Igualdad en las desigualdades de Young y Hölder

Equipo: Enrique Abdeel Muñoz de la Colina, Elisa Suárez Barraza

Mayo 2020

Igualdad en la desigualdad de Young

El criterio presentado en esta sección ocupa los siguientes lemas.

Lema 1. *Sean* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces son equivalentes:*

(a) $a^p = b^q$,

(b) $a^{\frac{p}{q}} = b$,

(c) $a^{p-1} = b$.

Demostración. Para mostrar (a)$\Longleftrightarrow$(b), basta tomar la raíz q-ésima o elevar a la potencia q:

$$a^p = b^q \iff a^{\frac{p}{q}} = b.$$

Por otro lado, tenemos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{p}{q} = p - 1.$$

Con esto tenemos (b)$\Longleftrightarrow$(c):

$$a^{\frac{p}{q}} = b \iff a^{p-1} = b. \qquad \square$$

Lema 2. *Sean* $p > 1$, *una función* $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(t) := (1 - t^{1-p}) + (p-1)(1-t).$$

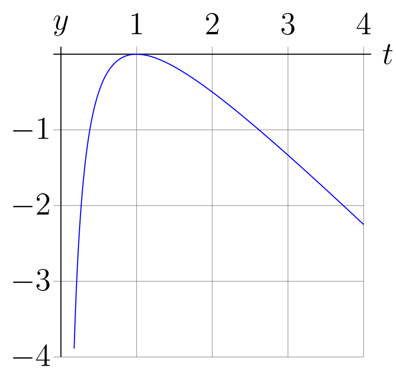
Entonces $f(t) = 0$ *si, y solo si* $t = 1$.

Demostración. Supongamos $t = 1$, entonces $f(1) = (1 - 1^{1-p}) + (p - 1)(1 - 1) = 0$

Ahora supongamos que $f(t) = 0$. Consideremos la derivada de la función,

$$f'(t) = (p - 1)(t^{-p} - 1).$$

Notemos que si $t < 1$, entonces $f'(t) > 0$, por lo que la función será estrictamente creciente. Y si $t > 1$, entonces $f'(t) < 0$, por lo que la función será estricamente decreciente. Por otro lado, $t = 1$ es un punto crítico de la función, pues $f'(1) = 0$ y por el criterio de la segunda derivada se tiene que en $t = 1$ se alcanza el máximo de la función pues $f''(1) = -p(p-1)$. Por lo tanto, $f(t) = 0$ si $t = 1$. $\square$



Gráfica de la función f para $p = 2$

Proposición 1 (igualdad en la desigualdad de Young)**.** *Sean $p, q \in (0, +\infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces para todo $a, b \in (0, +\infty)$ se tiene*

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff a^p = b^q.$$

Demostración. Supongamos que $a^p = b^q$. Entonces

$$\frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) b^q = b^q = b^{q-1}b = b^{\frac{p}{q}}b = ab$$

Note que las ultimas igualdades se tienen por el Lema 1.

Ahora supongamos $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Entonces se cumple:

$$ab = \frac{qa^p + pb^q}{pq}$$
$$pqab - qa^p - pb^q = 0$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tenemos $pq = p + q$, y dividiendo la última eprexión entre ab:

$$\begin{aligned}
0 &= p + q - q\frac{a^{p-1}}{b} - p\frac{b^{q-1}}{a} \\
0 &= p\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right) + q\left(1 - \frac{a^{p-1}}{b}\right) \\
0 &= \frac{p}{q}\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right) + \left(1 - \frac{a^{p-1}}{b}\right)
\end{aligned}$$

Observemos que $(p-1)(1-q) = p + q - pq - 1 = -1$, y recordamos que $\frac{p}{q} = p - 1$ por lo que podemos reescribir

$$0 = (p-1)\left(1 - \frac{b^{q-1}}{a}\right) + \left(1 - \left(\frac{b^{q-1}}{a}\right)^{1-p}\right)$$

Notemos que esta ultima igualdad es lo mismo que $f(\frac{b^{q-1}}{a}) = 0$, donde f es la función del Lema 2, entonces tenemos $\frac{b^{q-1}}{a} = 1$, luego $b^{q-1} = a$. Así, por el Lema 1, $a^p = b^q$. $\square$

