

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL



ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Menores de matrices de Toeplitz de banda y polinomios simétricos

TESIS

que para obtener el grado de doctor en ciencias fisicomatemáticas

PRESENTA

MARIO ALBERTO MOCTEZUMA SALAZAR

Director de Tesis:

Dr. Egor Maximenko

Ciudad de México Diciembre 2020

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento al Instituto Politécnico Nacional, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (CONACYT), así como a los proyectos de la Secretaria de Investigación y Posgrado (SIP) del IPN, por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo.

A mi asesor el dr. Egor Maximenko por su paciencia, guía y apoyo. Al comité sinodal por su apoyo y sugerencias para mejorar la presente tesis. A mis padres por el apoyo siempre brindado, a toda mi familia, así como a mis compañeros y amigos por los buenos ratos vividos y su apoyo.

Índice general

In	ntroducción 7			
1.	Poli	nomios simétricos	13	
	1.1.	Particiones	15	
	1.2.	Diagramas de Young-Ferrer	15	
	1.3.	Tres familias de polinomios simétricos	19	
	1.4.	Conjuntos generadores	28	
	1.5.	Teorema de Jacobi para menores complementarios	28	
	1.6.	Polinomios de Schur	33	
	1.7.	Polinomios de Schur sesgados	36	
2.	Poli	nomios simétricos en alfabeto simpléctico	45	
	2.1.	Algunas propiedades de polinomios de Chebyshev	46	
	2.2.	Polinomios palíndromos y sus raíces	52	
	2.3.	Construcción de los morfismos Φ_n y Φ_n^{odd}	54	
	2.4.	Polinomios simétricos evaluados en raíces de polinomios palíndromos	59	
	2.5.	Polinomios de Schur simplécticos y ortogonales y cocientes de Schur-Chebyshev	67	
	2.6.	Polinomios de Schur evaluados en las raíces de polinomios palíndromos	71	
3.	Mei	nores de matrices de Toeplitz de banda	7 9	
	3.1.	Matrices de Toeplitz de banda a través de polinomios simétricos	79	
	3.2.	Determinantes de matrices de Toeplitz de banda	81	
	3.3.	Menores de matrices de Toeplitz de banda	82	
	3.4.	Cofactores de matrices de Toeplitz de banda	88	
	3.5.	Eigenvectores de matrices de Toeplitz de banda	91	
4.	Mat	crices de Toeplitz generadas por polinomios de Laurent palíndromos	95	
	4.1.	Menores de matrices de Toeplitz de banda simétricas	95	
	4.2.	Determinantes de matrices de Toeplitz simétricas	99	

5.	Ejemplos	103
	5.1. Inversas aproximadas para matrices de Toeplitz tridiagonales grandes	103
	5.2. Ejemplo pentadiagonal	109
	5.3. Otro ejemplo pentadiagonal	130
Co	onclusiones	139
Bi	ibliografía	141

Resumen

Las fórmulas de Jacobi-Trudi implican que los menores de matrices de Toeplitz de banda se pueden escribir como ciertos polinomios de Schur sesgados. En esta tesis proporcionamos fórmulas para las particiones sesgadas correspondientes, en términos de los índices de filas y columnas eliminadas de la matriz de Toeplitz de banda. Estas fórmulas son para matrices de Toeplitz de banda generales, a diferencia de la fórmula publicada por Alexandersson (2012) para matrices de Toeplitz triangulares. Además deducimos varias fórmulas equivalentes para los cofactores y vectores propios de matrices de Toeplitz de banda, algunas de ellas correspondientes a fórmulas publicadas por Trench en 1985.

Luego consideramos matrices de Toeplitz de banda simétricas, es decir, cuando su símbolo generador es un polinomio de Laurent palíndromo. Las raíces del símbolo generador pueden escribirse como $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$, por lo que aparecen naturalmente polinomios de Schur sesgados en 2n variables, $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ llamadas alfabeto simpléctico. Esto nos motivó a estudiar varias familias de polinomios simétricos evaluados en dicho alfabeto. Demostramos qué polinomios simétricos evaluados en el alfabeto simpléctico se pueden escribir en términos de variables tipo "Dickson–Zhukovsky" $z_j = x_j + x_j^{-1}$. hacemos este cambio para varias familias de polinomios simétricos, por ejemplo polinomios de Schur simplécticos, polinomios de Schur ortogonales, polinomios elementales, polinomios completos y sumas de potencias. Algunas de estas familias han sido estudiadas por Elouafi (2014) y Lachaud (2016). En particular, nuestras fórmulas se aplican a menores, determinantes y cofactores de matrices de Toeplitz de banda. Mostramos la relación entre fórmulas de Trench (1987) y Elouafi (2014) para los determinantes de matrices de Toeplitz de banda simétricas y las fórmulas de Ciucu y Krattenthaler (2009) acerca de la factorización de caracteres de grupos clásicos.

Mathematical Subject Classification: 15B05, 11C20, 15A09, 15A18, 05E05, 05E10.

Palabras clave: matriz de Toeplitz, menor, cofactor, eigenvector, polinomios simétricos, polinomios de Schur sesgados, alfabeto simpléctico, polinomio palíndromo, polinomio de Chebyshev.

Abstract

The Jacobi–Trudi formulas imply that the minors of banded Toeplitz matrices can be written as certain skew Schur polynomials. In this thesis we provide formulas for the corresponding skew partitions of the Schur polynomials in terms of the indices of the struck-out rows and columns of the band Toeplitz matrices. These formulas are for general banded Toeplitz matrices, in contrast to the formula published by Alexandersson (2012) for triangular Toeplitz matrices. Then we deduce several equivalent formulas for the cofactors and eigenvectors, some of them correspond to the ones published by Trench in 1985.

Furthermore we consider symmetric banded Toeplitz matrices, i.e. when the generating symbol is a palyndromic Laurent polynomial. The roots of the generator symbol can be written as $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$, hence naturally arise skew Schur polynomials in 2n variables $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ called the symplectic alphabet. This motivated us to study several families of symmetric polynomials evaluated in such alphabet. We show that symmetric polynomials evaluated in the symplectic alphabet can be written in terms of the "Dickson–Zhukovsky" variables $z_j = x_j + x_j^{-1}$. We show explicitly how this change of variables works for some families of symmetric polynomials, for instance, for the case of symplectic Schur polynomials, orthogonal Schur polynomials, elementary symmetric polynomials, complete symmetric polynomials, and power sums. Some of these families were studied by Elouafi (2014) and Lachaud (2016). In particular our formulas can be applied to minors, determinants, and cofactors of symmetric banded Toeplitz matrices. We show the relation between Trench (1987) and Eloaufi's (2014) formulas for the determinants of symmetric banded Toeplitz matrices, and Ciucu and Krattenthaler's (2009) formulas for the factorization of classic group characters.

Mathematical Subject Classification: 15B05, 11C20, 15A09, 15A18, 05E05, 05E10.

Keywords: Toeplitz matrix, minor, cofactor, eigenvector, symmetric polynomials, skew Schur polynomials, symplectic alphabet, palindromic polynomial, Chebyshev polynomial.

Introducción

Esta tesis doctoral presenta resultados sobre:

- Menores de matrices de Toeplitz de banda y polinomios de Schur sesgados y
- Polinomios simétricos sobre el alfabeto simpléctico y su expresión en términos de las variables de Dickson-Zhukovski.

A continuación explicaremos la motivación y estructura de nuestro trabajo.

Menores de matrices de Toeplitz de banda y polinomios de Schur sesgados

Las primeras fórmulas exactas para determinantes de matrices de Toeplitz de banda fueron encontradas por Widom [55] y por Baxter y Schmidt [6]. Trench [52, 53] descubrió otra fórmula equivalente para los determinantes, fórmulas exactas para la matriz inversa y para vectores propios. Entre las investigaciones recientes sobre matrices de Toeplitz y sus generalizaciones podemos destacar los artículos [5, 8, 9, 13, 21, 22, 23, 29] y los libros [11, 14, 15, 32] que emplean métodos analíticos y contienen resultados asintóticos para determinantes de matrices de Toeplitz, matrices inversas, distribución de valores propios, etc.

De las fórmulas de Jacobi-Trudi es obvio que existe una conexión entre menores de matrices de Toeplitz y polinomios de Schur sesgados. Sorprendentemente esta conexión no fue mencionada en los trabajos previamente citados.

Gessel [31, Sección 7] mostró que algunas funciones generadoras combinatorias se pueden escribir como determinantes de matrices, sin mencionar explícitamente que se trataban de determinantes de Toeplitz. Usando la fórmula de Gessel, Borodin y Okounkov [10] expresaron el determinante de Toeplitz general como determinante de Fredholm de un operador actuando en el espacio de Hilbert ℓ^2 . Tracy y Widom [51] usaron la fórmula de Gessel para calcular distribuciones asintóticas relacionadas con objetos combinatorios. También observaron que el menor localizado en la primera columna de la matriz de Toeplitz triangular $[h_{j-k}]_{j,k}$ se puede escribir como polinomios de Schur y expresaron las correspondientes particiones en términos de filas seleccionadas.

Bump y Diaconis [17] estudiaron el comportamiento asintótico de menores de Toeplitz con un número fijo de filas y columnas eliminadas, cuando el orden del menor tiende a infinito. Indexaron los menores con dos particiones, sin expresar la relación de estas particiones y los índices de filas y columnas eliminadas.

En su libro, Lascoux [38] definió funciones de Schur sesgadas $s_{\lambda/\mu}$ como menores de una matriz de Toeplitz triangular $[h_{k-j}]_{j,k}$ y relacionó explícitamente las particiones λ y μ con los índices de filas y columnas seleccionadas. Reiner, Shaw y van Willigenburg mencionaron la misma relación en su artículo [47] acerca del problema de coincidencia de polinomios de Schur sesgados.

Alexandersson [1] mostró una nueva prueba combinatoria de la fórmula de Widom para determinantes de matrices de Toeplitz, ayudándose del resultado auxiliar [1, Proposición 3], escribe el menor de matrices de Toeplitz triangulares $[e_{k-j}]_{j,k}$ como polinomios de Schur sesgados $s_{\alpha/\beta}$, con ciertas particiones α y β expresadas en términos de filas y columnas eliminadas.

Nuestro primer resultado consiste en dar de forma explícita las particiones sesgadas correspondientes en términos de los índices de filas y columnas eliminadas de la matriz de Toeplitz de banda. Con esto también presentamos varias fórmulas equivalentes para los cofactores y vectores propios de matrices de Toeplitz de banda.

Polinomios simétricos sobre el alfabeto simpléctico y su expresión en términos de las variables de Dickson–Zhukovski

Muchas aplicaciones e investigaciones involucran matrices de Toeplitz simétricas [32, 11, 12, 8]. En particular, un objeto de estudio importante son matrices de Toeplitz de banda simétricas generadas por polinomios de Laurent palíndromos. Las raíces de estos polinomios de Laurent, equivalentemente, las raíces de cualquier polinomio palíndromo de grado 2n, se pueden escribir como $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. Por ello nos interesa estudiar expresiones de la forma

$$P(x_1,\ldots,x_n,x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}),$$

donde P es un polinomio simétrico en 2n variables, con la particularidad de que n variables son recíprocas de las otras n variables. Trench [54] en 1987, Krattenthaler [35] en 1998, Ciucu y Krattenthaler [18] en 2009 y Elouafi [22] en 2014, independientemente, encontraron fórmulas eficientes para los determinantes de matrices de banda simétricas, que corresponden al caso cuando P es un polinomio de Schur asociado a una partición de la forma $\lambda = (m^n) = (m, \ldots, m)$. Cabe mencionar que los autores llegaron a las mismas fórmulas para determinantes usando diferentes caminos y notaciones, que en esta tesis pudimos unir y relacionar, esto fue parte del trabajo conjunto con Alexandersson, González-Serrano y Maximenko [3] .

La fórmula de Elouafi se ha usado en investigaciones sobre valores propios de matrices de Toeplitz simétricas [5]. De hecho las "variables simplécticas" $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ aparecen

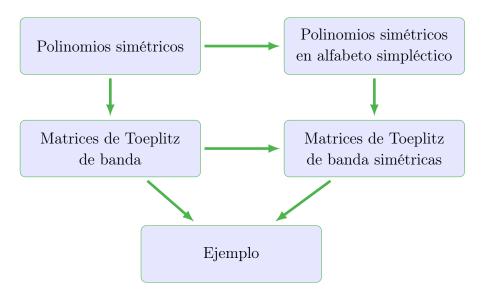
naturalmente como valores propios de matrices simplécticas.

Estructura de la tesis

A continuación presentamos una tabla de notación para las familias de polinomios simétricos que estaremos usando en la tesis.

Símbolo	Familia
\mathbf{e}_m	polinomios elementales
\mathbf{h}_m	polinomios completos
\mathbf{p}_m	sumas de potencias
s_{λ}	polinomios de Schur
sp_λ	polinomios de Schur simplécticos
o_{λ}	polinomios de Schur ortogonales

El siguiente diagrama muestra los capítulos de esta tesis y como se relacionan entre ellos.



En el Capítulo 1 describimos las familias de polinomios simétricos que estaremos usando en la tesis así como sus propiedades y relaciones entre ellos, para esto nos servirán resultados auxiliares, uno de ellos, el teorema de Jacobi para menores complementarios, al cual le dedicamos una sección ya que de esta salen equivalencias para polinomios de Schur. Por último estudiamos polinomios de Schur sesgados, una generalización de polinomios de Schur, que nos ayudarán a dar fórmulas para menores de matrices de Toeplitz de banda.

Este capítulo nos ayudará a hacer la tesis más autocontenida. Los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [25, 27, 38, 41, 48].

En el Capítulo 2 nos enfocamos en polinomios simétricos, pero ahora en el alfabeto simpléctico. Para esto son útiles los polinomios de Chebyshev, por lo cual empezamos recordando algunas propiedades de estos para los cuatro tipos. Después estudiamos un poco de polinomios palíndromos y sus raíces, que es lo que nos lleva al uso del "alfabeto simpléctico". Escribimos polinomios simétricos evaluados en variables palíndromas considerando el alfabeto simpléctico, como lo muestran la Proposición 2.13 para el caso de polinomios elementales, la Proposición 2.14 para polinomios completos y la Proposición 2.15 para sumas de potencias. Esto nos lleva a definir morfismos de álgebras que van de álgebras de polinomios simétricos en 2n variables a álgebras de polinomios simétricos en n variables, dando el Teorema 2.17 un resultado general para cualquier polinomio simétrico. A continuación describimos polinomios simétricos evaluados en raíces de polinomios palíndromos y damos algunas propiedades similares a las dadas en el Capítulo 1 para polinomios simétricos clásicos. Como estos siguen siendo polinomios simétricos, los podemos expresar en términos de los polinomios simétricos clásicos, como lo muestran las Proposiciones 2.24, 2.25. Por otro lado, es natural relacionar caracteres de grupos simplécticos y ortogonales con ciertos polinomios de Schur, más aún estos polinomios de Schur tienen una fórmula bialternante que en este caso se relacionan con polinomios de Chebyshev, por esto es natural definir ciertos cocientes "Schur-Chebyshev". Por último pasamos a estudiar los polinomios de Schur generales, evaluados en raíces de polinomios palíndromos, ya que estos son los que usamos para dar fórmulas para determinantes de matrices de Toeplitz de banda simétricas. En este caso podemos definir polinomios de Schur por medio de fórmulas análogas a las fórmulas de Jacobi-Trudi, sin embargo en este caso no tenemos fórmula bialternante como en el caso clásico, ver Nota 2.43.

Algunos resultados de este capítulo se pueden encontrar en [27], algunos fueron inspirados por [22].

En el Capítulo 3 estudiamos menores de matrices de Toeplitz de banda, tratando de complementar a [1] mostrando que otros resultados clásicos de la teoría de matrices de Toeplitz se pueden encajar, de manera natural, en la teoría de polinomios de Schur sesgados. Al tratar de hacer un "puente" entre estas dos teorías, en esta tesis, nos quedamos más del lado de matrices de Toeplitz. Empezamos con una matriz de Toeplitz de banda general (no necesariamente triangular a diferencia de [1]) generada por un polinomio de Laurent arbitrario a y expresamos sus menores como cierto polinomio de Schur sesgado evaluado en las raíces de a, dando de forma explícita la partición correspondiente en términos de las filas y columnas eliminadas de la matriz (ver Teorema 3.4). A partir de esto deducimos varias fórmulas para los cofactores en el Teorema 3.13 y los vectores propios en el Teorema 3.18, además damos nuevas demostraciones de las fórmulas clásicas de Trench.

En el Capítulo 4 nos enfocamos en matrices de Toeplitz de banda simétricas, es decir que están generadas por símbolos simétricos. Así como en el Capítulo 3, relacionamos matrices de Toeplitz de banda, en este caso simétricas, con polinomios simétricos, ahora evaluados en el

alfabeto simpléctico. Escribimos menores, la adjunta, cofactores y vectores propios en términos de polinomios simétricos. Escribimos en términos de polinomios simétricos los resultados equivalentes de Trench [54] (determinantes de matrices de Toeplitz simétricas como polinomios trigonométricos) y Elouafi [22] (determinante de matrices de Toeplitz simétricas utilizando polinomios de Chebyshev de primer, segundo, tercer y cuarto orden).

Los resultados de este capítulo se pueden encontrar en [3], trabajo conjunto con Alexandersson, González-Serrano y Maximenko, en la presente tesis se hace un estudio más amplio de las relaciones que hay de los trabajos previamente hechos y se presentan más detalles de algunas fórmulas.

Por último, en el Capítulo 5 presentamos tres ejemplo que ilustra los resultados del Capítulo 3 y el Capítulo 4. El primer ejemplo ilustra las aplicaciones de las fórmulas para el determinante de una matriz de Toeplitz tridiagonal así como las entradas de la adjunta, para dar fórmulas para las entradas de la inversa. A partir de la matriz inversa construiremos una matriz aproximadamente inversa ya que para el estudio de valores y vectores propios de forma asintótica es más cómodo trabajar con fórmulas aproximadas.

El segundo ejemplo está basado en [9] y [12], la principal diferencia es que trabajamos con fórmulas exactas hasta llegar a fórmulas asintóticas. Y así podemos considerar el método del punto fijo con precisión arbitraria. En la Nota 5.21 mostramos la ventaja en cuanto a tiempo computacional para calcular valores propios con las fórmulas obtenidas para este ejemplo.

El tercer ejemplo al igual que el segundo ejemplo presenta una matriz pentadiagonal simétrica pero en este caso el símbolo generador tiene cuatro intervalos de monotonía, en este caso no se conoces fórmulas sencillas para los valores y vectores propios, sin embargo aplicando los resultados del Capítulo 4 podemos obtener el polinomio característico de forma sencilla. Este ejemplo sirve como base para trabajos futuros para estudiar valores y vectores propios para matrices de Teoplitz pentadiagonales cuyo símbolo tenga cuatro intervalos de monotonía.

Hemos programado aproximadamente 3000 líneas de código en Sagemath [49] de comprobaciones numéricas y simbólicas para los resultados obtenidos en los Capítulos 2, 3 y 4. Estos programas se encuentran en http://www.egormaximenko.com/programs/tests_palindromic.html y http://www.egormaximenko.com/plots/Toeplitz_minors.html

Publicaciones derivadas del doctorado

Los resultados de este trabajo de tesis se recopilan en dos artículos. El primer resultado principal, presentado en el Capítulo 3 se encuentra, en [43], una revista JCR, con cuartil Q2. El segundo artículo [3] está en revisión, escrito en colaboración con Per Alexandersson, Luis Ángel González-Serrano y Egor Maximenko. Este trabajo recopila los resultados de los Capítulos 2 y 4. Si bien en el trabajo conjunto todos participamos, se podría resaltar mi participación en las Proposiciones 2.14, 2.24, 2.41 y 4.7.

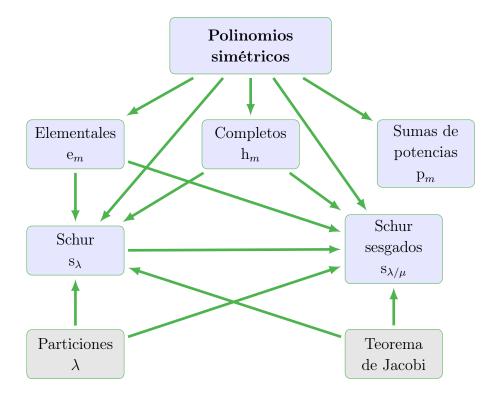
En la tesis no se incluyen resultados parciales, obtenidos en conjunto con Maximenko, sobre la fórmula de Szegő–Widom para el caso de las matrices de Toeplitz de banda y sobre las recurrencias lineales y su conexión con polinomios de Schur. Continuaremos con estas investigaciones en un futuro.

Capítulo 1

Polinomios simétricos

Este capítulo está enfocado al estudio de ciertos polinomios simétricos. Cabe mencionar que la mayoría de los resultados aquí presentados se pueden encontrar en diversos libros clásicos sobre polinomios simétricos, por ejemplo en [25, 27, 38, 41, 48]. El propósito de incluir aquí estos resultados es para hacer autocontenida la tesis y en algunos casos dar demostraciones más detalladas.

A continuación presentamos un diagrama que muestra el orden en el que se estudian las familias de polinomios simétricos, incluidos en este texto, los cuales son polinomios simétricos elementales, polinomios simétricos completos y suma de potencias. Los primeros dos se emplean para definir polinomios de Schur y Schur sesgados, así como el estudio de particiones y el Teorema de Jacobi.



Empezaremos introduciendo particiones enteras y diagramas de Young. Posteriormente pasaremos al estudio de los polinomios antes mencionados, cabe decir que estos forman un conjunto generador para el álgebra de polinomios simétricos homogéneos.

Por otro lado la familia de polinomios de Schur, la cual ha sido ampliamente estudiada, forma una base el espacio vectorial de polinomios simétricos. De estos revisamos definiciones equivalentes a través de polinomios elementales, completos, cociente de determinantes y usando diagramas de Young.

Por último, nos dedicamos al estudio de polinomios de Schur sesgados. Con el objetivo de mostrar relaciones entre la fórmula de Jacobi-Trudi para polinomios de Schur sesgados y la fórmula de Jacobi-Trudi dual o fórmula Nägelsbach-Kostka, recordamos el teorema de Jacobi para menores complementarios.

