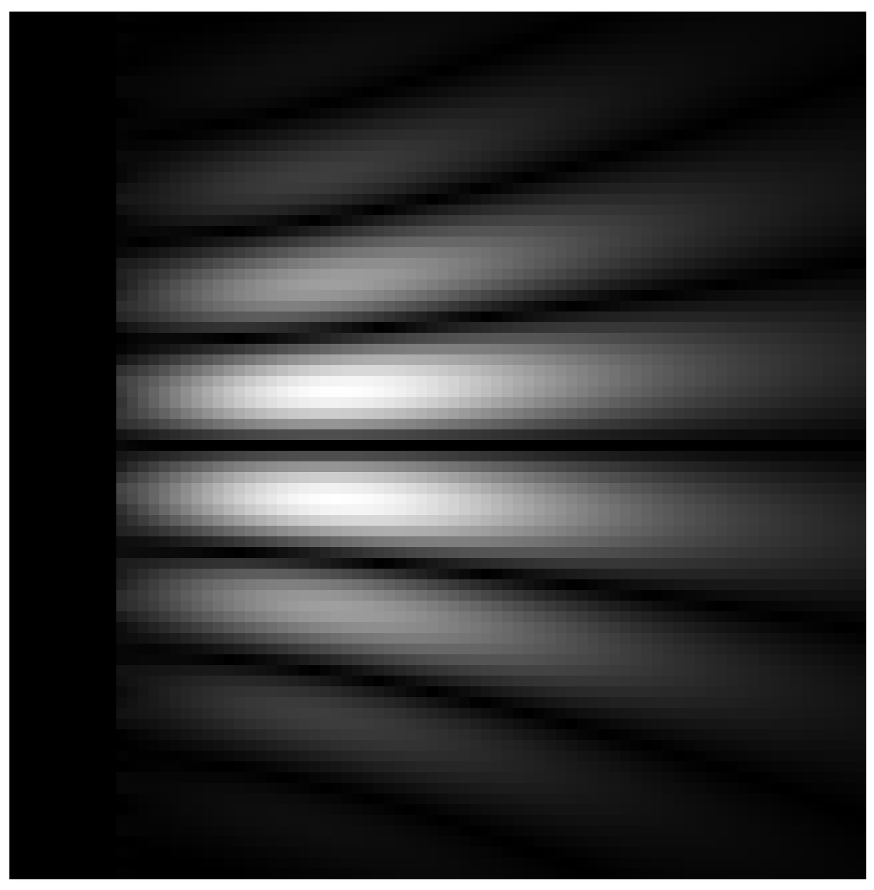
$\mathcal{W}_\Psi f$



$g = \mathcal{W}_\Psi^{-1}\chi_{[3,+\infty[}(\lambda)\mathcal{W}_\Psi f$



$\chi_{[3,+\infty[}(\lambda)\mathcal{W}_\Psi f$



Operadores de Localización

Dado $\sigma \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{G})$ y Ψ una ondícula, definimos el *Operador de Localización* $L_\sigma^\Psi : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ como:

$$L_\sigma^\Psi\, f = \mathcal{W}_\Psi^{-1}\left(\sigma \mathcal{W}_\Psi\, f\right).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{W}_\Psi"] \arrow[d, "L_\sigma^\Psi"] & \mathcal{W}_\Psi(\mathbf{L}^2(\mathbb{R})) \arrow[d, "T_\sigma^\Psi"] \\
\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) & \mathcal{W}_\Psi(\mathbf{L}^2(\mathbb{R})) \arrow[l, "\mathcal{W}_\Psi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Es de interés el caso en el que $\sigma(\lambda, a) = \sigma(\lambda)$.

El trabajo fue apoyado por el proyecto IPN-SIP 20160733 (Maximenko).