Igualdad en la desigualdad de Hölder

El criterio presentado en esta sección ocupa la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $\phi, \psi \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Si $\phi \geq \psi$ y $\int_X \phi d\mu = \int_X \psi d\mu$, entonces $\phi = \psi$ μ-c.t.p.*

Teorema 1 (criterio de igualdad en la desigualdad de Hölder)**.** *Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ tales que $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces son equivalentes:*

(a)
$$\int_X fgd\mu = \|f\|_p \, \|g\|_q.$$
(b)
$$\frac{f^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g^q}{\|g\|_q^q} \quad \mu\text{-}c.t.p.$$

(c) f^p *y* g^q *son linealmente dependientes en el sentido c.t.p., es decir, existe* $\alpha > 0$ *tal que* $f^p = \alpha g^q$ *c.t.p.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Recordemos que

$$\|f\|_p := \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

y por tanto
$$\int_X \frac{f^p}{\|f\|_p^p} d\mu = \int_X \frac{f^p}{\int_X f^p d\mu} d\mu = \frac{\int_X f^p d\mu}{\int_X f^p d\mu} = 1.$$
Además, f y g son funciones positivas. Luego

$$\frac{f}{\|f\|_p} \geq 0 \quad y \quad \frac{g}{\|g\|_q} \geq 0.$$

Entonces $\frac{f(x)}{\|f\|_p}$, $\frac{g(x)}{\|g\|_q}$, para toda x en X, p y q cumplen las condiciones de la desigualdad de Young, por lo que se tiene

$$\frac{f(x)}{\|f\|_p} \cdot \frac{g(x)}{\|g\|_q} \leq \frac{f^p(x)}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q(x)}{q\|g\|_q^q}, \tag{1}$$

para toda x en X.

Por otro lado, partimos de
$$\int_X fgd\mu = \|f\|_p \, \|g\|_q,$$

luego

$$\int_X \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X fg d\mu = 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\int_X \frac{f^p}{\|f\|_p^p} d\mu}{p} + \frac{\int_X \frac{g^q}{\|g\|_q^q} d\mu}{q}$$

$$= \int_X \frac{f^p}{p\|f\|_p^p} d\mu + \int_X \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} d\mu = \int_X \left(\frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} \right) d\mu,$$

es decir

$$\int_X \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} d\mu = \int_X \left(\frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} \right) d\mu. \tag{2}$$

Por (1), (2) y por la proposición 2, se obtiene

$$\frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} = \frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} \quad \mu\text{-c.t.p.},$$

en otras palabras, en casi todos los puntos x de X, se tiene

$$\frac{f(x)}{\|f\|_p} \cdot \frac{g(x)}{\|g\|_q} = \frac{f^p(x)}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q(x)}{q\|g\|_q^q}. \tag{3}$$

Ahora, aplicando el criterio de igualdad de la desigualdad de Young a (3) se concluye

$$\frac{f^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g^q}{\|g\|_q^q} \quad \mu - c.t.p.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Basta tomar $\alpha = \frac{||f||_p^p}{||g||_q^q}$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Despejando f del inciso (c), se tiene que $f = (\alpha g^q)^{\frac{1}{p}}$ c.t.p. Luego, sustituyendo f en el lado izquierdo de la igualdad del inciso (a), y notando que de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se sigue que $\frac{q}{p}+1=q$, se obtiene:

$$\int_X fgd\mu = \int_X (\alpha g^q)^{\frac{1}{p}} gd\mu = \alpha^{\frac{1}{p}} \int_X g^{\frac{q}{p}+1} d\mu = \alpha^{\frac{1}{p}} \int_X g^q d\mu,$$

es decir

$$\int_X fgd\mu = \alpha^{\frac{1}{p}} \int_X g^q d\mu. \tag{4}$$

Por otro lado, sustituyendo f en el lado derecho de la igualdad del inciso (a), se obtiene:

$$\|f\|_p \|g\|_q = \left(\int_X \alpha g^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \alpha^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{1}{p}} \int_X g^q d\mu,$$

es decir

$$\|f\|_p \|g\|_q = \alpha^{\frac{1}{p}} \int_X g^q d\mu. \tag{5}$$

De (4) y (5) se obtiene el inciso (a).

$\square$