Denotaremos por S_n al grupo simétrico del conjunto (1, 2, ..., n)

Recordemos la definición de polinomios simétricos.

Definición 1.1. Un polinomio P, en n variables, se dice simétrico si para cualquier permutación $\sigma \in S_n$, tenemos que

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Representemos esto mediante un ejemplo.

Ejemplo 1.2. El polinomio P, definido como $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3$,

es un polinomio simétrico. Por ejemplo si tomamos la permutación $\sigma = (321)$ obtenemos

$$P(x_3, x_2, x_1) = x_3^2 + 2x_3x_2 + x_2^2 + 2x_2x_1 + x_1^2 + 2x_3x_1.$$

1.1. Particiones

Una partición es cualquier tupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de enteros no negativos en orden decreciente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Denotaremos por potencias a las repeticiones de una partición. Por ejemplo, $(5^3, 3^2) = (5, 5, 5, 3, 3)$.

Los elementos λ_i se llaman partes de λ . El número de partes es la longitud de λ , denotado por $\ell(\lambda)$; y la suma de las partes es el peso de λ , denotado por $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Denotemos por \mathcal{P} al conjunto de todas las particiones, y por \mathcal{P}_n al conjunto de las particiones con a lo más n partes, es decir, $\mathcal{P}_n = \{\lambda \colon \ell(\lambda) \leq n\}$.

Para toda partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ denotamos por rev (λ) la tupla $(\lambda_n, \dots, \lambda_1)$. Denotemos por id_n la tupla identidad $(1, 2, \dots, n)$.

Las particiones también se pueden pensar como sucesiones decrecientes finitas.

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots).$$

La longitud en este caso se define como

$$\ell(\lambda) = \#\{\lambda_j \colon \lambda_j \neq 0\} = \max(j \colon \lambda_j \neq 0).$$

1.2. Diagramas de Young-Ferrer

A cada partición se le puede asociar un diagrama. Formalmente se puede definir el diagrama asociado a la partición λ como el conjunto $D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq j \leq \lambda_i\}$. Para dibujar tal diagrama adoptamos la convención "inglesa", donde la primer coordenada i crece si nos movemos de arriba hacia abajo y la segunda coordenada j crece si nos movemos de izquierda a derecha. Dicho diagrama se llama diagrama de Young

Ejemplo 1.3. Dada la partición $\lambda = (5, 4, 4, 1)$, su diagrama de Young (o diagrama de Ferrer) asociado es

$$D(\lambda) = \Box$$

Definimos el conjunto:

$$\mathcal{D} = \{ A \subset \mathbb{N}^2, \text{ A es finito } : \forall a \in A \forall b \leq a, b \in A \}.$$

Proposición 1.4. Sea $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces $D(\lambda) \in \mathcal{D}$.

Demostración. Sean $(j,k) \in D(\lambda)$ y $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ tal que $(r,s) \leq (j,k)$, de la definición tenemos $k \leq \lambda_j$. Como $r \leq j$, al ser λ diagrama tenemos que $\lambda_r \geq \lambda_j$ y

$$s \le k \le \lambda_i \le \lambda_r$$
,

por lo que $(s, r) \in D(\lambda)$.

Definición 1.5. Dado $A \in \mathcal{D}$, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} := \{k : (j,k) \in A\}.$$

Lema 1.6. Si $A \in \mathcal{D}$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$

$$R_{A,j} = \{1, \dots, \max(R_{A,j})\}$$
 y $R_{A,j} = \{1, \dots, \#R_{A,j}\}$

Demostración. Sean $(j,k) \in A$ y $s \leq k$, entonces $(j,s) \leq (j,k)$ por lo que $(j,s) \in A$.

Proposición 1.7 (Receta para recuperar una partición a partir de su diagrama). Dada λ una partición y $A := D(\lambda)$ su diagrama, entonces

$$\lambda_j = \#\{k \colon (j,k) \in A\}.$$

Demostración.

$$\#\{k\colon (j,k)\in A\} = \#\{k\colon k\leq \lambda_j\} = \#\{1,\ldots\lambda_j\} = \lambda_j.$$

Proposición 1.8. Al restringir el contra dominio de D a D. La función

$$D: \mathcal{P} \to \mathcal{D}$$

es biyectiva.

$$D^{-1}(A)_j = \#\{k : (j,k) \in A\}.$$

Demostración. Inyectividad: Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$. Si $D(\lambda) = D(\mu)$. Para todo $\lambda \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_i = \#\{k \colon (j,k) \in D(\lambda)\} = \#\{k \colon (j,k) \in D(\mu)\} = \mu_i.$$

Entonces $\lambda = \mu$.

Sobreyectividad: Gracias al lema anterior $\lambda_j = \max(R_{A,j})$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, $(j + 1, \lambda_{j+1}) \in A$, como A es diagrama, $(j, \lambda_{j+1}) \in A$, esto es $\lambda_{j+1} \in R_{A,j}$. Se tiene entonces

$$\lambda_{j+1} \leq \max(R_{A,j}) = \#R_{A,j} = \lambda_j.$$

La condición que $A \in \mathcal{D}$ A es finito, implica que λ es una sucesión finita.

Dado $A\subset \mathbb{N}^2$ se puede considerar el subconjunto transpuesto:

$$A^{\top} = \{(k, j) : (j, k) \in A\}.$$

Proposición 1.9. Si $A \in \mathcal{D}$, entonces $A^{\top} \in \mathcal{D}$.

Idea de demostración: Dados $(r, s), (j, k) \in A$, se cumple que $(r, s) \leq (j, k)$ si y sólo si $(s, r) \leq (k, j)$.

Definición 1.10. Definimos la partición conjugada como

$$\lambda' = D^{-1} \left(D(\lambda)^{\top} \right).$$

La partición conjugada de λ , denotada por λ' , es aquella cuyo diagrama es el transpuesto del diagrama asociado a λ .

Proposición 1.11. Las partes de la partición conjugada λ' están dadas por

$$\lambda_k' = \#\{j : \lambda_j \ge k\}. \tag{1.1}$$

Demostración.

$$D(\lambda)^{\top} = \#\{j \colon (k,j) \in D(\lambda)^{\top}\} = \#\{j \colon (j,k) \in D(\lambda)\} = \{j \colon k \leq \lambda_j\}$$

Corolario 1.12.

$$\lambda_k' = \max(j \colon k \le \lambda_j)$$

Ejemplo 1.13. Por ejemplo el conjugado de $\lambda=(5,4,4,1)$, es $\lambda'=(4,3,3,3,1)$ y su diagrama es

$$\lambda' =$$

La siguiente proposición muestra, a través de los diagramas asociados, que la conjugación de particiones tienen la propiedad *involutiva*

Proposición 1.14. Sea $\lambda \in \mathcal{P}$, entonces

$$(\lambda')' = \lambda'' = \lambda. \tag{1.2}$$

Demostración. Sea $A = D(\lambda)$, entonces $(A^{\top})^{\top} = A$.

Definición 1.15. Sean λ, μ dos particiones tales que λ contiene a μ ($\mu \subseteq \lambda$), es decir que $\lambda_j \ge \mu_j$ para todo $j \ge 1$, A la diferencia $\lambda - \mu$ se llama partición sesgada, lo denotaremos por λ/μ y le asociaremos el conjunto diferencia de los dos diagramas.

Notemos que si la partición μ de la definición es la partición cero, entonces tenemos que $\lambda/\mu = \lambda$.

Ejemplo 1.16. Sean $\lambda = (5,4,4,1)$ y $\mu = (4,2,1)$, el diagrama sesgado es

$$\lambda - \mu = \frac{1}{1 - 1} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Definición 1.17. Un diagrama sesgado es una tira horizontal (resp. una tira vertical) si tiene a lo mas un cuadro en cada columna (resp. fila).

Si $\nu = \lambda/\mu$, una condición necesaria y suficiente para que ν sea una tira horizontal, es que se satisfaga que $\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \mu_2 \ge \dots$

Para toda tupla $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ denotemos por rev (ξ) a la tupla escrita al revés: (ξ_m, \dots, ξ_1) . La operación giro sobre una partición sesgada esta definida como

$$(\lambda/\mu)^* = (\lambda_1^{\ell(\lambda)} - \operatorname{rev}(\mu)) / (\lambda_1^{\ell(\lambda)} - \operatorname{rev}(\lambda)), \tag{1.3}$$

es decir, $(\lambda/\mu)^* = \alpha/\beta$, donde

$$\alpha_j = \lambda_1 - \mu_{\ell(\lambda)+1-j}, \qquad \beta_j = \lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)+1-j}.$$
 (1.4)

Ejemplo 1.18. Sean $\lambda = (6, 6, 3, 1)$ y $\mu = (3, 2, 2)$. Entonces

$$\lambda/\mu = (6, 6, 3, 1)/(3, 2, 2) =$$

$$(\lambda/\mu)^* = \alpha/\beta = (6, 4, 4, 3)/(5, 3) =$$

Se dice que un diagrama o diagrama sesgado es una tabla semiestándar si llenamos el diagrama de forma creciente (no estrictamente) por filas y estrictamente creciente por columnas.

1.3. Tres familias de polinomios simétricos

Existen muchas familias importantes de polinomios simétricos [2]. En esta sección estudiamos tres de estas, las más sencillas: polinomios simétricos elementales, polinomios simétricos completos y sumas de potencias.

En esta sección usualmente trabajaremos con polinomios en n variables, las cuales denotamos por $x = x_1, \ldots, x_n$.

Polinomios simétricos elementales

Definición 1.19. Sea $m \geq 0$. El m-ésimo polinomio simétrico elemental denotado por e_m , es la suma de todos los productos de m variables distintas x_i :

$$e_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$
 (1.5)

Notemos que para m=0 la suma sólo tiene un sumando correspondiente al producto vacío, por lo cual $e_0(x_1,\ldots,x_n)=1$. Si m>n, entonces $e_m(x_1,\ldots,x_n)$ es cero.

Observación 1.20. Para $0 \le m \le n$, una forma equivalente de representar los polinomios elementales es:

$$e_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r_1, \dots, r_n \in \{0,1\}} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}.$$

A partir de la definición combinatoria (1.5), damos la siguiente fórmula recursiva.

Proposición 1.21. Para $m \geq 1$

$$e_{m+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = e_{m+1}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} e_m(x_1, \dots, x_n).$$
(1.6)

Demostración. Por definición

$$e_{m+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{m+1}}.$$

Separamos la suma en dos partes, una cuando $i_{m+1} \neq n+1$ y otra cuando $i_{m+1} = n+1$:

$$e_{m+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i_1 < \dots < i_{m+1} < n+1} x_{i_1} \cdots x_{i_{m+1}} + \sum_{i_1 < \dots < i_{m+1} = n+1} x_{i_1} \cdots x_{i_{m+1}}$$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_{m+1} \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_{m+1}} + x_{n+1} \sum_{i_1 < \dots < i_m \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

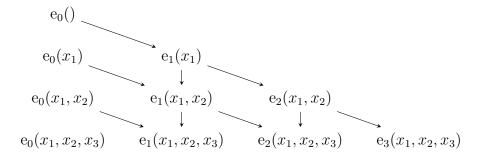
Aplicando nuevamente la definición en cada suma llegamos al resultado deseado.

$$e_{m+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{m+1}}.$$

Observación 1.22. Como un caso particular de la Proposición 1.21, tenemos

$$e_{n+1}(x_1...,x_n,x_{n+1}) = x_{n+1}e_n(x_1,...,x_n).$$

Podemos hacer un esquema de las relaciones presentadas en la Proposición anterior.



Un resultado clásico, el cual es, en cierto sentido, base de nuestro estudio, se enuncia y demuestra a continuación.

Proposición 1.23 (Fórmula de Vieta). Para cualquier lista de variables x_1, \ldots, x_n ,

$$\prod_{j=1}^{n} (t - x_j) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j.$$

Demostración. Se procede por inducción sobre n.

Para n=0,

$$\prod_{j=1}^{0} (t - x_j) = 1, \quad \sum_{j=0}^{0} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j = 1.$$

Para n = 1,

$$\prod_{j=1}^{1} (t - x_j) = t - x_1, \quad \sum_{j=0}^{1} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j = -x_1 + t.$$

Supongamos que el resultado es válido para n y demostremos que también lo es para n+1.

$$\prod_{j=1}^{n+1} (t - x_j) = \left(\prod_{j=1}^{n} (t - x_j)\right) (t - x_{n+1}) = \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j\right) (t - x_{n+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^{j+1} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+1} x_{n+1} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j.$$

Hacemos un cambio de variable en la primer suma, tenemos

$$\prod_{j=1}^{n+1} (t - x_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} e_{n-j+1}(x_1, \dots, x_n) t^j + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j+1} x_{n+1} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n) t^j.$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} (e_{n+1-j}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n)) t^j + (-1)^{n+1} e_n(x_1, \dots, x_n)$$

De la Proposición 1.21 y la Observación 1.22:

$$\prod_{j=1}^{n+1} (t - x_j) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-j+1} e_{n-j+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) t^j + (-1)^{n+1} e_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n-j} e_{n-j}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) t^j. \qquad \Box$$

Una fórmula para restar polinomios elementales cuándo sólo la última variable de cada conjunto de variables en que se evalúan los polinomios elementales es diferente se da en la siguiente proposición.

Proposición 1.24. Para todo m en \mathbb{N}_0

$$e_{m+1}(x_1,\ldots,x_n,y) - e_{m+1}(x_1,\ldots,x_n,z) = (y-z)e_m(x_1,\ldots,x_n)$$

Demostración. Para facilitar la notación vamos a escribir x en lugar de x_1, \ldots, x_n , apliquemos la Proposición 1.21 a cada polinomio elemental del lado izquierdo de la ecuación

$$e_{m+1}(x,y) - e_{m+1}(x,z) = (e_{m+1}(x) + y e_m(x)) - (e_{m+1}(x) + z e_m(x))$$
$$= (y-z) e_m(x).$$

Notemos que la Proposición tiene sentido incluso cuando y es igual a z.

Definición 1.25. La función generadora para la sucesión $(e_r(x_1,\ldots,x_n))_{r\geq 0}$ se define como

$$E(x_1, ..., x_n)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e_m(x_1, ..., x_n) t^m,$$
(1.7)

donde t es una nueva variable.

Como el número de variables es finito, entonces $e_m(x_1, \ldots, x_n)$ es cero para m > n, entonces

$$E(x_1, ..., x_n)(t) = \sum_{m=0}^{n} e_m(x_1, ..., x_n)t^m.$$

Proposición 1.26. La función generadora $E(x_1, ..., x_n)(t)$ cumple

$$E(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t) = (1 + x_{n+1}t) E(x_1, \dots, x_n)(t).$$
(1.8)

Demostración. De la definición de la función generadora y usando que la suma es finita, tenemos

$$E(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t) = \sum_{m=0}^{n+1} e_m(x_1, \dots, x_{n+1})t^m = 1 + \sum_{m=0}^{n} e_{m+1}(x_1, \dots, x_{n+1})t^{m+1},$$

usando la identidad (1.6) en la suma,

$$E(x_{1},...,x_{n},x_{n+1})(t) = 1 + \sum_{m=0}^{n} (e_{m+1}(x_{1},...,x_{n}) + x_{n+1} e_{m}(x_{1},...,x_{n})) t^{m+1}$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{n} e_{m+1}(x_{1},...,x_{n}) t^{m+1} + \sum_{m=0}^{n} x_{n+1} e_{m}(x_{1},...,x_{n}) t^{m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{n+1} e_{m}(x_{1},...,x_{n}) t^{m} + \sum_{m=0}^{n} x_{n+1} e_{m}(x_{1},...,x_{n}) t^{m+1}$$

$$= E(x_{1},...,x_{n})(t) + x_{n+1} t E(x_{1},...,x_{n})(t)$$

$$= (1 + x_{n+1}t) E(x_{1},...,x_{n})(t).$$

La siguiente proposición muestra una fórmula eficiente para la función generadora de polinomios elementales.

Proposición 1.27. Para todo $n \ge 0$

$$E_m(x_1, \dots, x_n)(t) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t).$$
 (1.9)

Demostración. La demostración es similar a la de la fórmula de Vieta.

Proposición 1.28. La función generadora cumple

$$E(x_1, ..., x_n, y)(t) - E(x_1, ..., x_n, z)(t) = (y - z) E(x_1, ..., x_n)(t)$$

Demostración. Se sigue de aplicar la Proposición 1.24 a cada elemento de la suma en la función generadora y factorizar (y-z).

Polinomios simétricos completos

Definición 1.29. Sea $m \ge 0$. El m-ésimo polinomio simétrico completo denotado por h_m , es la suma de todos los monomios de grado total m en las variables x_1, x_2, \ldots, x_n :

$$h_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_m \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$
 (1.10)

Notemos que para m=0 la suma sólo tiene un sumando correspondiente al producto vacío, por lo cual $h_0(x_1,\ldots,x_n)=1$. Es fácil ver que $h_1(x_1,\ldots,x_n)=e_1(x_1,\ldots,x_n)$. Es conveniente definir h_m y e_m como cero para m<0.

Ejemplo 1.30. Sean n = 4 y m = 3, entonces

$$h_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_1 x_1 + x_1 x_1 x_2 + x_1 x_1 x_3 + x_1 x_1 x_4 + x_1 x_2 x_2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_2 x_2 + x_2 x_2 x_3 + x_2 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_3 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_4 + x_3 x_3 x_3 + x_3 x_3 x_4 + x_3 x_4 x_4 + x_4 x_4 x_4.$$

Notemos que algunos factores coinciden por lo que podemos escribir la suma como:

$$h_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2^3 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_4 + x_2 x_3^2 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_4^2 + x_3^3 + x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2 + x_4^3.$$

Podemos escribir el polinomio anterior expresando las potencias de todos los factores como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{3}(x_{1},x_{2},x_{3},x_{4}) &= x_{1}^{3}x_{2}^{0}x_{3}^{0}x_{4}^{0} + x_{1}^{2}x_{2}^{1}x_{3}^{0}x_{4}^{0} + x_{1}^{2}x_{2}^{0}x_{3}^{1}x_{4}^{0} + x_{1}^{2}x_{2}^{0}x_{3}^{0}x_{4}^{1} + x_{1}^{1}x_{2}^{2}x_{3}^{3}x_{4}^{0} + x_{1}^{1}x_{2}^{1}x_{3}^{1}x_{4}^{0} \\ &+ x_{1}^{1}x_{2}^{1}x_{3}^{0}x_{4}^{1} + x_{1}^{1}x_{2}^{0}x_{3}^{1}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{3}x_{3}^{0}x_{4}^{0} + x_{1}^{0}x_{2}^{2}x_{3}^{1}x_{4}^{0} + x_{1}^{0}x_{2}^{2}x_{3}^{0}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{2}x_{3}^{2}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{1}x_{3}^{2}x_{4}^{0} \\ &+ x_{1}^{0}x_{2}^{1}x_{3}^{1}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{1}x_{3}^{0}x_{4}^{2} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{3}x_{4}^{0} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{2}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{2}x_{4}^{2} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{2}x_{4}^{1} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{2}x_{4}^{2} + x_{1}^{0}x_{2}^{0}x_{3}^{0}x_{4}^{2} + x_{1}^{0}x$$

La última suma sugiere una fórmula equivalente para polinomios simétricos completos presentada en la siguiente proposición.

Observación 1.31. Para cada $m \ge 0$ el m-ésimo polinomio simétrico completo se puede ver como

$$h_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_n = m; \ l_i \ge 0} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n}.$$

A continuación presentamos una fórmula recursiva para los polinomios completos, esta Proposición aparece en [39], pero la demostración aquí presentada es diferente dado que sólo se basa en la definición de polinomios completos.

Proposición 1.32. Para $m \ge 1$

$$h_{m+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = h_{m+1}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} h_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}). \tag{1.11}$$

Demostración. De la definición tenemos

$$h_{m+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_{n+1} = m+1} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_{n+1}^{l_{n+1}},$$

separando esta suma en dos partes, una cuando $l_{n+1}=0$ y otra cuando $l_{n+1}\neq 0$:

$$\mathbf{h}_{m+1}(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=m+1} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} + \sum_{l_1+l_2+\dots+l_{n+1}=m+1} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_{n+1}^{l_{n+1}}$$

$$= \sum_{l_1+l_2+\dots+l_n=m+1} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_n^{l_n} + x_{n+1} \sum_{l_1+l_2+\dots+l_{n+1}=m} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_{n+1}^{l_{n+1}},$$

usando de nuevo la definición para cada suma, obtenemos el resultado deseado.

Definición 1.33. La función generadora para la sucesión $(h_m(x_1,\ldots,x_n))_{m=0}^{\infty}$ se define como:

$$H(x_1, \dots, x_n)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x_1, \dots, x_n) t^m.$$
 (1.12)

Lema 1.34. La función generadora H cumple con la fórmula recursiva

$$H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t) = (1 - x_{n+1}t)^{-1} H(x_1, \dots, x_n)(t).$$
(1.13)

Demostración. De la definición de la función generadora tenemos

$$H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x_1, \dots, x_{n+1})t^m = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_{m+1}(x_1, \dots, x_{n+1})t^{m+1}.$$

La segunda igualdad se da al sacar el término con m=0 y hacer cambio de variable en la suma.

Ahora usando (1.11) en la suma tenemos

$$H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} (h_{m+1}(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1} h_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})) t^{m+1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x_1, \dots, x_n) t^m + \sum_{m=0}^{\infty} x_{n+1} h_m(x_1, \dots, x_{n+1}) t^{m+1}$$

$$= H(x_1, \dots, x_n)(t) + x_{n+1} t H(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})(t).$$

Proposición 1.35. La función generadora H se puede ver como

$$H(x_1, \dots, x_n)(t) = \prod_{i=1}^n (1 - x_i t)^{-1}.$$
 (1.14)

Demostración. Aplicando de forma recursiva del Lema 1.34 obtenemos el resultado deseado.

Los polinomios simétricos completos también se pueden expresar como sumas de progresiones geométricas como lo muestra la siguiente Proposición.

Proposición 1.36. Para todo m en \mathbb{N}_0 y n en \mathbb{N} se tiene

$$h_m(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.$$
 (1.15)

Demostración. Empecemos con la fórmula (1.14), y descomponemos por fracciones parciales

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x_1, \dots, x_n) t^m = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i t)} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{n-1}}{(1 - x_i t) \prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{n+m-1}}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)} t^m.$$

La última igualdad se da por series geométricas. Igualando los coeficientes del término t^m llegamos a (1.15).

Observación 1.37. La complejidad computacional del algoritmo basado en la fórmula (1.15) es de Cn^2 .

Para calcular las potencias de x_j , se pueden usar logaritmos y la función exponencial, así que se requieren solamente Cn operaciones para calcular todas estas potencias.

Lema 1.38. Sea $0 \le s < n - 1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^s}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} = 0.$$
 (1.16)

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 1.36.

Recordemos que escribimos x en lugar de x_1, \ldots, x_n .

Proposición 1.39. Para cada m > 0

$$h_{m+1}(x, x_{n+1}) - h_{m+1}(x, x_{n+2}) = (x_{n+1} - x_{n+2}) h_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}).$$
(1.17)

Demostración. Apliquemos la Proposición 1.32 al polinomio $h_{m+1}(x, x_{n+1}, x_{n+2})$

$$h_{m+1}(x, x_{n+1}, x_{n+2}) = h_{m+1}(x, x_{n+1}) + x_{n+2} h_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}).$$

Por otro lado

$$h_{m+1}(x, x_{n+2}, x_{n+1}) = h_{m+1}(x, x_{n+2}) + x_{n+1} h_m(x, x_{n+2}, x_{n+1}).$$

Tomando en cuenta que $h(x, x_{n+1}, x_{n+2})$ es un polinomio simétrico, podemos restar las dos expresiones anteriores, teniendo

$$0 = h_{m+1}(x, x_{n+2}) + x_{n+1} h_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}) - (h_{m+1}(x, x_{n+1}) + x_{n+2} h_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}))$$

= $h_{m+1}(x, x_{n+2}) - h_{m+1}(x, x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) h_m(x, x_{n+2}, x_{n+1}).$

Pasando los dos primeros sumandos al lado izquierdo obtenemos (1.17).

Relación entre polinomios elementales y completos

Proposición 1.40. Tenemos que

$$H(x_1, \dots, x_n)(t) E(x_1, \dots, x_n)(-t) = 1$$
 (1.18)

o equivalentemente

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r e_r(x_1, \dots, x_n) h_{m-r}(x_1, \dots, x_n) = \delta_{m,0},$$
(1.19)

para todo $m \geq 0$.

Demostración. De (1.9) y (1.14) se sigue (1.18).

La relación (1.19) nos lleva a una identidad con determinantes que usaremos más adelante. Recordemos que $h_r(x) = e_r(x) = 0$ para r < 0.

Proposición 1.41. Sea m un entero positivo, consideremos las matrices:

$$\mathcal{H} = \left[h_{j-k} \right]_{j,k=1}^{m}, \qquad \mathcal{E} = \left[(-1)^{j-k} e_{j-k} \right]_{j,k=1}^{m}.$$
 (1.20)

Entonces \mathcal{H} y \mathcal{E} son mutuamente inversas.

Proposición 1.42. Se sigue de la ecuación (1.19)

Notemos que ambas matrices, \mathcal{H} y \mathcal{E} , son triangulares inferiores, con unos en la diagonal, entonces det $\mathcal{H} = \det \mathcal{E} = 1$.

Sumas de potencias

Definición 1.43. Para cada $r \ge 1$ la r-ésima suma de potencias es

$$p_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^r.$$

La función generadora de la sucesión $\left(\mathbf{p}_r\right)_{r=1}^{\infty}$ es

$$P(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{p}_r t^{r-1} = \sum_{i \ge 1} \sum_{r \ge 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i \ge 1} \frac{x_i}{1 - x_i t}.$$

Haciendo uso de las propiedades de funciones generadoras podemos escribir polinomios simétricos completos y elementales en términos de sumas de potencias y viceversa:

$$n h_n = \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r},$$
 (1.21)

$$n e_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}.$$
 (1.22)

Estas fórmulas son conocidas como identidades de Newton.

En el álgebra con identidad de polinomios simétricos se puede definir una involución ω con las propiedades:

$$\omega(\mathbf{p}_r) = (-1)^r \, \mathbf{p}_r, \qquad \omega(\mathbf{e}_r) = \mathbf{h}_r, \qquad \omega^2 = \omega.$$

1.4. Conjuntos generadores

En lo que sigue, trabajaremos con elementos y subconjuntos del álgebra Sym_n , el álgebra de polinomios simétricos en n variables. Dado un subconjunto G de Sym_n , denotamos por $\langle G \rangle$ a la subálgebra generada por G. Presentaremos un razonamiento elemental sobre conjuntos generadores de Sym_n . La palabra "minimal" se entiende en el sentido de orden parcial \subseteq .

Observación 1.44. El álgebra Sym_n se genera por el conjunto de los polinomios $\{e_1, \ldots, e_n\}$, este conjunto es algebraicamente independiente [37]. Más aún, el álgebra Sym_n no se puede generar por un conjunto de tamaño estrictamente menor a n. Este último hecho se puede demostrar usando la dimensión de Krull (Agradecemos a Eduardo Camps Moreno por explicarnos la idea de esta demostración).

Proposición 1.45. $\{e_m\}_{m=1}^n$ en un conjunto generador del álgebra Sym_n .

Demostración. Es bien sabido [37, Theorem 6.1] que $\{e_m\}_{m=1}^n$ es un subcojunto minimal generador de Sym_n . Supongamos que no es minimal, es decir, existe un k en $\{1, \ldots, n\}$ y un polinomio P en n variables tal que

$$e_k = P(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n).$$
 (1.23)

Dado un polinomio mónico de la forma $f(t) = \sum_{m=0}^{n} c_m t^m = \prod_{j=1}^{n} (t - x_j)$, por las fórmulas de Vieta $c_m = (-1)^{n-m} e_{n-m}(x_1, \dots, x_n)$. Entonces, por (1.23), el coeficiente c_{n-k} se puede expresar a través de los otros coeficientes por la regla:

$$c_{n-k} = (-1)^k P(-c_{n-1}, \dots, (-1)^{k-1} c_{n-k+1}, (-1)^{k+1} c_{n-k-1}, \dots, (-1)^n c_0). \tag{1.24}$$

Esto obviamente es falso dado que existen polinomios mónicos cuyos coeficientes no satisfacen (1.24).

Gracias a las relaciones entre e y h (E(-t) H(t) = 1 (1.18)) y entre e y p (las identidades de Newton (1.22)) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.46. Los conjuntos $\{h_k\}_{k=1}^n$, $\{p_k\}_{k=1}^n$, son conjuntos minimales generadores de Sym_n .

1.5. Teorema de Jacobi para menores complementarios

Dado que en la literatura clásica de polinomios de Schur se usa este teorema y por lo general se expresa sólo para menores principales líderes, decidimos incluir este teorema en forma general.

Sea \mathbb{F} un campo. Denotemos por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de matrices $m\times n$ con entradas en \mathbb{F} . En lugar de \mathbb{F} , también podríamos usar un anillo conmutativo con identidad.

Dados una matriz A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$, una lista $J = (j_1, \dots, j_p)$ de elementos de $\{1, \dots, m\}$ y una lista $K = (k_1, \dots, k_q)$ de elementos de $\{1, \dots, n\}$, denotamos por A_J^K a la matriz

$$\left[A_{j_r,k_s}\right]_{r,s=1}^{p,q},$$

es decir, la matriz de la clase $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ cuyas entradas (r,s) son A_{j_r,k_s} . En lo que sigue, nos restringiremos a la clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ de matrices cuadradas.

Sea Incr_p^n el conjunto de funciones estrictamente crecientes $\{1,\ldots,p\}\to\{1,\ldots,n\}$. Un elemento J de Incr_p^n se puede identificar con la lista de la forma $\{j_1,\ldots,j_p\}$, o con el subconjunto $\{j_1,\ldots,j_p\}$ de $\{1,\ldots,n\}$. Denotamos por J' la numeración de forma ascendente del conjunto $\{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_p\}$. Por ejemplo, si n=7 y J=(1,3,5,6), entonces J'=(2,4,7). Dada una lista $J=(j_1,\ldots,j_p)$, Denotamos por |J| a la suma de sus componentes.

El resultado principal de esta sección tiene dos formas equivalentes.

Teorema 1.47 (Teorema de Jacobi para el menor complementario de la matriz inversa). Sean A una matriz invertible de la clase $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}), p \in \{1, ..., n\}$ y $J, K \in \mathrm{Incr}_p^n$. Entonces

$$\det((A^{-1})_J^K) = (-1)^{|J|+|K|} \frac{1}{\det A} \det(A_{K'}^{J'}). \tag{1.25}$$

Teorema 1.48 (Teorema de Jacobi para el menor complementario de la matriz adjunta). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), \ p \in \{1, \dots, n\} \ y \ J, K \in \mathrm{Incr}_p^n$. Entonces

$$\det(\operatorname{adj}(A)_{J}^{K}) = (-1)^{|J|+|K|}(\det A)^{p-1}\det(A_{K'}^{J'}). \tag{1.26}$$

Presentemos primero algunos resultados que nos ayudarán a demostrar el teorema anterior.

El menor principal

Empecemos con el caso $J = K = (1, \dots, p)$.

Lema 1.49. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, A invertible $y p \in \{1, ..., n\}$. Denotemos por B a la inversa de A. Entonces

$$\left[\frac{B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} \mid B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n}}{0_{(n-p)\times p} \mid I_{n-p}} \right] A = \left[\frac{I_p \mid 0_{p\times(n-p)}}{A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} \mid A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}} \right].$$
(1.27)

Demostración. Por definición de la matriz inversa, $BA = I_n$. Reescribimos esta igualdad en forma de bloques

$$\left[\begin{array}{c|c} B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} & B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} \\ \hline B_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & B_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} & A_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} \\ \hline A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{array} \right].$$

En particular, esta ecuación implica que

$$\begin{split} B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}A_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}+B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n}A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p}&=I_{p},\\ B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}A_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n}+B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n}A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}&=0_{p\times(n-p)}. \end{split}$$

Con esto en mente podemos probar la igualdad (1.27):

$$\begin{bmatrix} B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} & B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & I_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} & A_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} \\ \hline A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} A_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} + B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} A_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} + B_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} A_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} + I_{n-p} A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & 0_{(n-p)\times p} A_{1,\dots,p}^{p+1,\dots,n} + I_{n-p} A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline A_{p+1,\dots,n}^{1,\dots,p} & A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} \end{bmatrix}.$$

Proposición 1.50 (Teorema de Jacobi para el menor principal de la matriz inversa). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A invertible $y p \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\det((A^{-1})_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}) = \frac{1}{\det(A)} \det(A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}). \tag{1.28}$$

Demostración. Recordemos la fórmula del producto de determinantes y la fórmula para determinantes de matrices triangulares por bloques:

$$\det(MN) = \det(M)\det(N), \qquad \det\left[\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline Q & N \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} M & R \\ \hline 0 & N \end{array}\right] = \det(M)\det(N).$$

Usando estas formulas calculamos los determinantes de ambos lados de la ecuación (1.27):

$$\det(B_{1,\dots,p}^{1,\dots,p})\det(A) = \det(A_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}).$$

La fórmula obtenida es equivalente a (1.28).

Matrices de permutación

Recordemos que denotamos por S_n al grupo simétrico de orden n. Dado ϕ en S_n , denotamos por P_{ϕ} a la matriz permutación asociada a ϕ :

$$P_{\phi} = \left[\delta_{r,\phi(s)}\right]_{r,s=1}^{n}.$$

Por ejemplo,

$$P_{2,3,1,4} = \left[egin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}
ight].$$

Un par de resultados derivados de la definición son: $P_{\phi}P_{\psi} = P_{\phi\psi}, P_{\phi^{-1}} = P_{\phi}^{\top}$.

Proposición 1.51. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), \ \phi, \psi \in S_n, \ r, s \in \{1, \dots, n\}.$ Entonces

$$(P_{\phi}^{\top} A P_{\psi})_{r,s} = A_{\phi(r),\psi(s)}.$$

Demostración.

$$(P_{\phi}^{\top}AP_{\psi})_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} (P_{\phi})_{r,t}^{\top} (AP_{\psi})_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{u=1}^{n} (P_{\phi})_{r,t}^{\top} A_{t,u} (P_{\psi})_{u,s} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{u=1}^{n} (P_{\phi})_{t,r} A_{t,u} (P_{\psi})_{u,s}$$
$$= \sum_{t=1}^{n} \sum_{u=1}^{n} \delta_{t,\phi(r)} A_{t,u} \delta_{u,\psi(s)} = A_{\phi(r),\psi(s)}.$$

Menor general de una matriz inversa

En esta parte probaremos el Teorema 1.47. La idea principal es llevar este Teorema a la forma de la Proposición 1.50 usando permutaciones de filas y columnas.

Lema 1.52. Sean $J = (j_1, \ldots, j_p) \in \operatorname{Incr}_p^n$, $J' = (j_{p+1}, \ldots, j_n)$ $y \phi$ la permutación de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\phi(r) = j_r$ para todo r en $\{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\det P_{\phi} = (-1)^{|J| - \frac{p(p+1)}{2}}.$$

Demostración. Es sabido que el determinante de P_{ϕ} coincide con el signo de la permutación ϕ . El signo se puede calcular como sign $(\phi) = (-1)^{\text{inv}(\phi)}$, donde inv (ϕ) es el número de inversiones de ϕ :

$$\operatorname{inv}(\phi) = \#\{(r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}: \quad r < s \quad \land \quad \phi(r) > \phi(s)\}.$$

En nuestro caso, dado que $\phi(1) < \ldots < \phi(p)$ y $\phi(p+1) < \ldots < \phi(n)$,

$$\operatorname{inv}(\phi) = \#\{(r, s) \in \{1, \dots, p\} \times \{p + 1, \dots, n\} \colon \phi(r) > \phi(s)\}$$
$$= \sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p + 1, \dots, n\} \colon \phi(s) < \phi(r)\}.$$

Notemos que el conjunto $\{1,\ldots,\phi(r)\}$ es la unión disjunta de los siguientes conjuntos:

$$\{\phi(t): t \in \{1, \dots, r\}\}, \{\phi(s): s \in \{r+1, \dots, n\}, \phi(s) < \phi(r)\}.$$

Por lo tanto

$$\#\{s \in \{p+1,\ldots,n\}: \ \phi(s) < \phi(r)\} = \phi(r) - r,$$

У

$$inv(\phi) = \sum_{r=1}^{p} (\phi(r) - r) = |J| - \frac{p(p+1)}{2}.$$

Prueba del Teorema 1.47. Denotemos por ϕ a la permutación asociada a J, como en el Lema 1.52 y por ψ a la permutación asociada a K de manera similar. Consideremos la matriz

$$B = P_{\psi}^{\top} A P_{\phi}.$$

Notemos que

$$\det(B) = (-1)^{|K| - \frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{|J| - \frac{p(p+1)}{2}} \det(A) = (-1)^{|J| + |K|} \det(A).$$

La inversa de B es

$$B^{-1} = P_{\phi}^{\top} A^{-1} P_{\psi}.$$

Para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $B_{r,s} = A_{\psi(r),\phi(s)}$ y $(B^{-1})_{r,s} = (A^{-1})_{\phi(r),\psi(s)}$. En virtud de la Proposición 1.51:

$$A_{K'}^{J'} = B_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}, \qquad (A^{-1})_J^K = (B^{-1})_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}.$$

Usemos estas relaciones y apliquemos la Proposición 1.50:

$$\det((A^{-1})_J^K) = \det((B^{-1})_{1,\dots,p}^{1,\dots,p}) = \frac{1}{\det(B)} \det(B_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n}) = (-1)^{|J|+|K|} \frac{1}{\det(A)} \det(A_{K'}^{J'}). \quad \Box$$

Menor general de la matriz adjunta

La siguiente prueba fue una colaboración de Fidel Vásquez Rojas.

Prueba del Teorema 1.48. Consideremos los cuatros casos posibles.

Caso I: A es invertible. Entonces $adj(A) = det(A)A^{-1}$ y

$$\det(\operatorname{adj}(A)_J^K) = \det(A)^p \det((A^{-1})_J^K).$$

Usando el Teorema 1.47 obtenemos (1.26).

Caso II: p = 1. Entonces $J = \{j_1\}$, $K = \{k_1\}$ y el determinante $\det(\operatorname{adj}(A)_J^K)$ es el cofactor de la entrada (k_1, j_1) en la matriz A. Por definición, este cofactor es igual a $(-1)^{j_1+k_1}\det(A_{K'}^{J'})$.

Caso III: A no es invertible, $p \ge 2$ y rank(A) < n - 1. Entonces todos los cofactores de A son cero, y ambos lados de (1.26) son cero.

Caso IV: A no es invertible, $p \ge 2$, rank(A) = n - 1. La igualdad

$$A \operatorname{adj}(A) = 0_{n \times n}$$

implica que la imagen de adj(A) está contenida en el kernel de A, por lo tanto

$$\operatorname{rank}(\operatorname{adj}(A)) \le \dim(\ker(A)) = n - \operatorname{rank}(A) = 1.$$

Dado que $p \ge 2$, todos los menores de $\operatorname{adj}(A)$ de orden p son cero, y ambos lados de (1.26) son cero.

1.6. Polinomios de Schur

En esta sección, daremos varias formas de definir a los polinomios de Schur.

Cabe mencionar que los polinomios de Schur forman una base para el espacio de polinomios simétricos vistos como un espacio vectorial. Una prueba de este hecho se puede encontrar en [38, Section 1.6].

Dado un número finito de variables x_1, \ldots, x_n . Podemos escribir $\alpha = \lambda + \delta$, donde λ es una partición de longitud $\leq n$, es decir λ en \mathcal{P}_n , y $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$. Entonces podemos definir

$$a_{\lambda+\delta}(x_1,\dots,x_n) = \det \left[x_i^{\lambda_j+n-j} \right]_{1 \le i,j \le n} = \det \begin{bmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

El caso particular

$$a_{\delta}(x_1, \dots, x_n) = \det \left[x_i^{n-j} \right]_{1 \le i, j \le n} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

es el determinante de Vandermonde.

Notemos que si $x_i = x_j$, para cualesquiera i y j, $a_{\lambda+\delta}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Entonces $a_{\lambda+\delta}(x_1, \ldots, x_n)$ es divisible por las diferencias $x_i - x_j$.

Definición 1.53. Dada una partición λ en \mathcal{P}_n , $a_{\lambda+\delta}$, se puede dividir por a_{δ} , y el cociente

$$s_{\lambda} = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda + \delta}/a_{\delta}, \tag{1.29}$$

es llamado polinomio de Schur.

Observación 1.54. El polinomio de Schur correspondiente a la partición la, es un polinomio homogéneo de grado $|\lambda|$.

Otra forma de definir polinomios de Schur es a través de polinomios simétricos completos y de forma análoga con polinomios simétricos elementales. A continuación presentamos estas dos definiciones equivalentes.

Una demostración de dicha equivalencia se puede encontrar en [41, Chapter I, section 3].

Definición 1.55 (Fórmula de Jacobi-Trudi). Dada una partición λ , el polinomio de Schur es:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \det \left[h_{\lambda_i - i + j}(x_1, \dots, x_n) \right]_{i,j=1}^{\ell(\lambda)}.$$
 (1.30)

Notemos que la ecuación (1.30) tiene sentido para vectores $\lambda \in \mathbb{N}_0^n$, tales que $\lambda + \delta$ no tiene partes negativas. Si alguno de los índices $\lambda_i + n - i$ ($1 \le i \le n$) coinciden, entonces $s_{\lambda}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Observación 1.56. Las partes de λ corresponden a los grados de los polinomios simétricos completos, que están en la diagonal principal de la matriz en (1.30).

A continuación presentamos una forma equivalente de la definición anterior. Conocida como la fórmula dual de Jacobi-Trudi, también conocida como segunda fórmula de Jacobi-Trudi o fórmula Nägelsbach-Kostka.

Proposición 1.57 (fórmula dual de Jacobi-Trudi). Dada una partición λ , el polinomio de Schur se define por:

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \det \left[e_{\lambda'_i - i + j}(x_1, \dots, x_n) \right]_{i,j=1}^{\ell(\lambda')}.$$
 (1.31)

Demostración. Una forma de ver la equivalencia entre (1.30) y (1.31) es mediante el Teorema de Jacobi para menores complementarios (presentado en la sección anterior) y recordando la forma matricial que inducen las sucesiones $\{e_n\}$ y $\{h_n\}$.

Observación 1.58. Las partes de λ' corresponden a los grados de los polinomios simétricos elementales que están en la diagonal principal de la matriz en (1.31).

Una identidad importante que satisfacen los polinomios de Schur es la conocida como identidad de Cauchy.

Proposición 1.59. Sean x_1, x_2, \ldots, x_n y y_1, y_2, \ldots, y_n un par de conjuntos de variables. Entonces

$$\det\left[\frac{1}{1-x_j y_k}\right]_{j,k=1}^n = \frac{\det\left[x_k^{n-j}\right]_{j,k=1}^n \det\left[y_k^{n-j}\right]_{j,k=1}^n}{\prod_{j,k=1}^n (1-x_j y_k)}.$$
 (1.32)

Demostración. La prueba es por inducción sobre n. Para calcular el determinante, a cada fila, diferente de la primera, le restamos la primer fila.

$$\frac{1}{1 - x_j y_k} - \frac{1}{1 - x_1 y_k} = \frac{x_j - x_1}{1 - x_1 y_k} \frac{y_k}{1 - x_j y_k},$$

y factorizamos, de cada fila distinta a la primera $x_j - x_1$ y de cada columna $\frac{1}{1 - x_1 y_k}$. Obtenemos entonces:

$$\prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - x_1 y_k} \det \begin{bmatrix}
\frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{y_3}{1 - x_2 y_2} & \cdots & \frac{y_n}{1 - x_2 y_n} \\
\frac{y_1}{1 - x_3 y_1} & \frac{y_2}{1 - x_3 y_2} & \frac{y_3}{1 - x_3 y_3} & \cdots & \frac{y_n}{1 - x_3 y_n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{y_1}{1 - x_n y_1} & \frac{y_2}{1 - x_n y_2} & \frac{y_3}{1 - x_n y_3} & \cdots & \frac{y_n}{1 - x_n y_n}
\end{bmatrix}.$$

Después, a cada columna, distinta de la primera, le restamos la primer columna y tenemos

$$\frac{y_k}{1 - x_i y_k} - \frac{y_1}{1 - x_i y_1} = \frac{y_j - y_1}{1 - x_i y_1} \frac{1}{1 - x_i y_k},$$

de nuevo factorizamos, de cada fila distinta a la primera $\frac{1}{1-x_jy_1}$ y y_k-y_1 de cada columna distinta a la primera. Ahora tenemos:

$$\frac{\prod_{j=2}^{n}(x_{j}-x_{1})\prod_{k=2}^{n}(y_{k}-y_{1})}{\prod_{j=2}^{n}(1-x_{j}y_{1})\prod_{k=1}^{n}(1-x_{1}y_{k})} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{y_{1}}{1-x_{2}y_{1}} & \frac{1}{1-x_{2}y_{2}} & \frac{1}{1-x_{2}y_{3}} & \cdots & \frac{1}{1-x_{2}y_{n}}\\ \frac{y_{1}}{1-x_{3}y_{1}} & \frac{1}{1-x_{3}y_{2}} & \frac{1}{1-x_{3}y_{3}} & \cdots & \frac{1}{1-x_{3}y_{n}} \end{bmatrix}.$$

El resultado se sigue por inducción expandiendo el determinante por la primer fila.

La proposición anterior, permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición 1.60 (Identidad de Cauchy). Sean x_1, x_2, \ldots, x_n y y_1, y_2, \ldots, y_n un par de conjuntos de variables. Entonces

$$\frac{1}{\prod_{j,k=1}^{n} (1 - x_j y_k)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y), \qquad (1.33)$$

Demostración. Consideremos el determinante de la matriz cuya entrada j, k es

$$(1 - x_j y_k)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x_j^m y_k^m.$$

Usando la propiedad polilineal tenemos

$$\det \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_j^m y_k^m \right]_{j,k=1}^n = \sum_{p_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=0}^{\infty} \det \left[x_j^{p_j} y_k^{p_j} \right]_{j,k=0}^n = \sum_{p_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{p_j} \right) \det \left[y_k^{p_j} \right]_{j,k=0}^n.$$

Si $p_j = p_{j'}$ para algunos j y j', entonces el determinante es igual a cero. Dado esto, podemos restringirnos a p en \mathbb{N}_0^n , con $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$, es decir, las particiones λ en \mathcal{P}_n y a las permutaciones de estas, de esta forma no tendríamos coincidencias de p_j .

$$\det \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_j^m y_k^m \right]_{j,k=1}^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_{\rho_j}} \right) \det \left[y_k^{\lambda_{\rho_j}} \right]_{j,k=0}^n$$
$$= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_n} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_{\rho_j}} \right) \operatorname{sgn}(\rho) \det \left[y_k^{\lambda_j} \right]_{j,k=0}^n.$$

Por simetría de x y y, tenemos

$$\det\left[\frac{1}{(1-x_jy_k)}\right]_{j,k=1}^n = \sum_{\lambda} \det\left[x_k^{\lambda_j}\right]_{j,k=1}^n \cdot \det\left[y_k^{\lambda_j}\right]_{j,k=1}^n.$$

De (1.32) y (1.29), obtenemos lo que queremos.

1.7. Polinomios de Schur sesgados

En la siguiente definición, se usa la definición 1.15 de partición sesgada y se generaliza la definición 1.55.

Definición 1.61 (Fórmula de Jacobi–Trudi). Dada una partición sesgada λ/μ , el polinomio de Schur sesgado $s_{\lambda/\mu}$ se define por:

$$\mathbf{s}_{\lambda/\mu} = \det[\mathbf{h}_{\lambda_j - \mu_k - j + k}]_{j,k=1}^{\ell(\lambda)}. \tag{1.34}$$

De aquí en adelante, denotaremos por $JT(\lambda/\mu)$ a la matriz $[h_{\lambda_j-\mu_k-j+k}]_{j,k=1}^{\ell(\lambda)}$ que aparece en el lado derecho de (1.34). Como mencionamos, esta es una generalización de la ecuación (1.31), la cuál se obtiene tomando la partición μ como la partición cero.

Observación 1.62. Dos particiones sesgadas pueden inducir el mismo polinomio de Schur sesgado, como lo muestra el siguiente ejemplo. El problema de las coincidencias entre polinomios de Schur sesgados no es un problema trivial, véase [47].

Proposición 1.63. Consideremos $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$, con $\ell(\lambda) = n$ y $\mu \subseteq \lambda$ y $\lambda^{(1)}, \mu^{(1)} \in \mathcal{P}$, de la forma

$$\lambda_1^{(1)} = \mu_1^{(1)}, \dots, \lambda_m^{(1)} = \mu_m^{(1)},$$

$$\lambda_{m+1}^{(1)} = \lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}^{(1)} = \lambda_n,$$

$$\mu_{m+1}^{(1)} = \mu_1, \dots, \mu_{n+m}^{(1)} = \mu_n.$$

Entonces

$$s_{\lambda/\mu} = s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}.$$
 (1.35)

Demostración. La matriz JT asociada a $\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}$ es de la forma

$$JT(\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{m-1} & h_{\lambda_1^{(1)}-\mu_1+m} & \cdots & h_{\lambda_1^{(1)}-\mu_n+n+m-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{m-2} & h_{\lambda_2^{(1)}-\mu_1+m-1} & \cdots & h_{\lambda_2^{(1)}-\mu_n+n+m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & h_{m-3} & h_{\lambda_3^{(1)}-\mu_1+m-2} & \cdots & h_{\lambda_3^{(1)}-\mu_n+n+m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h_{\lambda_m^{(1)}-\mu_1+1} & \cdots & h_{\lambda_m^{(1)}-\mu_n+n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{\lambda_1-\mu_1} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{\lambda_2-\mu_1-1} & \cdots & h_{\lambda_2-\mu_n+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{\lambda_n-\mu_1-n+1} & \cdots & h_{\lambda_n-\mu_n} \end{bmatrix}$$

El bloque inferior izquierdo es cero dado que los subíndices de los elementos son de la forma

$$\lambda_j - \mu_k^{(1)} - (j+m) + k, \text{ con } k \le m.$$

Como $\mu_k^{(1)} = \lambda_k^{(1)} \ge \lambda_j$, todos estos índices son negativos. Para ver el polinomio de Schur sesgado asociado, nos interesa el determinante de $JT(\lambda^{(1)}/\mu^{(1)})$, este lo podemos calcular por bloques, notando que el bloque superior izquierdo de tamaño $m \times m$ es una matriz uni-triangular superior por lo que el determinante es 1, y el bloque inferior izquierdo es nulo, por lo que

$$s_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}} = \det(JT(\lambda^{(1)}/\mu^{(1)})) = \det\begin{bmatrix} h_{\lambda_1 - \mu_1} & \cdots & h_{\lambda_1 - \mu_n} \\ h_{\lambda_2 - \mu_1 - 1} & \cdots & h_{\lambda_2 - \mu_n + n - 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n - \mu_1 - n + 1} & \cdots & h_{\lambda_n - \mu_n} \end{bmatrix} = \det(JT(\lambda/\mu) = s_{\lambda/\mu}.$$

El siguiente lema es combinatorio, que nos permite escribir de forma ascendente al subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ en términos de su complemento. Un resultado similar se puede encontrar en [41, (1.7)] y en [26, Proof of Lemma A.9.2].

Lema 1.64. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, d = n - m, ρ una sucesión estrictamente creciente de longitud m y ξ una sucesión estrictamente creciente de longitud d, tales que $\xi = \{1, \ldots, n\} \setminus \rho$. Entonces para todo j en $\{1, \ldots, d\}$

$$\xi_j = j + \#\{k \in \{1, \dots, m\}: \ \rho_k - k < j\}.$$
 (1.36)

Demostración. Sean $A_j = \{k \in \{1, ..., m\}: \rho_k < \xi_j\}$ y $B_k = \{j \in \{1, ..., d\}: \xi_j < \rho_k\}$. El conjunto $\{\rho_k : k \in A_j\}$ es el complemento de $\{\xi_1, ..., \xi_j\}$ en $\{1, ..., \xi_j\}$, por lo tanto $\xi_j = j + \#A_j$. Similarmente, $\rho_k = k + \#B_k$. Más aún,

$$\rho_k < \xi_j \iff j \notin B_k \iff \#B_k < j \iff \rho_k - k < j,$$

$$y \xi_j = j + \#A_j + \#\{k \colon \rho_k - k < j\}.$$

Para ilustrar el Lema 1.64, tomemos n=10 y $\rho=(1,3,4,6,9,10)$, entonces $\xi=(2,5,7,8)$, por ejemplo:

$$\xi_3 = 3 + \#\{k: \ \rho_k - k < 3\} = 3 + \#\{1, 2, 3, 4\} = 7.$$

Al comparar las fórmulas (1.36) y (1.1) podemos ver que la dualidad entre los conjuntos y sus complementos es en cierta forma similar a la dualidad entre las particiones y sus conjugados.

La siguiente es una generalización de la proposición 1.57 conocida como Fórmula dual de Jacobi-Trudi, la segunda fórmula de Jacobi-Trudi o la fórmula de Nägelsbach-Kostka.

Proposición 1.65 (Fórmula dual de Jacobi–Trudi). Dadas las particiones λ, μ , con $\mu \subseteq \lambda$, definimos $s_{\lambda/\mu}$ en términos de polinomios simétricos elementales:

$$s_{\lambda/\mu} = \det[e_{\lambda'_i - \mu'_k - j + k}]_{j,k=1}^{\lambda_1}.$$
 (1.37)

Demostración. Para ver la relación entre las fórmulas (1.34) y (1.37), tomemos dos particiones λ y μ con longitud menor o igual a p, tales que λ' y μ' tengan longitud menor o igual a q, donde p+q=n+1. Tomemos las matrices \mathcal{H} y \mathcal{E} como en (1.20), considerando el menor de \mathcal{H} con índices fila $\lambda_j + p + j$, $(1 \leq j \leq p)$ e índices columna $\mu_k + p - k$, $(1 \leq j \leq p)$. Aplicando el Lema 1.64 a la sucesión de estos índices obtenemos los complementos, los cuales podemos

expresar como sigue

$$\alpha_{j} = j + \#\{k \in \{1, \dots, p+q\} : (\lambda_{k} + p + k) - k < j\}$$

$$= j + \#\{k \in \{1, \dots, p+q\} : \lambda_{k} + p < j\},$$

$$\beta_{j} = j + \#\{k \in \{1, \dots, p+q\} : (\mu_{k} + p + k) - k < j\}$$

$$= j + \#\{k \in \{1, \dots, p+q\} : \mu_{k} + p < j\}.$$

Es fácil ver que estos los índices correspondientes a las particiones

$$\alpha_j = \lambda'_j + p + j,$$

$$\beta_j = \mu'_j + p + j.$$

Finalmente usando el Teorema de Jacobi para el menor complementario 1.47, con los índices que acabamos de calcular, tenemos:

$$\det \left[h_{\lambda_j - \mu_k - j + k} \right]_{j,k=1}^p = (-1)^{|\lambda| + |\mu|} \det \left[(-1)^{\lambda'_j - \mu'_k - j + k} e_{\lambda'_j - \mu'_k - j + k} \right]_{j,k=1}^q.$$

Los signos menos se cancelan y llegamos a lo deseado

$$\det \left[\mathbf{h}_{\lambda_j - \mu_k - j + k} \right]_{i,k=1}^p = \det \left[\mathbf{e}_{\lambda'_i - \mu'_k - j + k} \right]_{i,k=1}^q.$$

De hecho si ponemos $\mu = 0$, llegamos a la relación entre (1.30) y (1.31):

$$\det \left[\mathbf{h}_{\lambda_j - j + k} \right]_{j,k=1}^p = \det \left[\mathbf{e}_{\lambda'_j - j + k} \right]_{j,k=1}^q.$$

En las fórmulas (1.34) y (1.37), la partición μ se extiende con ceros hasta la longitud de la partición λ . Notemos también que la extensión de la partición λ con ceros no cambia el correspondiente polinomio de Schur sesgado $s_{\lambda/\mu}$, sin embargo la matriz $JT(\lambda/\mu)$ cambia de tamaño.

Vamos a usar la notación λ/μ y la definición (1.34) para todo par de particiones λ, μ , sin pedir que $\mu \subseteq \lambda$. De otra forma la siguiente proposición nos muestra que $s_{\lambda/\mu}$ es igual a cero.

Proposición 1.66. Para todo par de particiones λ y μ tales que $\mu \nsubseteq \lambda$, los determinantes del lado derecho de (1.34) y (1.37) son cero.

Demostración. Supongamos que $p \in \{1, \ldots, \ell(\lambda)\}$ y $\mu_p > \lambda_p$. Entonces la (p, p)-ésima entrada de $JT(\lambda/\mu)$ es cero, y también lo son las entradas por debajo y a la izquierda de (p, p), sombreadas

en la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} h_{\lambda_{1}-\mu_{1}} & \dots & h_{\lambda_{1}-\mu_{p-1}-2+p} & h_{\lambda_{1}-\mu_{p-1}+p} & h_{\lambda_{1}-\mu_{p+1}+p} & \dots & h_{\lambda_{1}-\mu_{n}-1+n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_{p-1}-\mu_{1}-p+2} & \dots & h_{\lambda_{p-1}-\mu_{p-1}} & h_{\lambda_{p-1}-\mu_{p+1}} & h_{\lambda_{p-1}-\mu_{p+1}+2} & \dots & h_{\lambda_{p-1}-\mu_{n}-(p-1)+n} \\ h_{\lambda_{p}-\mu_{1}-p+1} & \dots & h_{\lambda_{p}-\mu_{p-1}-1} & h_{\lambda_{p}-\mu_{p}} & h_{\lambda_{p}-\mu_{p+1}+1} & \dots & h_{\lambda_{p}-\mu_{n}-p+n} \\ h_{\lambda_{p+1}-\mu_{1}-p} & \dots & h_{\lambda_{p+1}-\mu_{p-1}-2} & h_{\lambda_{p+1}-\mu_{p-1}} & h_{\lambda_{p+1}-\mu_{p+1}} & \dots & h_{\lambda_{p+1}-\mu_{n}-(p+1)+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_{n}-\mu_{1}-n+1} & \dots & h_{\lambda_{n}-\mu_{p-1}-n+p-1} & h_{\lambda_{n}-\mu_{p}-n+p} & h_{\lambda_{n}-\mu_{p+1}-n+p+1} & \dots & h_{\lambda_{n}-\mu_{n}} \end{bmatrix}$$

En efecto, si $j \ge p$ y $k \le p$, entonces

$$\lambda_j - \mu_k - j + k \le \lambda_p - \mu_p < 0,$$

por lo que $JT(\lambda/\mu)_{j,k} = h_{\lambda_j - \mu_k - +k} = 0$. El rango de la matriz formada por las primeras p columnas de $JT(\lambda/\mu)$ es estrictamente menor que p, la matriz $JT(\lambda/\mu)$ es singular, y $\det(JT(\lambda/\mu)) = 0$. Otra forma de obtener el mismo resultado es dividiendo las filas y columnas de $JT(\lambda/\mu)$ en las partes de $\{1, \ldots, p\}$ y $\{p+1, \ldots, \ell(\lambda)\}$ y aplicando la formula para el determinante de matrices triangulares por bloques.

La situación con el determinante en (1.37) es análoga; probemos ahora que $\mu \subseteq \lambda$ si y sólo si $\mu' \subseteq \lambda'$. Dado que la operación $\lambda \mapsto \lambda'$ es involutiva, es suficiente verificar la necesidad. Supongamos que $\mu_k \le \lambda_k$ para cada k. Entonces para cada j obtenemos $\{k \colon \mu_k \ge j\} \subseteq \{k \colon \lambda_k \ge j\}$, est es, $\mu'_j \le \lambda'_j$ por (1.1).

Como los polinomios de Schur forman una base para el espacio de polinomios simétricos, los polinomios de Schur sesgados se pueden expresar como combinación lineal de esta base. Los coeficientes de dicha combinació lineal se expresan por medio de la regla de Littlewood–Richardson.

Para dar la rela de Littlewood–Richardson tenemos que recordar lo que es una permutación de celosía.

Una permutación de celosía es una sucesión de enteros positivos, tal que si los leemos de izquierda a derecha, el número de j's que hemos leído es mayor o igual al número de j + 1's que hemos leído.

Ejemplo 1.67. Consideremos la sucesión 1123213. En este caso, la sucesión es una permutación de celosía: para el momento en que hemos leído el primer 2 ya hemos leído dos números 1, para el momento en que hemos leído dos números 2 ya hemos leído dos veces al número 1 y para el momento en que hemos leído dos 3 ya hemos leído dos 2.

Por el contrario 1232113 no es permutación celosía dado que dos números 2 aparecen antes que aparezca dos veces el número 1 leyendo de izquierda a derecha.

Ahora sí, estamos listos para expresar cualquier polinomio de Schur sesgado como combinación lineal de polinomios de Schur.

Definición 1.68 (Coeficientes de Littlewood–Richardson). Dadas las particiones λ , μ y ν tales que λ/μ es un diagrama sesgado, $LR^{\lambda}_{\mu,\nu}$ es igual al número de diagramas semiestándares T tal que

- 1. T es de la forma λ/μ con llenado ν .
- 2. Una permutación de celosía resulta de tomar la sucesión con las entradas de cada renglón del diagrama sesgado, de derecha a izquierda y de arriba a abajo.

Proposición 1.69 (Regla de Littlewood-Richardson). Sean λ y μ particiones tales que λ/μ es un diagrama sesgado, entonces

$$s_{\lambda/\mu}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\nu \in \mathcal{P}_n} LR_{\mu,\nu}^{\lambda} s_{\nu}(x_1,\ldots,x_n).$$
(1.38)

Ejemplo 1.70. Sean $\lambda = (3,2), \mu = (1),$ entonces el diagrama asociado a la partición sesgada es

$$\lambda/\mu =$$

Los posibles llenados ν de λ/μ deben tener peso igual a 4, todos los posibles son: (1,1,1,1), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,2), (3,1), (1,3) y (4), pero queremos que ν sea partición, entonces las únicas que tomaremos son (1,1,1,1), (2,1,1), (2,2), (3,1) y (4). Calculemos los coeficientes asociadas a cada una de estas.

Para (1, 1, 1, 1), los diagramas semiestándares llenados con esta sucesión son:

Veamos si las permutaciones tomadas son permutaciones de celosía:

- A: la sucesión es 2143, esta no es permutación de celosía dado que aparece un 2.
- B: la sucesión es 3142, en ella aparece un 3 antes que un 2, por lo que no es una permutación de celosía.
- C: la sucesión 4132 no es permutación de celosía ya que aparece un 4 antes que un 3.
- D: la sucesión es 3214, aquí aparece un 2 antes que un 1.

E: la sucesión es 4231, esta tampoco es permutación de celosia.

Por esto $LR_{(1),(1,1,1,1)}^{(3,2)} = 0$.

Ahora para (2, 1, 1) tenemos los siguientes diagramas semiestándares

$$A = \frac{11}{23}, \quad B = \frac{12}{13}, \quad C = \frac{13}{12}.$$

A: la sucesión es 1132, en este caso no es una permutación de celosía ya que aparece un 3 antes de un 2.

B: la sucesió es 2131, en este caso no es permutación de celosía.

C: la sucesión es 3121, en este caso como aparece un 3 antes de un 2, aunque hay un 1 antes que un 2, esta no puede ser una permutación de celosía.

Por lo tanto $LR_{(1),(2,1,1)}^{(3,2)} = 0$.

Para (2, 2) tenemos los siguientes diagramas semiestándar:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

A: la sucesión es 1122, en este caso sí es una permutación de celosía ya que aparece dos 1's antes que dos 2.

B: la sucesión es 2121, en este caso no es permutación de celosía.

Por lo tanto $LR_{(1),(2,2)}^{(3,2)} = 1$.

Para (3, 1) tenemos el diagrama semiéstandar:

$$A = \frac{11}{12}.$$

En este caso la suseción es 1121, por lo que es permutación de celosía ya que aparecen dos 1's antes de un 2.

Entonces, $LR_{(1),(3,1)}^{(3,2)} = 1$.

Por último, para (4), aunque es permutación, no podemos tener ningún diagrama semiestándar. Por lo que $LR_{(1),(4)}^{(3,2)} = 0$.

Resumiendo, tenemos:

$$s_{(3,2)/(1)} = s_{(2,2)} + s_{(3,1)}$$
.

Nota 1.71. Los coeficientes $LR^{\lambda}_{\mu,\nu}$ son conocidos como coeficientes de Littlewood–Richardson, y el método que expusimos es conocido como la regla de Littlewood–Richardson. Existen diversos métodos para calcular los coeficientes $LR^{\lambda}_{\mu,\nu}$, tales como figuras de Zelevinsky o la numeración reversa de Remmel y Whitney, para más detalles de estos métodos se puede consultar [25].

En este trabajo usaremos un caso particular de la regla de Littlewood–Richardson conocida como la versión sesgada de la regla de Pieri. La cuál se enuncia a continuación, la equivalencia con la regla de Littlewood–Richardson se puede encontrar en [41, Chap. I, section 5].

Sea λ una partición y $r \in \mathbb{N}$. Entonces

$$s_{\lambda/(r)}(x_1...,x_n) = \sum_{\nu} s_{\nu}(x_1...,x_n),$$
 (1.39)

donde ν corre sobre todas las particiones $\nu \subseteq \lambda$ tales que λ/ν es una tira horizontal de tamaño r. Formalmente, ν de (1.39) satisface

$$\ell(\nu) \le \ell(\lambda), \quad \lambda_{j+1} \le \nu_j \le \lambda_j \ (1 \le j \le \ell(\lambda)) \quad \text{y} \quad |\lambda| - |\nu| = r.$$
 (1.40)

Ejemplo 1.72. La regla de Pieri sesgada (1.39) aplicada a $(8^3, 5)/(2)$ nos da

es decir

$$S_{(8^3,5)/(2)} = S_{(8^2,6,5)} + S_{(8^2,7,4)} + S_{(8^2,8,3)}$$
.

La forma del diagrama inicial implica que los nodos eliminados aparecen sólo en las últimas dos filas de los diagramas del lado derecho.

El mismo polinomio de Schur sesgada se puede representar como el determinante de la siguiente matriz, por la fórmula de Jacobi-Trudi

$$JT((8^3,5)/(2)) = \begin{bmatrix} h_6 & h_9 & h_{10} & h_{11} \\ h_5 & h_8 & h_9 & h_{10} \\ h_4 & h_7 & h_8 & h_9 \\ h_0 & h_3 & h_4 & h_5 \end{bmatrix}.$$

Las columnas 2, 3, 4 de $JT((8^3, 5)/(2))$, sombreadas en la matriz, coinciden con las columnas 2, 3, 4 de $JT((8^3, 5))$. En cada fila de la submatriz, los grados de los polinomios simétricos completos forman una progresión aritmética. La primera columna de $JT((8^3, 5)/(2))$ daña la estructura simple. Por lo que conviene expandir el determinante por la primer columna y convertimos cada cofactor en un polinomio de Schur (esto es fácil aplicando la Nota 1.56):

$$s_{(8^3,5)/(2)} = h_6 \, s_{(8^2,5)} - h_5 \, s_{(9,8,5)} + h_4 \, s_{(9^2,5)} - h_0 \, s_{(9^3)} \, .$$

Es bien sabido que $s_{(\lambda/\mu)^*} = s_{\lambda/\mu}$; vease, por ejemplo, [48, Exercise, 7.56(a)]. Sin embargo, en el presente trabajo damos una prueba alternativa de este hecho en la siguiente proposición

aplicando la fórmula de Jacobi-Trudi y el concepto de matriz pertranspuesta. Recordemos que la matriz de intercambio de orden n se define por $J_n = [\delta_{j+k,n+1}]_{j,k=1}^n$, donde δ es la delta de Kronecker. Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, la matriz $J_n A^{\top} J_n$ es llamada la pertranspuesta de A; su entrada (j,k) es igual a la entrada $A_{n+1-k,n+1-j}$. Las matrices $J_n A^{\top} J_n$ y A tienen el mismo determinante dado que $\det(J_n) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Proposición 1.73. Sean λ y μ particiones. Entonces

$$s_{\lambda/\mu} = s_{(\lambda/\mu)^*}. \tag{1.41}$$

Demostración. Denotemos la longitud de λ por n. El siguiente cálculo muestra que la matriz $JT((\lambda/\mu)^*)$ es la pertranspuesta de $JT(\lambda/\mu)$:

$$JT((\lambda/\mu)^*)_{j,k} = h_{\lambda_{n+1-k}-\mu_{n+1-j}-j+k}$$

= $h_{\lambda_{n+1-k}-\mu_{n+1-j}-(n+1-k)+(n+1-j)} = JT(\lambda/\mu)_{n+1-k,n+1-j}.$

Entonces, los detereminantes de $JT((\lambda/\mu)^*)$ y $JT(\lambda/\mu)$ coinciden.

Si el par λ, μ no forman una partición sesgada, es decir $\lambda_j < \mu_j$ para algún j, entonces el par α, β definido por (1.4) cumple lo mismo, por lo que, en este caso, ambos lados de (1.41) son cero.

Nota 1.74. Muchas de las fórmulas para polinomios de Schur sesgados no involucran explicitamente las variables x_1, \ldots, x_w ; este hecho nos lleva al concepto de funciones de Schur sesgadas. En este trabajo, es conveniente pensar que el argumento de una función de Schur sesgada no es una lista de variables x_1, x_2, \ldots , sino una sucesión arbitraria de números $(e_k)_{k=0}^{\infty}$ o, equivalentemente la serie formal $E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k$. Entonces los números h_0, h_1, \ldots se definen como cocientes de la serie formal H(t) = 1/E(-t), es decir, por la fórmula (1.19), y las funciones de Shur sesgadas estan definidas por la fórmula de Jacobi-Trudi (1.34). Esta idea es explicada en [40, Chap. VII] y [48, Exercice 7.91]. Notemos que (1.29) tiene sentido sólo para polinomios de Schur y no para funciones.

Capítulo 2

Polinomios simétricos en alfabeto simpléctico

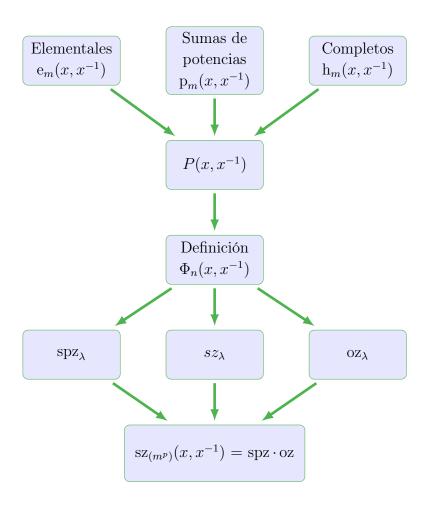
En este capítulo estudiaremos polinomios simétricos en 2n variables evaluados en el alfabeto simpléctico $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. Mostraremos como reescribir estas expresiones en términos de variables tipo "Dickson-Zhukovsky" $z_j := x_j + x_j^{-1}$. La función $t \mapsto t + t^{-1}$ es conocida como transformada de Zhukovsky; algunos autores [30] la relacionan con el nombre de Dickson. El alfabeto simpléctico $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ aparece naturalmente como la lista de raíces de polinomios palíndromos, presentaremos detalles de esto más adelante. En particular, expresiones de esta forma aparecen en las siguientes situaciones:

- 1. Si A es una matriz simpléctica u ortogonal especial de orden par, entonces el polinomio característico de A es palíndromo.
- 2. Los caracteres de grupos simplécticos u ortogonales especiales de ordenes pares son casos particulares de polinomios simétricos en 2n variables evaluados en el alfabeto simpléctico. Veremos mas detalles en la Sección 2.5.
- 3. Dado un polinomio de Laurent a, consideremos la matriz de Toeplitz de banda simétrica $T_m(a)$ generada por a. Los menores de $T_m(a)$, expresados en raíces de a son polinomios simétricos en 2n variables evaluados en el alfabeto simpléctico. Veremos esto a profundidad en el Capítulo 4.

El resultado principal de este Capítulo es el Teorema 2.17, el cual muestra la manera de pasar de un polinomio simétrico en 2n variables a uno en n variables. Otros resultados a destacar de este Capítulo son las Proposiciones 2.13, 2.14 y 2.15, los cuales muestran como escribir polinomios elementales, completos y sumas de potencias (respectivamente) evaluados en 2n variables en términos de los mismos polinomios ahora evaluados en n variables. Mientras que

las Proposiciones 2.25 y 2.24 muestran como escribir polinomios elementales y completos en n variables como combinación lineal de polinomios elementales y completos en 2n variables.

En el siguiente diagrama mostramos como llegamos a los resultados principales. Empezamos con las familias sencillas de polinomios simétricos evaluadas en el alfabeto simpléctico, con estas podemos escribir cualquier polinomio simétrico en dicho alfabeto, lo cual nos lleva a la definición de un morfismo Φ_n . Este morfismo a su vez nos ayuda a escribir polinomios simétricos evaluados en variables tipo "Dickson-Zhukovsky", como en el caso de polinomios de Schur, Schur simplécticos y Schur ortogonales. Los cuales sirven para unir resultados sobre determinantes de matrices de Toeplitz de banda simétricas.



2.1. Algunas propiedades de polinomios de Chebyshev

En esta sección recordamos algunos hechos sobre polinomios de Chebyshev que usaremos después en la tesis (algunos autores escriben este apellido como Chebyshov). La mayoría de estos se pueden encontrar en [42]. Aparte de \mathcal{T}_m y \mathcal{U}_m , trabajaremos con polinomios de Chebyshev

de tercer y cuarto orden, \mathcal{V}_m y \mathcal{W}_m . Estas cuatro sucesiones de polinomios se pueden definir mediante la misma fórmula de recurrencia

$$\mathcal{T}_{m}(u) = 2u \, \mathcal{T}_{m-1}(u) - \mathcal{T}_{m-2}(u),$$

$$\mathcal{U}_{m}(u) = 2u \, \mathcal{U}_{m-1}(u) - \mathcal{U}_{m-2}(u),$$

$$\mathcal{V}_{m}(u) = 2u \, \mathcal{V}_{m-1}(u) - \mathcal{V}_{m-2}(u),$$

$$\mathcal{W}_{m}(u) = 2u \, \mathcal{W}_{m-1}(u) - \mathcal{W}_{m-2}(u),$$

con condiciones iniciales $\mathcal{T}_0(u) = \mathcal{U}_0(u) = \mathcal{V}_0(u) = \mathcal{W}_0(u) = 1$,

$$\mathcal{T}_1(u) = u, \qquad \mathcal{U}_1(u) = 2u, \qquad \mathcal{V}_1(u) = 2u - 1, \qquad \mathcal{W}_1(u) = 2u + 1.$$

Los polinomios de Chebyshev tienen las siguientes propiedades importantes:

$$2\mathcal{T}_m\left(\frac{1}{2}(t+t^{-1})\right) = t^m + t^{-m},\tag{2.1}$$

$$\mathcal{U}_m\left(\frac{1}{2}(t+t^{-1})\right) = \frac{t^{m+1} - t^{-m-1}}{t - t^{-1}},\tag{2.2}$$

$$\mathcal{V}_m\left(\frac{1}{2}(t^2+t^{-2})\right) = \frac{t^{2m+1}+t^{-2m-1}}{t+t^{-1}},\tag{2.3}$$

$$W_m\left(\frac{1}{2}(t^2+t^{-2})\right) = \frac{t^{2m+1}-t^{-2m-1}}{t-t^{-1}}.$$
(2.4)

Demostración de la igualdad (2.2). Denotemos la igualdad (2.2) por $\mathcal{A}(m)$. Aplicamos inducción sobre m. $\mathcal{A}(0)$ es cierto, dado que para m=0 ambos lados de (2.2) son iguales a 1. $\mathcal{A}(1)$ es cierto, ya que para m=1 ambos lados de (2.2) son iguales a $t+t^{-1}$. Supongamos que se cumplen $\mathcal{A}(m-2)$ y $\mathcal{A}(m-1)$ y probemos $\mathcal{A}(m)$:

$$\mathcal{U}_m\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{(t+t^{-1})(t^m-t^{-m})}{t-t^{-1}} - \frac{t^{m-1}-t^{-m+1}}{t-t^{-1}} = \frac{t^{m+1}-t^{-m-1}}{t-t^{-1}}.$$

Las funciones generadoras de las sucesiones $(2\mathcal{T}_m(u/2))_{m=0}^{\infty}$ y $(\mathcal{U}_m(u/2))_{m=0}^{\infty}$ están dadas por

$$\frac{2 - tu}{1 - tu + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} 2\mathcal{T}_m(u/2)t^m,$$
(2.5)

$$\frac{1}{1 - tu + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{U}_m(u/2)t^m.$$
 (2.6)

Corolario 2.1. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$\mathcal{U}_m(\cos(\alpha)) = \frac{\sin((m+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}.$$
 (2.7)

Demostración. Sustituyamos $t = e^{i\alpha}$ en (2.2).

Al ser \mathcal{U} un polinomio, este no sólo se define a través de la fórmula recursiva, sino también como un polinomio explicito, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$\mathcal{U}_m(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} (2t)^{m-2k}. \tag{2.8}$$

Demostración. Denotemos a la igualdad (2.8) por $\mathcal{A}(m)$. Se verifican $\mathcal{A}(0)$ y $\mathcal{A}(1)$:

$$\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0-k}{k} (2t)^{0-2k} = 1, \qquad \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1-k}{k} (2t)^{1-2k} = 2t.$$

Probemos $\mathcal{A}(m)$ supongamos ciertos $\mathcal{A}(m-2)$ y $\mathcal{A}(m-1)$. Pongamos $q = \lfloor m/2 \rfloor$. Si m es par, entonces $\lfloor (m-2)/2 \rfloor = \lfloor (m-1)/2 \rfloor = q-1$. Consideremos $2t\mathcal{U}_{m-1}(t)$ y separemos el primer sumando que tiene t^m :

$$2t\mathcal{U}_{m-1}(t) = 2t \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \binom{m-1-k}{k} (2t)^{m-1-2k} = \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \binom{m-1-k}{k} (2t)^{m-2k}$$
$$= (-1)^0 \binom{m-1-0}{0} (2t)^{m-0} + \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k \binom{m-1-k}{k} (2t)^{m-2k}.$$

Consideremos $-\mathcal{U}_{m-2}(t)$ y separemos el último sumando que tenga t^0 :

$$-\mathcal{U}_{m-2} = -\sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \binom{m-2-k}{k} (2t)^{m-2-2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{q-2} (-1)^{k+1} \binom{m-2-k}{k} (2t)^{m-2(k+1)} + (-1)^q \binom{m-1-q}{q-1} (2t)^0.$$

Después de hacer un cambio de variable en la suma tenemos

$$-\mathcal{U}_{m-2} = \sum_{k=1}^{q-1} (-1)^k \binom{m-1-k}{k+1} (2t)^{m-2k} + (-1)^q (2t)^0.$$

Aplicando la fórmula recursiva llegamos a que $\mathcal{A}(m)$ también se cumple.

Tenemos las siguientes fórmulas explícitas para \mathcal{T}_m y \mathcal{U}_m :

$$2\mathcal{T}_m(z/2) = m \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{m-k} {m-k \choose k} z^{m-2k} \qquad (m \in \mathbb{N}), \tag{2.9}$$

$$\mathcal{U}_m(z/2) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m-k}{k} z^{m-2k} \qquad (m \in \mathbb{N}_0).$$
 (2.10)

Podemos reescribir (2.9) de la forma

$$\sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \tau_{m,k} u^{m-2k} = \mathcal{T}_m^{\text{monic}}(u) = \begin{cases} 2\mathcal{T}_m(u/2), & m \in \mathbb{N}; \\ \mathcal{T}_0(u/2), & m = 0. \end{cases}$$
 (2.11)

Donde

$$\tau_{s,k} := \begin{cases} \frac{(s-k-1)! \, s}{k! \, (s-2k)!}, & s \in \mathbb{N}, \ 0 \le k \le s; \\ 1, & k = s = 0. \end{cases}$$
 (2.12)

Resulta ser que tanto \mathcal{T} como \mathcal{U} forman base para el espacio de polinomios, como lo demuestran las siguientes proposiciones. En gran parte es por esto que nos interesa estudiar estos polinomios.

Proposición 2.3. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$u^{m} = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} C_{m,k} 2\mathcal{T}_{m-2k} \left(\frac{u}{2}\right), \qquad (2.13)$$

donde $C_{m,k}$ se define como

$$C_{m,k} = \begin{cases} \binom{m}{k}, & \text{if } k < \frac{m}{2}; \\ \frac{1}{2} \binom{m}{m/2}, & \text{if } k = \frac{m}{2}. \end{cases}$$
 (2.14)

Demostración. Para m par,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-2k} = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \binom{m}{k} x^{m-2k} + \binom{m}{m/2} + \sum_{j=\frac{m}{2}+1}^m \binom{m}{j} x^{m-2j}.$$

Haciendo cambio de variable k=m-j, tenemos $0\leq j\leq m$ y m-2j=-(m-2k),

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{m} = {m \choose m/2} + \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} {m \choose k} \left(x^{m-2k} + x^{-(m-2k)}\right)$$
$$= {m \choose m/2} + \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} {m \choose k} 2\mathcal{T}_{m-2k} \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Si m es impar, la demostración es similar, pero en este caso la suma original no tiene el término central.

Proposición 2.4. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$u^{m} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \beta_{m-k,k} \mathcal{U}_{m-2k}(u/2), \tag{2.15}$$

donde $\beta_{m,k}$ son elementos del triángulo de Catalán:

$$\beta_{m,k} = \frac{(m+k)! (m-k+1)}{k! (m+1)!}.$$

Necesitaremos algunas definiciones para las siguientes fórmulas. Para todo j en $\{1, \ldots, n\}$, sea $\Omega_j(z)$ el producto de la diferencia

$$\Omega_j(z) = \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} (z_j - z_k). \tag{2.16}$$

Denotemos por Vander(z) al polinomio de Vandermonde en las variables z_1, \ldots, z_n :

Vander
$$(z) = \det \left[z_k^{n-j} \right]_{j,k=1}^n = \prod_{j=1}^n \Omega_1(z_j, \dots, z_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} (z_j - z_k).$$
 (2.17)

Las siguientes "fórmulas de duplicación" se siguen de las propiedades (2.1)–(2.4) con cambios de variables adecuados y se pueden encontrar en [42, Sección 1.2.4].

Proposición 2.5. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$\mathcal{T}_{2m}(t/2) = \mathcal{T}_m((t^2 - 2)/2),$$
 (2.18)

$$\mathcal{U}_{2m+1}(t/2) = t \,\mathcal{U}_m((t^2 - 2)/2),\tag{2.19}$$

$$2\mathcal{T}_{2m+1}(t/2) = t \,\mathcal{V}_m((t^2 - 2)/2),\tag{2.20}$$

$$\mathcal{U}_{2m}(t/2) = \mathcal{W}_m((t^2 - 2)/2). \tag{2.21}$$

Los polinomios \mathcal{V}_m y \mathcal{W}_m se relacionan mediante

$$\mathcal{V}_m(-t) = (-1)^m \mathcal{W}_m(t). \tag{2.22}$$

Denotamos por $\mathcal{U}_m^{(1)}$ al polinomio $\sum_{k=0}^m \mathcal{U}_k$ y por $\sigma_{m,j}$ el coeficiente t^j en $\mathcal{U}_m^{(1)}(t/2)$:

$$\mathcal{U}_{m}^{(1)}(t/2) = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{U}_{k}(t/2) = \sum_{j=0}^{m} \sigma_{m,j} t^{j}.$$
 (2.23)

Se sigue de (2.8) que

$$\sigma_{m,k} = \sum_{j=k}^{\lfloor (m+k)/2 \rfloor} (-1)^{j-k} {j \choose k} = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-k)/2 \rfloor} (-1)^{j} {k+j \choose j}.$$
 (2.24)

Los coeficientes $\sigma_{m,k}$ son elementos de la sucesión A128494 en Online Encyclopedia of Integer Sequences [44]. Es fácil probar por inducción que

$$\mathcal{U}_m^{(1)}(t/2) = \frac{\mathcal{V}_{m+1}(t/2) - 1}{t - 2}.$$
(2.25)

Proposición 2.6 (Determinante tipo Vandermonde para polinomios de Chebyshev \mathcal{U}). Para todo n en \mathbb{N} ,

$$\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{i,k=1}^n = \operatorname{Vander}(z). \tag{2.26}$$

Demostración. Un método es usar transformaciones elementales y obtener la siguiente fórmula recursiva:

$$\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{i,k=1}^n = \Omega_1(z_1, \dots, z_n) \det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{i,k=1}^{n-1}$$

Otro método es notar que el determinante del lado derecho de (2.26) se anula cuando dos variables coincide, por lo tanto debe ser un múltiplo de Vander(z), es decir, existe un polinomio C(z) tal que

$$\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n = C(z) \operatorname{Vander}(z).$$

Comparando los coeficientes del término $z_1^{n-1}z_2^{n-2}\dots z_n^0$ podemos concluir que C(z)=1.

De hecho es fácil ver, usando los mismos métodos que en la Proposición 2.6, que

$$Vander(z) = \det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n$$

$$= \det \left[\mathcal{T}_{n-j}^{\text{monic}}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n$$

$$= \det \left[\mathcal{V}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n$$

$$= \det \left[\mathcal{W}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n.$$

Lema 2.7. Sea $0 \le s < n-1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathcal{U}_s(z_j/2)}{\Omega_j(z)} = 0. \tag{2.27}$$

Demostración. Representamos la suma como el cociente de determinantes, con el numerador

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{U}_s(z_1/2) & \dots & \mathcal{U}_s(z_n/2) \\ \mathcal{U}_{n-2}(z_1/2) & \dots & \mathcal{U}_{n-2}(z_n/2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{U}_0(z_1/2) & \dots & \mathcal{U}_0(z_n/2) \end{bmatrix}.$$

Como $0 \le s < n-1$, la primer fila coincide con una de las otras, por lo que el determinante es cero.

2.2. Polinomios palíndromos y sus raíces

Un polinomio $f(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$, con $a_m \neq 0$, es llamado palíndromo si $a_k = a_{m-k}$ para todo k en $\{0, \ldots, m\}$. Esta condición es equivalente a la identidad $f(t) = t^m f(1/t)$. En esta sección revisaremos algunos hechos de polinomios palíndromos de grados pares y después sobre polinomios palíndromos de grado impar. Para m = 2n, la principal observación es el hecho que f(t) se puede escribir como $t^n g(t + t^{-1})$, donde g es cierto polinomio. Esta idea se presenta, por ejemplo, en [20, Chap. VIII], pero sin la fórmula explícita de g. La fórmula explícita de g, presentada en la Proposición 2.9, fue expresada independientemente por varios autores, se puede encontrar, por ejemplo, Elouafi [22, formula (2.2)], Lachaud [36, Note A.4].

Proposición 2.8. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$. Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, pongamos $z_j = x_j + x_j^{-1}$. Definamos los polinomios f y g como

$$f(t) = \prod_{j=1}^{n} ((t - x_j)(t - x_j^{-1})), \qquad g(u) = \prod_{j=1}^{n} (u - z_j).$$

Entonces

$$f(t) = t^n g(t + t^{-1}), (2.28)$$

y el polinomio f es palíndromo.

Demostración. La fórmula (2.28) se sigue de la definición de f y g:

$$t^{n}g(t+t^{-1}) = t^{n}\prod_{j=1}^{n} \left(t+t^{-1}-x_{j}-x_{j}^{-1}\right) = \prod_{j=1}^{n} \left((t-x_{j})(t-x_{j}^{-1})\right) = f(t).$$

La expresión $g(t+t^{-1})$, al ser una combinación lineal de expresiones de la forma $(t+t^{-1})^k$, es un polinomio de Laurent palíndromo de la forma

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k (t^k + t^{-k}).$$

Por otro lado (2.28) implica que f es un polinomio palíndromo.

Las siguientes Proposiciones son, en cierto sentido, inversas a la Proposición 2.8. Ahora definimos g por medio de los coeficientes f y concluimos sobre las raíces de f y g.

Proposición 2.9. Sea f un polinomio palíndromo con coeficientes complejos:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k,$$

donde $a_{2n-k} = a_k$ para todo k en $\{0, \ldots, n\}$. Definamos el polinomio g como

$$g(u) = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \mathcal{T}_{j}^{\text{monic}}(u) = a_n + \sum_{j=1}^{n} 2a_{n-j} \mathcal{T}_{j}(u/2).$$

Entonces

$$f(t) = t^n g(t + t^{-1}). (2.29)$$

Demostración. Para todo k en $\{0, \ldots, n-1\}$, escribimos $a_k t^k + a_{2n-k} t^{2n-k}$ como $a_k t^n (t^{n-k} + t^{k-n})$, y aplicamos (2.1).

Proposición 2.10. Sean f y g como en la Proposición 2.9, $a_0 \neq 0$ y z_1, \ldots, z_n las raíces del polinomio g:

$$g(u) = a_0 \prod_{j=1}^{n} (u - z_j).$$

Para cada j, denotemos por x_j al número complejo que satisface $x_j + x_j^{-1} = z_j$. Entonces los números

$$x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1},$$

son raíces del polinomio f, es decir,

$$f(t) = a_0 \prod_{j=1}^{n} ((t - x_j) (t - x_j^{-1})).$$

Demostración. Se sigue directamente de (2.29) y las definiciones de z_j y x_j :

$$f(t) = t^{n} g \left(t + t^{-1} \right) = a_{0} t^{n} \prod_{j=1}^{n} \left(t + t^{-1} - x_{j} - x_{j}^{-1} \right)$$
$$= a_{0} \prod_{j=1}^{n} \left(\left(t - x_{j} \right) \left(t - x_{j}^{-1} \right) \right).$$

El siguiente es un resultado simple sobre polinomios palíndromos de grados impares.

Proposición 2.11. Sea f un polinomio palíndromo de orden 2n + 1. Entonces existe un único polinomio palíndromo g de grado 2n tal que f(t) = (t+1)g(t). Los ceros de f se pueden escribir como

$$x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}, -1.$$

Si $P \in \operatorname{Sym}_{2n+1}$ y P es homogéneo de grado d, entonces

$$P(x, x^{-1}, -1) = (-1)^d P(-x, -x^{-1}, 1).$$

En este caso, es posible trabajar con el alfabeto $x, x^{-1}, 1$, en lugar de $x, x^{-1}, -1$.

2.3. Construcción de los morfismos Φ_n y Φ_n^{odd}

En esta sección daremos las bases y construiremos los morfismos Φ_n y Φ_n^{odd} .

De aquí en adelante, denotaremos por x, x^{-1} y z las listas de las variables x_1, \ldots, x_n , $x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ y z_1, \ldots, z_n , respectivamente, donde $z_j = x_j + x_j^{-1}$.

La siguiente proposición aparece en [35, equation (4.4)].

Proposición 2.12. Para cada m in $\{0, \ldots, 2n\}$,

$$e_{2n-m}(x, x^{-1}) = e_m(x, x^{-1}).$$
 (2.30)

Demostración. Sabemos que el polinomio f de la Proposición 2.8 es palíndromo. De este hecho y la fórmula de Vieta obtenemos (2.30).

La siguiente fórmula fue publicada por Lachaud [36, Lemma A.3]. Nosotros la dedujimos independientemente, pero con la misma demostración. Por lo que solo vamos a dar una idea de esta.

Proposición 2.13. Para todo m in $\{0, \ldots, 2n\}$,

$$e_m(x, x^{-1}) = \sum_{k=\max\{m-n,0\}}^{\lfloor m/2 \rfloor} {n+2k-m \choose k} e_{m-2k}(z).$$
 (2.31)

Demostración. De las Proposiciones 2.8, 2.12 y las fórmulas de Vieta para los coeficientes de los polinomios f y g,

$$\sum_{m=0}^{2n} (-1)^m e_m(x, x^{-1}) t^m = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} e_{n-j}(z) t^n (t + t^{-1})^j.$$
 (2.32)

Expandiendo $(t+t^{-1})^j$ por el Teorema binomial e igualando el coeficiente de t^m llegamos a (2.31).

Ya vimos que podemos escribir polinomios simétricos elementales, evaluados en variables x, x^{-1} en términos de polinomios elementales evaluados en la suma de estas variables, es decir, en $z = x + x^{-1}$ (2.31). A continuación veremos que podemos hacer esto mismo con otras familias de polinomios simétricos, a saber polinomios simétricos completos y sumas de potencias.

Proposición 2.14. Tenemos la siguiente identidad

$$h_m(x, x^{-1}) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+m-k-1}{k} h_{m-2k}(z).$$
 (2.33)

Demostración. Aplicando (1.15) con las variables x, x^{-1} :

$$h_m(x, x^{-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2n+m-1}}{\Omega_j(x, x^{-1})} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{-2n-m+1}}{\Omega_{n+j}(x, x^{-1})}.$$
 (2.34)

Dado que

$$(x_j - x_k)(x_j - x_k^{-1}) = x_j(z_j - z_k), \qquad (x_j^{-1} - x_k)(x_j^{-1} - x_k^{-1}) = x_j^{-1}(z_j - z_k),$$

podemos escribir el denominador en (2.34) como

$$\Omega_i(x, x^{-1}) = (x_i - x_i^{-1})x_i^{n-1}\Omega_i(z), \qquad \Omega_{n+i}(x, x^{-1}) = -(x_i - x_i^{-1})x_i^{-n+1}\Omega_i(z).$$

Aplicando (2.2) obtenemos

$$h_m(x, x^{-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{U}_{m+n-1}(z_j/2)}{\Omega_j(z)}.$$
(2.35)

De esto y de (2.10),

$$h_m(x, x^{-1}) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{U}_{n+m-1}(z_j/2)}{\Omega_j(z)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor (n+m-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n+m-k-1}{k} \sum_{j=1}^n \frac{z_j^{m+n-1-2k}}{\Omega_j(z)}.$$

Si $k > \lfloor m/2 \rfloor$, entonces m+n-1-2k < n-1, y la suma interior es cero por el Lema 1.38. El rango de k en la suma interior se puede restringir a $\{0, \ldots, \lfloor m/2 \rfloor\}$. Aplicando (1.15) llegamos a (2.33).

Proposición 2.15. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$p_{m}(x, x^{-1}) = \begin{cases} m \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{j}}{m-j} {m-j \choose j} p_{m-2j}(z_{1}, \dots, z_{n}), & m \in \mathbb{N}; \\ 2 p_{0}(z_{1}, \dots, z_{n}), & m = 0. \end{cases}$$
 (2.36)

Demostración. El resultado es trivial para m=0. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$. Por (2.1),

$$p_m(x, x^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^m + x_k^{-m}) = \sum_{k=1}^{n} 2\mathcal{T}_m((x_k + x_k^{-1})/2),$$

es decir

$$p_m(x, x^{-1}) = \sum_{k=1}^n 2\mathcal{T}_m(z_k/2).$$
 (2.37)

Más aún, aplicando (2.9),

$$p_{m}(x, x^{-1}) = m \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{j}}{m-j} {m-j \choose j} z_{k}^{m-2j} = m \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{j}}{m-j} {m-j \choose j} \sum_{k=1}^{n} z_{k}^{m-2j}$$

$$= m \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{j}}{m-j} {m-j \choose j} p_{m-2j}(z).$$

Lema 2.16.

$$h_m(x, x^{-1}) = \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = m}} \prod_{j=1}^n \mathcal{U}_{\alpha_j} \left(\frac{1}{2} \left(x_j + x_j^{-1} \right) \right).$$
 (2.38)

Demostración. Consideremos la función generadora de los polinomios simétricos elementales en

las variables x, x^{-1} :

$$E(x, x^{-1})(t) = \prod_{j=1}^{n} ((1 + x_j t)(1 + x_j^{-1} t)) = \prod_{j=1}^{n} (1 + z_j t + t^2).$$

Para obtener la función generadora de los polinomios simétricos completos homogéneos en x, x^{-1} , sustituimos -t por t y pasamos a la expresión reciproca:

$$H(x, x^{-1})(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(1 + z_j t + t^2)} = \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{U}_k(z_j/2) t^k.$$

Igualando los coeficientes de t^m llegamos a (2.38)

Como hemos visto con las proposiciones previas, podemos escribir polinomios simétricos evaluados en las variable x, x^{-1} como combinaciones de polinomios simétricos evaluados en las suma de las variables originales.

Teorema 2.17. Sea P un polinomio simétrico en 2n variables sobre un campo infinito \mathbb{F} . Entonces existe un único polinomio simétrico Q en n variables sobre el mismo campo \mathbb{F} tal que

$$P(x_1,\ldots,x_n,x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}) = Q(x_1+x_1^{-1},\ldots,x_n+x_n^{-1}).$$

Demostración. Existencia. Los polinomios simétricos homogéneos completos forman un conjunto generador para el anillo de los polinomios simétricos (ver Proposición 1.46). Por lo tanto existe $r \in \mathbb{N}_0$ y un polinomio M en r+1 variables tal que:

$$P(x, x^{-1}) = M(h_0(x, x^{-1}), h_1(x, x^1), ..., h_r(x, x^{-1})).$$

Aplicando el Lema 2.16 concluimos que el lado derecho es cierto polinomio en las variables $x_1 + x_1^{-1}, ..., x_n + x_n^{-1}$.

Unicidad. Supongamos que Q_1 y Q_2 satisfacen

$$Q_1(x_1 + x_1^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1}) = P(x, x^{-1}) = Q_2(x_1 + x_1^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1})$$

Cuando la variable x_j toma un conjunto infinito de valores, la expresión $x_j + x_j^{-1}$ también toma un conjunto infinito de valores. Por lo que los polinomios Q_1 y Q_2 coinciden.

Otra forma de la demostración de la unicidad es: Considerar el polinomio $Q_3 = Q_1 - Q_2$. Dado que suponemos que, $Q_3(x_1 + x_1^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1}) = 0$. Si el polinomio Q_3 no es la constante cero y su término de grado mayor es $cz_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n}$, entonces es fácil ver que $Q_3(x_1 + x_1^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1})$ tiene el término $cx_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$. Esta contradicción muestra que Q_3 es cero.

Un análogo (y un corolario) del Teorema 2.17 para el alfabeto simpléctico impar

$$x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}, 1,$$

es el siguiente.

Teorema 2.18. Sea $P \in \operatorname{Sym}_{2n+1}$. Entonces existe un único Q en Sym_n tal que

$$P(x_1,\ldots,x_n,x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1},1) = Q(x_1+x_1^{-1},\ldots,x_n+x_n^{-1}).$$

Demostración. Para demostrar la existencia, definamos $R \in \operatorname{Sym}_{2n}$ como

$$R(y_1, \ldots, y_{2n}) := P(y_1, \ldots, y_{2n}, 1).$$

Aplicamos el Teorema 2.17 a R y obtenemos Q en Sym_n con la propiedad deseada:

$$Q(x_1 + x_1^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1}) = R(x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$$
$$= P(x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}, 1).$$

La unicidad se reduce a la unicidad del Teorema 2.17.

Para las situaciones presentadas en los Teoremas 2.17 y 2.18, denotamos a Q por $\Phi_n(P)$ y $\Phi_n^{\text{odd}}(P)$, respectivamente. Claramente, las funciones Φ_n : $\operatorname{Sym}_{2n} \to \operatorname{Sym}_n$ y Φ_n^{odd} : $\operatorname{Sym}_{2n+1} \to \operatorname{Sym}_n$, definidas por estas reglas, son lineales y multiplicativas, es decir, Φ_n y Φ_n^{odd} som homomorfismos de álgebras.

Nota 2.19. La transformada de Dickson–Zhukovsky para dos valores inversos, es decir el par de soluciones de la ecuación $t+t^{-1}=u$, está dado por $t=(u\pm\sqrt{u^2-4})/2$. Entonces, Φ_n actúa por la siguiente regla explícita:

$$(\Phi_n(P))(z_1, \dots, z_n) = P\left(\frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4}}{2}, \dots, \frac{z_n + \sqrt{z_n^2 - 4}}{2}, \dots, \frac{z_n - \sqrt{z_n^2 - 4}}{2}, \dots, \frac{z_n - \sqrt{z_n^2 - 4}}{2}, \dots, \frac{z_n - \sqrt{z_n^2 - 4}}{2}\right), \quad (2.39)$$

y el Teorema 2.17 asegura que el lado derecho de (2.39) es un polinomio simétrico en z_1,\dots,z_n .

Ejemplo 2.20. Sea n=2 y

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_3 + 5x_1x_4 + 5x_2x_3 + 5x_2x_4 + 5x_3x_4.$$

Entonces

$$P(x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}) = (x_1 + x_1^{-1})^2 + (x_2 + x_2^{-1})^2 + 5(x_1 + x_1^{-1})(x_2 + x_2^{-1}) + 6,$$

es decir

$$\Phi_2(P)(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 + 5z_1z_2 + 6.$$

En este ejemplo $\Phi_2(P)$ no es homogéneo, sin embargo P si es homogéneo.

Ejemplo 2.21. Para un n general, sea

$$P_1(x_1, \dots, x_{2n}) = e_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) = \prod_{j=1}^{2n} x_j,$$

$$P_2(x_1, \dots, x_{2n}) = 1,$$

$$P_3(x_1, \dots, x_{2n+1}) = e_{2n+1}(x_1, \dots, x_{2n+1}) = \prod_{j=1}^{2n+1} x_j,$$

$$P_4(x_1, \dots, x_{2n+1}) = 1.$$

Entonces
$$P_1(x, x^{-1}) = P_2(x, x^{-1}) = 1$$
 y $P_3(x, x^{-1}, 1) = P_4(x, x^{-1}, 1) = 1$, es decir
$$\Phi_n(P_1) = \Phi_n(P_2), \qquad \Phi_n^{\text{odd}}(P_3) = \Phi_n^{\text{odd}}(P_4).$$

Este ejemplo muestra que Φ_n y Φ_n^{odd} no son inyectivos.

2.4. Polinomios simétricos evaluados en raíces de polinomios palíndromos

En esta parte estudiaremos la versión palindrómica de las familias de polinomios simétricos que hasta ahora hemos presentado.

Para todo m en \mathbb{N}_0 , definimos como hz_m al único polinomio en n variables que satisface

$$hz_m(z) = h_m(x, 1/x),$$

 ez_m es el único polinomio en n variables que satisface

$$\operatorname{ez}_m(z) = \operatorname{e}_m(x, 1/x),$$

 \mathbf{p}_m es el único polinomio en n variables que satisface

$$pz_m(z) = p_m(x, 1/x),$$

y sz $_{\lambda}$ es el único polinomio en n variables que cumple

$$\operatorname{sz}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(z) = \operatorname{s}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(x,1/x).$$

Denotamos por Hz(z)(t) y Ez(z)(t) a las funciones generadoras de esta sucesión de polinomios:

$$\operatorname{Hz}(z)(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{hz}_k(z) t^k, \qquad \operatorname{Ez}(z)(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{ez}_k(z) t^k.$$

Proposición 2.22.

$$\operatorname{Ez}(z)(t) = \prod_{j=1}^{n} (1 + z_j t + t^2), \tag{2.40}$$

$$Hz(z)(t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - z_j t + t^2}.$$
 (2.41)

Demostración. Usando la definición de la función generadora de la sucesión de polinomios simétricos elementales (1.7) y la equivalencia (1.9), tenemos

$$\operatorname{Ez}(z)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{ez}_{k}(z)t^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{e}_{k}(x, 1/x)t^{k} = \operatorname{E}(x, 1/x)(t)$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \left((1 + x_{j}t)(1 + x_{j}^{-1}t) \right) = \prod_{j=1}^{n} (1 + z_{j}t + t^{2}).$$

Además,

$$Hz(z)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} hz_k(z)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x, 1/x)t^k = H(x, 1/x)(t) = \frac{1}{E(x, 1/x)(-t)}$$
$$= \frac{1}{Ez(z)(-t)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - z_j t + t^2}.$$

Dado que podemos escribir a h como suma de progresiones geométricas, podemos escribir a hz como una suma en términos de polinomios de Chebyshev de segundo tipo \mathcal{U} .

Proposición 2.23. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$hz_m(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{U}_{m+n-1}(z_j/2)}{\Omega_j(z)}.$$
 (2.42)

Demostración. Recordemos (ver Proposición 1.36) que

$$h_m(a_1, \dots, a_p) = \sum_{j=1}^p \frac{a_j^{m+p-1}}{\Omega_j(a_1, \dots, a_p)}.$$

Aplicando la equivalencia anterior con las variables x, 1/x obtenemos

$$hz_m(z) = h_m(x, 1/x) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{2n+m-1}}{\Omega_j(x, 1/x)} + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{-2n-m+1}}{\Omega_{n+j}(x, 1/x)}.$$

Simplificaremos algunos de los factores que aparecen en los denominadores.

$$(x_j - x_k)\left(x_j - \frac{1}{x_k}\right) = x_j^2 - \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)x_j + 1 = x_j(z_j - z_k),$$

у

$$\left(\frac{1}{x_j} - x_k\right) \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{x_j^2} - \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) \frac{1}{x_j} + 1 = \frac{1}{x_j} (z_j - z_k).$$

Entonces para toda j en $\{1, \ldots, n\}$

$$\Omega_j(x, 1/x) = \left(x_j - \frac{1}{x_j}\right) \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} \left((x_j - x_k) \left(x_j - \frac{1}{x_k} \right) \right) = \left(x_j - \frac{1}{x_j} \right) x_j^{n-1} \Omega_j(z),$$

у

$$\Omega_{n+j}(x,1/x) = \left(\frac{1}{x_j} - x_j\right) \prod_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} \left(\left(\frac{1}{x_j} - x_k\right) \left(\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_k}\right)\right) = -\left(x_j - \frac{1}{x_j}\right) x_j^{-n+1} \Omega_j(z).$$

Finalmente,

$$hz_m(z) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^{n+m} - x_j^{-n-m}}{(x_j - x_j^{-1})\Omega_j(z)}.$$

Aplicando (2.2) llegamos a (2.42).

De las Proposiciones 1.45, 1.46 sabemos que e y h son conjuntos generadores, por lo que podemos escribir hz y ez en términos de h y e respectivamente, como lo establecen las siguientes proposiciones.

Proposición 2.24. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$hz_m(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} {n+m-k-1 \choose k} h_{m-2k}(z).$$
 (2.43)

Demostración. Combinemos (2.42) con (2.10):

$$hz_{m}(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathcal{U}_{n+m-1}(z_{j}/2)}{\Omega_{j}(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\Omega_{j}(z)} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^{k} {n+m-k-1 \choose k} z_{j}^{m-2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^{k} {n+m-k-1 \choose k} \sum_{j=1}^{n} \frac{z_{j}^{m-2k}}{\Omega_{j}(z)}.$$

Usando (1.15) obtenemos (2.43).

Para cada k en $\{1, \ldots, p\}$ pongamos

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left(z_k + \frac{1}{z_k} \right).$$

У

$$c_k(z_1, \dots, z_r) = \frac{z_k^{r-1}}{\prod\limits_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne k}} \left((z_k - z_j) \left(z_k - \frac{1}{z_j} \right) \right)}.$$

Si $m+r \ge n+2$ y $n+r \ge m$ (es decir $2-r \le m-n \le r$), entonces

$$h_{m+n-r+1}\left(z_1, \dots, z_r, \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_r}\right) = 2\sum_{k=1}^r c_k(z_1, \dots, z_r) \mathcal{T}_m(\alpha_k) \mathcal{U}_n(\alpha_k).$$
 (2.44)

Sean $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{C}$ tales que $t_k^2 = x_k$. Pongamos

$$\beta_k = \frac{1}{2} \left(t_k + \frac{1}{t_k} \right)$$

у

$$d_k(t_1, \dots, t_r) = \frac{c_k(t_1^2, \dots, t_r^2)}{t_k + t_k^{-1}}.$$

Entonces

$$h_n\left(z_1, \dots, z_r, \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_r}\right) = \sum_{k=1}^r d_k(t_1, \dots, t_r) \mathcal{U}_{2n+2r-1}(\beta_k).$$
 (2.45)

Más aún, si p-q es impar, $-2r+3 \le p-q \le 2r-1$, entonces

$$h_{\frac{p+q+1}{2}-r}\left(z_1,\dots,z_r,\frac{1}{z_1},\dots,\frac{1}{z_r}\right) = 2\sum_{k=1}^r d_k(t_1,\dots,t_r)\mathcal{T}_p(\beta_k)\mathcal{U}_q(\beta_k). \tag{2.46}$$

Proposición 2.25. Para todo m en $\{0,...,2n\}$,

$$\operatorname{ez}_{m}(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} {n-m+2k \choose k} e_{m-2k}(z).$$
 (2.47)

Demostración. Consideremos la función generadora (2.40). Recordando la fórmula de Vieta:

$$\prod_{j=1}^{n} (a+b_j) = \sum_{k=0}^{n} e_k(b_1, \dots, b_n) a^{n-k}.$$

Aplicamos esta fórmula con $a = t^2 + 1$ y $b_j = z_j t$:

$$\operatorname{Ez}(z) = \sum_{k=0}^{n} e_k(z_1 t, \dots, z_n t) (t^2 + 1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} t^k (t^2 + 1)^{n-k} e_k(z).$$

Expandamos $(t^2+1)^{n-k}$ con el teorema del binomio y cambiemos el orden de las sumas:

$$\operatorname{Ez}(z) = \sum_{k=0}^{n} t^{k} \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} t^{2p} \right) e_{k}(z) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} t^{2p+k} e_{k}(z).$$

En la suma interior hagamos el cambio de variable m = 2p + k:

$$Ez(z) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=2p}^{n+p} {n-m+2p \choose p} t^{m} e_{m-2p}(z).$$

Cambiemos el orden de las sumas (la desigualdad $m \geq 2p$ es equivalente a $p \geq \lfloor m/2 \rfloor$):

$$\operatorname{Ez}(z) = \sum_{m=0}^{2} n \left(\sum_{p=0} \lfloor m/2 \rfloor \binom{n-m+2p}{p} e_{m-2p}(z) \right) t^{m},$$

el coeficiente de t^m en el lado izquierdo es $e_m(x,1/x)$, y obtenemos (2.47).

Veamos una forma de escribir hz en términos de cocientes de determinantes

Proposición 2.26. Para todo m en \mathbb{N}_0 ,

$$hz_{m}(z) = \frac{1}{Vander(z)} \det \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{n+m-1}(z_{1}/2) & \dots & \mathcal{U}_{n+m-1}(z_{n}/2) \\ \mathcal{U}_{n-2}(z_{1}/2) & \dots & \mathcal{U}_{n-2}(z_{n}/2) \\ & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{U}_{0}(z_{1}/2) & \dots & \mathcal{U}_{0}(z_{n}/2) \end{bmatrix}.$$
(2.48)

Demostración. Sea $A_m(z)$ la matriz del numerador. Expandimos el determinante de $A_m(z)$ por la primer fila y aplicamos la fórmula (2.26) para calcular cada cofactor:

$$\frac{\det A_m(z)}{\operatorname{Vander}(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{U}_{n+m-1}(z_j/2)(-1)^{j+1}\operatorname{Vander}(z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_n)}{\operatorname{Vander}(z)}.$$

Además, notemos que

$$\frac{\operatorname{Vander}(z)}{\operatorname{Vander}(z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n)} = \prod_{k=1}^{j-1} (z_k - z_j) \prod_{k=j+1}^n (z_j - z_k) = (-1)^{j+1} \Omega_j(z).$$

Aplicando (2.42) obtenemos (2.48).

Veamos análogos de la Porposición 1.32 y de la Proposición 1.39, para el caso de hz **Proposición 2.27.**

$$hz_{m+2}(z, z_{n+1}) = hz_{m+2}(z) + z_{n+1} hz_{m+1}(z, z_{n+1}) - hz_m(z, z_{n+1}).$$
(2.49)

Demostración. Empezamos con la expresión recursiva:

$$\operatorname{Ez}(z, z_{n+1})(-t) = (1 - z_{n+1}t + t^2)\operatorname{Ez}(z)(-t).$$

Dividimos sobre el producto $\operatorname{Ez}(z, z_{n+1})(-t)\operatorname{Ez}(z)(-t)$:

$$Hz(z)(t) = (1 - z_{n+1}t + t^2) Hz(z, z_{n+1})(t).$$

Igualamos los coeficientes de t^{m+2} en ambos lados:

$$hz_{m+2}(z) = hz_{m+2}(z, z_{n+1}) - z_{n+1} hz_{m+1}(z, z_{n+1}) + hz_m(z, z_{n+1}).$$

La fórmula obtenida es equivalente a (2.49).

Proposición 2.28. Para todo $m \in \mathbb{N}_0$,

$$hz_{m+1}(z, z_{n+1}) - hz_{m+1}(z, z_{n+1}) = (z_{n+1} - z_{n+2}) hz_m(z, z_{n+1}, z_{n+2}).$$
(2.50)

Demostración. Consideremos la diferencia de funciones generadoras:

$$\operatorname{Ez}(z, z_{n+1})(-t) - \operatorname{Ez}(z, z_{n+2})(-t) = (z_{n+1} - z_{n+2})t \operatorname{Ez}(z)(-t).$$

Dividimos sobre el producto $\operatorname{Ez}(z, z_{n+1})(-t) \operatorname{Ez}(z, z_{n+2})(-t)$:

$$\operatorname{Hz}(z, z_{n+1})(t) - \operatorname{Hz}(z, z_{n+2})(t) = \frac{(z_{n+1} - z_{n+2})t \operatorname{Hz}(z)(t)}{(1 - z_{n+1}t + t^2)(1 - z_{n+2}t + t^2)},$$

es decir,

$$\operatorname{Hz}(z, z_{n+1})(t) - \operatorname{Hz}(z, z_{n+2})(t) = (z_{n+1} - z_{n+2})t \operatorname{Hz}(z, z_{n+1}, z_{n+2})(t).$$

Igualando los coeficientes de t^{m+1} obtenemos (2.50).

Veamos fórmulas equivalentes de (2.36) y (2.37).

Teorema 2.29. Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$pz_m(z) = \sum_{j=1}^n 2\mathcal{T}_m(z_j/2),$$
 (2.51)

$$pz_{m}(z) = \begin{cases} m \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^{j}}{m-j} {m-j \choose j} p_{m-2j}(z), & m \in \mathbb{N}; \\ 2 p_{0}(z), & m = 0, \end{cases}$$
 (2.52)

Teorema 2.30. Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$p_m(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k} \operatorname{pz}_{m-2k}(z_1, \dots, z_n),$$
 (2.53)

donde los coeficientes $\alpha_{m,k}$ se definen como

$$\alpha_{m,k} := \begin{cases} \binom{m}{k}, & si \ k < \frac{m}{2}; \\ \frac{1}{2} \binom{m}{m/2}, & si \ k = \frac{m}{2}. \end{cases}$$
 (2.54)

Demostración. Usando (2.13) y cambiando el orden de las sumas:

$$p_{m}(z) = \sum_{j=1}^{n} z_{j}^{m} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k} 2 \mathcal{T}_{m-2k} (z_{j}/2) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{j}^{m-2k} + x_{j}^{-(m-2k)} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k} p_{m-2k}(x, x^{-1}) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k} p_{m-2k}(z).$$

Recordemos que la involución $\omega \colon \operatorname{Sym} \to \operatorname{Sym}$ se puede definir como

$$\omega(\mathbf{p}_m) = (-1)^m \,\mathbf{p}_m \qquad (m \ge 1).$$
 (2.55)

Para definir ω_n : $\operatorname{Sym}_n \to \operatorname{Sym}_n$, usamos el encaje monomial $\operatorname{Sym}_n \to \operatorname{Sym}$. En otras palabra, dado f en Sym_n , expandimos f en la base monomial y aplicamos ω .

Proposición 2.31. Tenemos que

$$\omega_n(\mathrm{pz}_m)(z) = \begin{cases} (-1)^{m-1} \, \mathrm{pz}_m(z), & m \text{ es impar,} \\ (-1)^{m-1} \, \mathrm{pz}_m(z) + \frac{1}{2} (-1)^{m/2} \binom{m}{m/2} \, \mathrm{pz_0}(z), & m \text{ es par.} \end{cases}$$
(2.56)

Demostración. Aplicando (2.52) y (2.55). Para m impar,

$$\omega_n(\mathrm{pz}_m)(z) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \alpha_{m,k}(-1)^{m-2k-1} (-1)^k \, \mathrm{p}_{m-2k}(z) = (-1)^{m-1} \, \mathrm{pz}_m(z).$$

Para m par,

$$pz_m(z) = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \alpha_{m,k} (-1)^k p_{m-2k}(z) + \alpha_{m,m/2} (-1)^{m/2} p_0(z).$$

Entonces,

$$\omega_n(\operatorname{pz}_m)(z) = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1} \alpha_{m,k} (-1)^{m-1} (-1)^k \operatorname{p}_{m-2k}(z) + \alpha_{m,m/2} (-1)^{m/2} \operatorname{p}_0(z)$$

$$= (-1)^{m-1} \sum_{k=0}^{m/2} \alpha_{m,k} (-1)^{m-1} (-1)^k \operatorname{p}_{m-2k}(z) + 2\alpha_{m,m/2} (-1)^{m/2} \operatorname{p}_0(z).$$

La última expresión nos lleva al segundo caso de (2.56).

Desgraciadamente, ω no convierte hz_{λ}⁽ⁿ⁾ en ez_{λ}⁽ⁿ⁾, incluso con la restricción $\ell(\lambda) \leq n$; como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.32. Restringimos $\ell(\lambda) \leq n$. Existe una partición μ con $\ell(\mu) \leq n$ tal que $\omega_n(hz_{\mu}^{(n)}) \neq ez_{\mu}^{(n)}$

$$\begin{split} \omega_n \left(h z_{(4,3)}^{(2)} \right) &= \omega_n \left(\Phi \left(h_{(4,3)}^{(2)} \right) \right) = \omega_n \left(\Phi \left(h_4^{(2)} \ h_3^{(2)} \right) \right) = \omega_n \left(\Phi \left(s_{[4,3]} + s_{[5,2]} + s_{[6,1]} + s_{[7]} \right) \right) \\ &= \omega_n \left(s z_{[4,3]}^{(2)} + s z_{[5,2]}^{(2)} + s z_{[6,1]}^{(2)} + s z_{[7]}^{(2)} \right) = s z_{[2^3,1]}^{(2)} + s z_{[2^2,1^3]}^{(2)} + s z_{[2,1^5]}^{(2)} + s z_{[17]}^{(2)} = 0. \end{split}$$

Pero sabemos que

$$ez_{(4,3)}^{(2)} = ez_4^{(2)} ez_3^{(2)} = ez_2^{(2)} ez_1^{(2)} \neq 0.$$

2.5. Polinomios de Schur simplécticos y ortogonales y cocientes de Schur-Chebyshev

En esta sección recordaremos varias fórmulas equivalentes para polinomios de Schur simplécticos y ortogonales y las relacionaremos con cocientes de Schur—Chebyshev.

Las funciones de Schur simplécticas y ortogonales sp_{λ} y o_{λ} aparecen de forma natural en teoría de representación, en relación con grupos simplécticos y ortogonales. Véase [27, Section 24 y Apendice A] para las siguientes fórmulas de sp_{λ} y o_{λ} . Más información se puede encontrar en [34].

Para toda λ en \mathcal{P} , la función de Schur simpléctica sp $_{\lambda}$ y la función de Schur ortogonal o $_{\lambda}$ son elementos de Sym, se definen mediante las siguientes identidades análogas a las identidades de Jacobi–Trudi:

$$\operatorname{sp}_{\lambda} = \frac{1}{2} \operatorname{det} \left[h_{\lambda_{j}-j+k} + h_{\lambda_{j}-j-k+2} \right]_{j,k=1}^{\ell(\lambda)}, \tag{2.57}$$

$$o_{\lambda} = \det \left[h_{\lambda_j - j + k} - h_{\lambda_j - j - k} \right]_{i,k=1}^{\ell(\lambda)}. \tag{2.58}$$

También satisfacen las siguientes identidades análogas de las identidades duales de Jacobi-Trudi:

$$\operatorname{sp}_{\lambda} = \det \left[\operatorname{e}_{\lambda'_{j} - j + k} - \operatorname{e}_{\lambda'_{j} - j - k} \right]_{j,k=1}^{\lambda_{1}},$$
 (2.59)

$$o_{\lambda} = \frac{1}{2} \det \left[e_{\lambda'-j+k} + e_{\lambda'-j-k+2} \right]_{j,k=1}^{\lambda_1}.$$
 (2.60)

Las funciones $\operatorname{sp}_{\lambda}$ y $\operatorname{o}_{\lambda}$ tradicionalmente se evalua en el alfabeto simpléctico

$$(x, x^{-1}) = (x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}).$$

Dado que Φ_n es un morfismo de álgebras, (2.57)-(2.60) implican las siguientes identidades

análogas a las identidades de Jacobi–Trudi para $\operatorname{spz}_{\lambda}$ y $\operatorname{oz}_{\lambda}$:

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} \det \left[\operatorname{hz}_{\lambda_{j}-j+k}(z) + \operatorname{hz}_{\lambda_{j}-j-k+2}(z) \right]_{j,k=1}^{\ell(\lambda)}, \tag{2.61}$$

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(z) = \det\left[\operatorname{ez}_{\lambda'_{i}-j+k}(z) - \operatorname{ez}_{\lambda'_{i}-j-k}(z)\right]_{j,k=1}^{\lambda_{1}},$$
(2.62)

$$oz_{\lambda}(z) = \det\left[hz_{\lambda_{j}-j+k}(z) - hz_{\lambda_{j}-j-k}(z)\right]_{i,k=1}^{\ell(\lambda)},$$
(2.63)

$$oz_{\lambda}(z) = \frac{1}{2} \det \left[ez_{\lambda'_{j}-j+k}(z) + ez_{\lambda'_{j}-j-k+2}(z) \right]_{j,k=1}^{\lambda_{1}}.$$
 (2.64)

Existen fórmulas bialternantes para $\operatorname{sp}_{\lambda}(x, x^{-1})$ y $\operatorname{o}_{\lambda}(x, x^{-1})$:

$$\operatorname{sp}_{\lambda}(x, x^{-1}) = \frac{\det \left[x_k^{\lambda_j + n - j + 1} - x_k^{-(\lambda_j + n - j + 1)} \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[x_k^{n - j + 1} - x_k^{-(n - j + 1)} \right]_{j,k=1}^n}, \tag{2.65}$$

$$o_{\lambda}(x, x^{-1}) = \frac{\det \left[\zeta_{\lambda_{j}+n-j}(x_{k}) \right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\zeta_{n-j}(x_{k}) \right]_{j,k=1}^{n}},$$
(2.66)

donde $\zeta_m(u) := u^m + u^{-m}$ si m > 0 y $\zeta_0(u) := 1$.

Caracteres de los grupos ortogonales impares están relacionados con las funciones o_{λ} evaluadas en el alfabeto simpléctico impar

$$(x, x^{-1}, 1) = (x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}, 1).$$

Sabemos [27, Proposición A.60] que

$$o_{\lambda}(t_1^2, \dots, t_n^2, t_1^{-2}, \dots, t_n^{-2}, 1) = \frac{\det \left[t_k^{2\lambda_j + 2n - 2j + 1} - t_k^{-(2\lambda_j + 2n - 2j + 1)} \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[t_k^{2n - 2j + 1} - t_k^{-(2n - 2j + 1)} \right]_{j,k=1}^n}.$$
 (2.67)

Okada [46] probó la siguiente fórmula para $\operatorname{sp}_{\lambda}$ evaluada en el alfabeto simpléctico impar: si $\lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$, entonces

$$\operatorname{sp}_{\lambda}(t_{1}^{2}, \dots, t_{n}^{2}, t_{1}^{-2}, \dots, t_{n}^{-2}, t_{n+1}) = \frac{\det A_{\lambda}(t_{1}, \dots, t_{n}, 1)}{\det A_{\varnothing}(t_{1}, \dots, t_{n}, 1)}, \tag{2.68}$$

donde $(A_{\lambda}(t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}))_{j,k}$ se define como

$$(t_k^{2\lambda_j+2n-2j+4}-t_k^{-(2\lambda_j+2n-2j+4)})-t_{n+1}^{-1}(t_k^{2\lambda_j+2n-2j+2}-t_k^{-(2\lambda_j+2n-2j+2)}),$$

si $1 \le k \le n$ y como

$$t_{n+1}^{2\lambda_j+2n-2j+2}$$

si k = n + 1.

Las fórmulas bialternantes (2.65), (2.66), (2.67) y (2.68) son naturales en términos de polinomios de Chebyshev expresados como ciertos "cocientes de Schur-Chebyshev".

Proposición 2.33. Sea $z_k = x_k + x_k^{-1}$ para toda k en $\{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\operatorname{sp}_{\lambda}(x, x^{-1}) = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\operatorname{Vander}(z)}, \tag{2.69}$$

$$o_{\lambda}(x, x^{-1}) = \frac{\det \left[\mathcal{T}_{\lambda_{j}+n-j}^{\text{monic}}(z_{k}) \right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\mathcal{T}_{n-j}^{\text{monic}}(z_{k}) \right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det \left[\mathcal{T}_{\lambda_{j}+n-j}^{\text{monic}}(z_{k}) \right]_{j,k=1}^{n}}{\text{Vander}(z)}, \tag{2.70}$$

$$\operatorname{sp}_{\lambda}(x, x^{-1}, 1) = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}^{(1)}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\mathcal{U}_{n-j}^{(1)}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}^{(1)}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\operatorname{Vander}(z)}, \tag{2.71}$$

$$o_{\lambda}(x, x^{-1}, 1) = \frac{\det \left[\mathcal{W}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{W}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n} = \frac{\det \left[\mathcal{W}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\operatorname{Vander}(z)}, \tag{2.72}$$

$$o_{\lambda}(x, x^{-1}, -1) = (-1)^{|\lambda|} o_{\lambda}(-x, -x^{-1}, 1)$$

$$= \frac{\det \left[\mathcal{V}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\mathcal{V}_{n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det \left[\mathcal{V}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2) \right]_{j,k=1}^{n}}{\operatorname{Vander}(z)}.$$
(2.73)

Demostración. Probemos la primer igualdad en (2.69). Usemos la fórmula bialternante (2.65) y la propiedad (2.2) de los polinomios \mathcal{U} :

$$\mathrm{sp}_{\lambda}(x,x^{-1}) = \frac{\prod_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{-1}) \det \left[\mathcal{U}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\prod_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{-1}) \det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n} = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}.$$

La segunda igualdad en (2.69) se sigue de la primera transformando el denominador por la Proposición 2.6. De manera similar, (2.70) se sigue de (2.66) y (2.1), (2.72) se sigue de (2.67) y (2.4). Finalmente, (2.73) es una consecuencia de (2.72) y (2.22). Probemos (2.71) usando la fórmula de Okada (2.68) con $\lambda_{n+1} = 0$, $x_k = t_k^2$ ($1 \le k \le n$) y $t_{n+1} = 1$. Para $1 \le k \le n$,

$$A_{\lambda}(t_{1},...,t_{n},1)_{j,k} = (x_{k}^{\lambda_{j}+n-j+2} - x_{k}^{-(\lambda_{j}+n-j+2)}) - (x_{k}^{\lambda_{j}+n-j+1} - x_{k}^{-(\lambda_{j}+n-j+1)})$$

$$= (x_{k} - x_{k}^{-1})(\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j+1}(z_{j}/2) - \mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{j}/2)$$

$$= (x_{k} - x_{k}^{-1})\mathcal{V}_{\lambda_{j}+n-j+1}(z_{j}/2).$$

En particular, si $1 \le k \le n$, entonces la entrada (n+1,k) es $(x_k - x_k^{-1})\mathcal{V}_0(z_j/2)$. Después de

factorizar $x_k - x_k^{-1}$ de la k-ésima columna $(1 \le k \le n)$,

$$\det A_{\lambda}(t_1, \dots, t_n, 1) = \left(\prod_{k=1}^{n} (x_k - x_k^{-1}) \right) \begin{vmatrix} \left[\mathcal{V}_{\lambda_j + n + 1 - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^{n} & \left[1 \right]_{j=1}^{n} \\ \left[1, \dots, 1 \right] & 1 \end{vmatrix}.$$

Ahora restamos la columna n+1 a cada columna $1, \ldots, n$, expandimos el deteminante por la última fila y usamos la fórmula (2.25).

$$\det A_{\lambda}(t_{1}, \dots, t_{n}, 1) = \left(\prod_{k=1}^{n} (x_{k} - x_{k}^{-1})\right) \det \left[\mathcal{V}_{\lambda_{j}+n+1-j}(z_{k}/2) - 1\right]_{j,k=1}^{n}$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} (x_{k} - x_{k}^{-1})\right) \left(\prod_{k=1}^{n} (z_{k} - 2)\right) \det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}^{(1)}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}.$$

Entonces,

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(x, x^{-1}, 1) = \frac{\det A_{\lambda}(t_1, \dots, t_n, 1)}{\det A_{\varnothing}(t_1, \dots, t_n, 1)} = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_j + n - j}^{(1)}(z_k/2)\right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{U}_{n - j}^{(1)}(z_k/2)\right]_{j,k=1}^n}.$$

Tomando en cuenta la Proposición 2.6, obtenemos (2.71).

De la Proposición 2.33 y aplicando las definiciones de Φ_n y $\Phi_n^{\rm odd}$ obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.34. Para toda λ en \mathcal{P}_n ,

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(z_{1},\ldots,z_{n}) = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\det \left[\mathcal{U}_{n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\prod_{1 \leq j < k \leq n}(z_{j}-z_{k})}, \quad (2.74)$$

$$\operatorname{oz}_{\lambda}(z_{1},\ldots,z_{n}) = \frac{\det\left[\mathcal{T}_{\lambda_{j}+n-j}^{\text{monic}}(z_{k})\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[\mathcal{T}_{n-j}^{\text{monic}}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det\left[\mathcal{T}_{\lambda_{j}+n-j}^{\text{monic}}(z_{k})\right]_{j,k=1}^{n}}{\prod_{1\leq j< k\leq n}(z_{j}-z_{k})},$$
(2.75)

$$\operatorname{spz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(z_{1},\ldots,z_{n}) = \frac{\det\left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}^{(1)}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[\mathcal{U}_{n-j}^{(1)}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det\left[\mathcal{U}_{\lambda_{j}+n-j}^{(1)}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\prod_{1\leq j< k\leq n}(z_{j}-z_{k})}, \quad (2.76)$$

$$\operatorname{oz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(z_{1},\ldots,z_{n}) = \frac{\det\left[\mathcal{W}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[\mathcal{W}_{n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}} = \frac{\det\left[\mathcal{W}_{\lambda_{j}+n-j}(z_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\prod_{1\leq j< k\leq n}(z_{j}-z_{k})}, \quad (2.77)$$

$$(-1)^{|\lambda|} \operatorname{oz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(-z_1, \dots, -z_n) = \frac{\det \left[\mathcal{V}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{V}_{n-j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n} = \frac{\det \left[\mathcal{V}_{\lambda_j + n - j}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\prod_{1 \le j < k \le n} (z_j - z_k)}.$$
(2.78)

Las fórmulas de duplicación de los polinomios de Chebyshev, presentadas en la Proposición 2.5, nos llevan a otra forma equivalente de las fórmulas bialternantes de la Proposición 2.33.

Proposición 2.35. Para toda λ en \mathcal{P}_n ,

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(u_1^2 - 2, \dots, u_n^2 - 2) = \frac{\det \left[\mathcal{U}_{2\lambda_j + 2n - 2j + 1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{U}_{2n - 2j + 1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n}, \tag{2.79}$$

$$oz_{\lambda}(u_1^2 - 2, \dots, u_n^2 - 2) = \frac{\det\left[\mathcal{T}_{2\lambda_j + 2n - 2j}^{\text{monic}}(u_k)\right]_{j,k=1}^n}{\det\left[\mathcal{T}_{2n - 2j}^{\text{monic}}(u_k)\right]_{j,k=1}^n},$$
(2.80)

$$\operatorname{oz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(u_{1}^{2}-2,\ldots,u_{n}^{2}-2) = \frac{\det\left[\mathcal{U}_{2\lambda_{j}+2n}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[\mathcal{U}_{2n-2j}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}},$$
(2.81)

$$(-1)^{|\lambda|} \operatorname{oz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(-u_1^2 + 2, \dots, -u_n^2 + 2) = \frac{\det \left[\mathcal{T}_{2\lambda_j + 2n - 2j + 1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n}{\det \left[\mathcal{T}_{2n - 2j + 1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n}.$$
 (2.82)

Demostración. Aplicando (2.74) y (2.19):

$$\operatorname{spz}_{\lambda}(u_{1}^{2}-2,\ldots,u_{n}^{2}-2) = \frac{\det\left[u_{k} \mathcal{U}_{2\lambda_{j}+2n-2j+1}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\det\left[u_{k} \mathcal{U}_{2n-2j+1}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}$$
$$= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} u_{k}\right) \det\left[\mathcal{U}_{2\lambda_{j}+2n-2j+1}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}{\left(\prod_{k=1}^{n} u_{k}\right) \det\left[\mathcal{U}_{2n-2j+1}(u_{k}/2)\right]_{j,k=1}^{n}}.$$

Después de cancelar $\prod_{k=1}^{n} u_k$ obtenemos (2.79). Similarmente, la fórmula (2.80) se sigue de (2.75) y de (2.18), (2.81) se obtiene de (2.77) y de (2.21), por último (2.82) se sigue de (2.78) y de (2.20).

2.6. Polinomios de Schur evaluados en las raíces de polinomios palíndromos

Como Φ es un homomorfismo de álgebras, $sz_{\lambda/\mu}$ se puede calcular por medio de los siguientes análogos de las fórmulas de Jacobi-Trudi:

$$\operatorname{sz}_{\lambda/\mu}(z) = \operatorname{det}\left[\operatorname{hz}_{\lambda_j - \mu_k - j + k}(z)\right]_{j,k=1}^{\ell(\lambda)}, \tag{2.83}$$

$$\operatorname{sz}_{\lambda/\mu}(z) = \det\left[\operatorname{ez}_{\lambda'_{i}-\mu'_{k}-j+k}(z)\right]_{i,k=1}^{\lambda_{1}}, \tag{2.84}$$

Más aún,

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z)\operatorname{sz}_{\mu}(z) = \sum_{\nu} \operatorname{LR}_{\lambda,\mu}^{\nu} \operatorname{sz}_{\nu}(z),$$

donde $LR^{\nu}_{\lambda,\mu}$ son los coeficientes de Littlewood–Richardson para polinomios de Schur sesgados

presentados en la Proposición 1.69.

Proposición 2.36. Sean $\lambda \in \mathcal{P}$ y $\ell(\lambda) > 2n$. Entonces $sz_{\lambda}(z_1, \dots, z_n) = 0$.

Demostración. Como $\ell(\lambda) > 2n$, la fórmula de Jacobi-Trudi implica que

$$s_{\lambda}(y_1,\ldots,y_{2n})=0.$$

Ahora $\operatorname{sz}_{\lambda}(z_1,\ldots,z_n)=0$ por definición del morfismo Φ_n .

La siguiente "propiedad simétrica" de sz es equivalente a [35, Lemma 1] y se sigue de la fórmula dual de Jacobi-Trudi (2.84) y de la Proposición 2.12.

Proposición 2.37. Para $1 \le k \le n$

$$\operatorname{sz}_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+k})}(z_1,\ldots,z_n) = \operatorname{sz}_{\mu}(z_1,\ldots,z_n),$$

donde $\mu = (\lambda_1^{n-k}, \lambda_1 - \lambda_{n+k}, \lambda_1 - \lambda_{n+k-1}, \dots, \lambda_1 - \lambda_2).$

Demostración. Recordemos la simetría de los polinomios ez:

$$\operatorname{ez}_k(z_1, \dots, z_n) = \operatorname{ez}_{2n-k}(z_1, \dots, z_n).$$
 (2.85)

Aplicando la segunda fórmula de Jacobi-Trudi:

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z) = \operatorname{det}\left[\operatorname{ez}_{\lambda'_r - r + s}(z)\right]_{r,s = 1}^{\lambda_1} = \operatorname{det}\left[\operatorname{ez}_{2n - \lambda'_r + r - s}(z)\right]_{r,s = 1}^{\lambda_1}.$$

Haciendo el cambio de variable $p=\lambda_1+1-r$ y $q=\lambda_1+1-s$

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z) = \operatorname{det} \left[\operatorname{ez}_{2n-\lambda'_{\lambda_1+1-p}-p+q} \right]_{r=1}^{\lambda_1}.$$

Recordemos que

$$\mu'_j = \#\{k: \ \mu_k \ge j\},\$$

entonces

$$\mu_j = \#\{k: \ \mu'_k \ge j\} = \#\{k: \ 2n - \lambda'_{\lambda_1 + 1 - k} \ge j\} = \#\{k \in \{1, \dots, \lambda_1\}: \ \lambda'_{\lambda_1 + 1 - k} \le 2n - j\}$$
$$= \#\{q \in \{1, \dots, \lambda_1\}: \ \lambda'_q \le 2n - j\} = \lambda_1 - \#\{q \in \{1, \dots, \lambda_1\}: \ \lambda'_q \ge 2n - j + 1\}.$$

Utilizando la propiedad involutiva de la conjugación de particiones (1.2), tenemos:

$$\mu_i = \lambda_1 - \lambda_{2n+1-i}$$

у

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z) = \operatorname{sz}_{\mu}(z).$$

Notemos que lo presentado hasta ahora también se puede realizar sobre el alfabeto simpléctico impar, es decir, podemos definir sz_{λ}^{odd} .

En este caso tenemos análogos de identidades de Cauchy (ver Proposición 1.60)

Teorema 2.38 (Identidades de Cauchy). Para $z = (z_1, \ldots, z_n)$ $y y = (y_1, \ldots, y_m)$,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} sz_{\lambda}(z) s_{\lambda}(y) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - z_{j} y_{k} + y_{k}^{2}},$$
(2.86)

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} sz_{\lambda}(z) s_{\lambda'}(y) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \left(1 + z_{j} y_{k} + y_{k}^{2} \right),$$
(2.87)

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{sz}_{\lambda}(z) \operatorname{sz}_{\lambda'}(y) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (z_j + y_k)^2, \tag{2.88}$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{sz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(z) \operatorname{s}_{\lambda}(y) = \left(\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - z_{j} y_{k} + y_{k}^{2}} \right) \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - y_{k}} \right), \tag{2.89}$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{sz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(z) \operatorname{s}_{\lambda'}(y) = \left(\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (1 + z_j y_k + y_k^2) \right) \left(\prod_{k=1}^{m} (1 + y_k) \right), \tag{2.90}$$

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{sz}_{\lambda}^{\operatorname{odd}}(z) \operatorname{sz}_{\lambda'}^{\operatorname{odd}}(y) = 2 \left(\prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (z_j + y_k)^2 \right) \left(\prod_{j=1}^{n} (2 + z_j) \right) \left(\prod_{k=1}^{m} (2 + y_k) \right). \tag{2.91}$$

Demostración. Las fórmulas se siguen fácilmente de las identidades de Cauchy clásicas. Verifiquemos solamente (2.86). Pongamos z_j como $x_j + x_j^{-1}$,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{sz}_{\lambda}(z) \, \operatorname{s}_{\lambda}(y) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \operatorname{s}_{\lambda}(x, x^{-1}) \, \operatorname{s}_{\lambda}(y) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(1 - x_{j} y_{k})(1 - x_{j}^{-1} y_{k})}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - z_{j} y_{k} + y_{k}^{2}}.$$

Nota 2.39. La suma del lado izquierdo de (2.86) se puede reducir a las particiones λ con $\ell(\lambda) \leq \min\{2n, m\}$, la suma del lado izquierdo de (2.89) se reduce a las particiones λ con $\ell(\lambda) \leq \min\{2n+1, m\}$. Estas sumas se pueden tratar en el sentido formal, son absolutamente convergentes para valor pequeños de z_j y y_k . Las sumas de los lados izquierdos de (2.87), (2.88), (2.90) y (2.91) son finitas. Por ejemplo, la suma del lado izquierdo de (2.87) se puede reducir a las particiones λ que satisfacen $\ell(\lambda) \leq 2n$ y $\lambda_1 \leq m$.

Nota 2.40. A pesar de las similitudes de sz con s, que hemos visto hasta ahora, no existe una forma bialternante sencilla, con denominador sencillo, para el caso de s, ni formas bialternantes como en el caso de spz o oz.

Proposición 2.41. No existen polinomios univaluados f y g tales que

$$\operatorname{sz}_{(2,1)}(z_1, z_2) = \frac{\left| \begin{array}{cc} f(z_1) & f(z_2) \\ g(z_1) & g(z_2) \end{array} \right|}{z_1 - z_2}.$$
 (2.92)

Demostración. Usando (2.83) obtenemos

$$sz_{(2,1)}(z_1, z_2) = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 + z_2.$$
(2.93)

Supongamos que f y g son polinomios univaluados que satisfacen (2.92) y

$$f(t) = \sum_{j=0}^{p} f_j t^j, \qquad g(t) = \sum_{j=0}^{q} g_j t^j,$$

con $f_p \neq 0$, $g_q \neq 0$. Si p = q, entonces una operación elemental con filas del determinante en el numerador nos permite pasar al caso q = p - 1. Entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos el caso p > q. Los términos líderes del numerador de (2.92) son $f_p g_p z_1^p z_2^q$ y $-f_p g_p z_1^q z_2^p$, es fácil concluir que p = 3, q = 1. Dado que $f_p g_p = 1$, podemos considerar el caso $f_p = 1$ y $g_p = 1$. Después de cálculos sencillos llegamos a

$$\frac{\left|\begin{array}{cc} f(z_1) & f(z_2) \\ g(z_1) & g(z_2) \end{array}\right|}{z_1 - z_2} = z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + g_0(z_1^2 + z_2^2) + (g_0 + f_2) z_1 z_2 + g_0 f_2(z_1 + z_2) + g_0 f_1 - f_0.$$

De esto y de (2.93), $g_0=0$ y simultáneamente $g_0f_2=1$, lo cual es una contradicción.

Sin embargo, existe una fórmula bialternate para $sz_{(2,1)}(z_1,z_2)$ con un denominador más complicado.

Ejemplo 2.42. Se puede verificar directamente que

$$\operatorname{sz}_{(2,1)}(z_1, z_2) = \frac{\begin{vmatrix} z_1^4 + 1 & z_2^4 + 1 \\ z_1^2 & z_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1^2 + 1 & z_2^2 + 1 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}}.$$
 (2.94)

Nota 2.43. Un problema natural a futuro es generalizar el Ejemplo 2.42, es decir, para todo n en \mathbb{N} y λ en \mathcal{P}_n encontrar polinomios $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$, con coeficientes que dependen de λ y n, tales que

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z_1,\ldots,z_n) = \frac{\det[f_j(z_k)]_{j,k=1}^n}{\det[g_j(z_k)]_{j,k=1}^n}.$$

Desafortunadamente, no hemos podido resolver este problema todavía. Tratamos de resolver este problema para $sz_{(3,1)}(z_1, z_2)$. Razonando con los términos principales vemos que los grados de f_1, f_2, g_1, g_2 deben ser de la forma s+4, s+1, s+1, s. De hecho, hemos probado que no hay solución cuando s=0 (un razonamiento simple con varios términos líderes o principales), tampoco hay solución para s=1 (la prueba es larga y requiere de muchos términos principales).

Expansión de sz en términos de spz

Littlewood [40, Apendix] expande s_{λ} como combinación lineal de sp_{μ} o o_{μ} :

$$s_{\lambda} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P} \\ \nu' \text{ par}}} LR_{\nu,\mu}^{\lambda} \right) sp_{\mu}, \qquad s_{\lambda} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \left(\sum_{\substack{\nu \in \mathcal{P} \\ \nu \text{ par}}} LR_{\nu,\mu}^{\lambda} \right) o_{\mu}.$$
 (2.95)

Aquí las restricciones " ν par" o " ν ' par" significan que las partes de ν o ν ', respectivamente, son pares. Evaluando ambos lados de las identidades (2.95) con la lista de variables simplécticas y aplicando el homomorfismo Φ_n , llegamos a la expansión de $\operatorname{sz}_{\lambda}^{(n)}$ como combinación lineal de $\operatorname{spz}_{\mu}^{(n)}$ o $\operatorname{oz}_{\mu}^{(n)}$, con coeficientes que no dependen de n.

Es fácil ver que la familia $(sp_{\mu})_{\mu\in\mathcal{P}}$ forma una base del espacio vectorial Sym. Entonces toda función de Schur s_{λ} es una combinación finita de algunas sp_{μ} con algunos coeficientes enteros $\sigma_{\lambda,\mu}$:

$$s_{\lambda} = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \sigma_{\lambda,\mu} \, sp_{\mu} \,. \tag{2.96}$$

Como consecuencia, esta expansión es cierta para los correspondientes polinomios en 2n variables, es decir, para elementos de Sym_{2n} . Aplicando Φ_n obtenemos una expansión de $\operatorname{sz}_{\lambda}$ como combinación lineal de spz_{μ} :

$$\operatorname{sz}_{\lambda}(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\mu \in \mathcal{P}} \sigma_{\lambda, \mu} \operatorname{spz}_{\mu}(z_1, \dots, z_n). \tag{2.97}$$

Notemos que los coeficientes $\sigma_{\lambda,\mu}$ en (2.97) no dependen de n.

Krattenthaler [35] encontró expansiones de la forma (2.96) para particiones con "forma casi rectangular". En ese caso los coeficientes son siempre 0 o 1.

A continuación mostramos casos particulares de (2.97). Aunque los coeficientes para estos casos se pueden calcular a través de sumas de coeficientes de Littlewood–Richrdson de forma análoga a (2.95), damos una demostración usando fórmulas análogas de Jacobi–Trudi.

Lema 2.44. Para todo $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 1$,

$$\operatorname{sz}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(z_1,z_2) = \operatorname{spz}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(z_1,z_2) + \operatorname{sz}_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}(z_1,z_2).$$

Demostración.

$$sz_{(\lambda_1,\lambda_2)}(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} hz_{\lambda_1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_1+1}(z_1, z_2) \\ hz_{\lambda_2-1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_2}(z_1, z_2) \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} hz_{\lambda_1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_1+1}(z_2) + z_1 hz_{\lambda_1}(z_1, z_2) - hz_{\lambda_1-1}(z_1, z_2) \\ hz_{\lambda_2-1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_2}(z_2) + z_1 hz_{\lambda_2-1}(z_1, z_2) - hz_{\lambda_2-2}(z_1, z_2) \end{vmatrix}$$

sumamos la columna 1 multiplicada por $-z_1$ a la columna 2

$$= \begin{vmatrix} hz_{\lambda_1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_1+1}(z_2) - hz_{\lambda_1-1}(z_1, z_2) \\ hz_{\lambda_2-1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_2}(z_2) - hz_{\lambda_2-2}(z_1, z_2) \end{vmatrix}$$

aplicando la propiedad lineal con respecto a la segunda columna:

$$\operatorname{sz}_{(\lambda_1,\lambda_2)}(z_1,z_2) = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{hz}_{\lambda_1}(z_1,z_2) & \operatorname{hz}_{\lambda_1+1}(z_2) \\ \operatorname{hz}_{\lambda_2-1}(z_1,z_2) & \operatorname{hz}_{\lambda_2}(z_2) \end{array} \right| + (-1) \left| \begin{array}{cc} \operatorname{hz}_{\lambda_1}(z_1,z_2) & \operatorname{hz}_{\lambda_1-1}(z_1,z_2) \\ \operatorname{hz}_{\lambda_2-1}(z_1,z_2) & \operatorname{hz}_{\lambda_2-2}(z_1,z_2) \end{array} \right|.$$

En la última expresión, denotamos los sumandos por S_1 y S_2 . Transformando el primer sumando:

$$S_{1} = \frac{1}{z_{1} - z_{2}} \begin{vmatrix} (z_{1} - z_{2}) \operatorname{hz}_{\lambda_{1}}(z_{1}, z_{2}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{2}) \\ (z_{1} - z_{2}) \operatorname{hz}_{\lambda_{2}-1}(z_{1}, z_{2}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{2}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z_{1} - z_{2}} \begin{vmatrix} \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{1}) - \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{2}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{2}) \\ \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{1}) - \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{2}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{2}) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z_{1} - z_{2}} \begin{vmatrix} \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{1}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{1}+1}(z_{2}) \\ \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{1}) & \operatorname{hz}_{\lambda_{2}}(z_{2}) \end{vmatrix} = \operatorname{spz}_{(\lambda_{1},\lambda_{2})}(z_{1}, z_{2}).$$

Transformamos el segundo sumando:

$$S_2 = \begin{vmatrix} hz_{\lambda_1 - 1}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_1}(z_1, z_2) \\ hz_{\lambda_2 - 2}(z_1, z_2) & hz_{\lambda_2 - 1}(z_1, z_2) \end{vmatrix} = sz_{(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1)}(z_1, z_2).$$

Proposición 2.45. Para $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$,

$$\mathbf{s}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \sum_{k=0}^{\lambda_2} \mathbf{sp}_{(\lambda_1 - k, \lambda_2 - k)}. \tag{2.98}$$

Demostración. Se sigue del lema anterior por inducción sobre λ_2 .

Para λ con $\ell(\lambda) > 2$, la situación es mas complicada, y algunos coeficientes son estrictamente mayores que 1.

Ejemplo 2.46. Consideremos $\lambda = (2, 2, 1, 1)$. Usando las fórmulas de Jacobi-Trudi para s y sp es fácil probar que

$$s_{(2,2,1,1)} = sp_{(2,2,1,1)} + sp_{(2,2)} + sp_{(2,1,1)} + sp_{(1,1,1,1)} + 2sp_{(1,1)} + sp_{(0)}.$$

En este ejemplo algunos coeficientes son estrictamente mayores que 1.

Krattenthaler encontró varias expansiones del tipo (2.97) para particiones rectangulares y casi rectangulares. Por ejemplo, la siguiente fórmula es equivalente a [35, fórmula 3.3].

$$sz_{(\lambda^m)}(z) = \begin{cases} \sum_{0 \le j_1 \le \dots \le j_p \le \lambda} spz_{((\lambda - j_1)^2, \dots, (\lambda - j_p)^2)}(z), & m = 2p, \\ \sum_{0 \le j_1 \le \dots \le j_p \le \lambda} spz_{(\lambda, (\lambda - j_1)^2, \dots, (\lambda - j_p)^2)}(z), & m = 2p + 1. \end{cases}$$

Capítulo 3

Menores de matrices de Toeplitz de banda

Este capítulo recopila los resultados expuestos en [43].

Alexandersson [1] mostró una nueva prueba combinatoria de la fórmula de Widom para determinantes de matrices de Toeplitz. Como resultado auxiliar [1, Proposition 3], escribió el menor de matrices de Toeplitz triangulares $[e_{k-j}]_{j,k}$ como polinomios de Schur sesgados $s_{\alpha/\beta}$, con ciertas particiones α y β expresadas en términos de filas y columnas eliminadas.

El objetivo de este capítulo es extender [1] a matrices de Toeplitz de banda no necesariamente triangulares y mostrar que varios resultados clásicos de la teoría de matrices de Toeplitz se pueden relacionar naturalmente con la teoría de polinomios de Schur sesgados. Empezamos con una matriz de Toeplitz de banda general $T_n(a)$ (no necesariamente triangular) generada por un polinomio de Laurent arbitrario a y expresamos sus menores como ciertos polinomios de Schur sesgados evaluados en los ceros de a. Este resultado se puede ver en el Teorema 3.4. Después deducimos varias fórmulas para los cofactores y eigenvectores (Teorema 3.13 y Teorema 3.18), además damos nuevas pruebas para las fórmulas de Trench.

3.1. Matrices de Toeplitz de banda a través de polinomios simétricos

Sea a un polinomio de Laurent de la forma

$$a(t) = \sum_{k=p-w}^{p} a_k t^k = a_p t^{p-w} \prod_{j=1}^{w} (t - z_j),$$
(3.1)

donde $p \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}, w \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, a_{p-w}, \ldots, a_p$ son números complejos y $a_p \neq 0$. Para todo n en \mathbb{N} denotemos por $T_n(a)$ a la matriz de Toeplitz de banda de tamaño $n \times n$ generada por a:

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n. (3.2)$$

Los coeficientes a_k se definen como cero si k > p o k .

Notemos que si n > p, p es el índice de la última diagonal no cero debajo de la diagonal principal y w + 1 es el ancho de la banda.

De las fórmulas de Vieta, Proposición 1.23, los coeficientes del polinomio (3.1) pueden escribirse en términos de polinomios simétricos elementales: $a_{j+p-w} = a_p(-1)^{w-j} e_{w-j} t^{j+p-w}$,

$$a_j = (-1)^{p-j} a_p e_{p-j}$$
. (3.3)

Notemos que (3.3) no sólo es cierto para $p - w \le j \le p$, sino para todo j, dado que si j > p o $j ambos lados de la igualdad son cero. Por lo que la matriz <math>T_n(a)$ se puede escribir como

$$T_n(a) = (-1)^p a_p \left[(-1)^{j+k} e_{p+k-j} \right]_{j,k=1}^n.$$
(3.4)

De aquí que todo menor de $T_n(a)$, después de factorizar una potencia apropiada de a_p , es un polinomio simétrico en z_1, \ldots, z_w , las cuales son raíces de a(t). De hecho, resulta ser un polinomio sesgado de Schur, salvo un signo.

En lugar de trabajar con polinomios de Laurent de la forma (3.1) y sus correspondientes matrices de Toeplitz de banda, podemos considerar una situación mas general en el cual a es una serie de Laurent formal de la forma $a(t) = \sum_{k=-\infty}^p a_k t^k$, con $a_p \neq 0$. En otras palabras, tenemos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que $a_p \neq 0$ y $a_k = 0$ para k > p. Entonces la correspondiente matriz de Toeplitz tendría un número finito de diagonales no cero debajo de la principal. Como no sabemos como definir los ceros de una serie formal de Laurent ni como expresar los coeficientes a_k a través de esos ceros; entonces definimos $(e_k)_{k=0}^{\infty}$ directamente de (3.3) y trabajamos con funciones de Schur sesgadas, véase Nota 1.74. Notemos que a se puede escribir en términos de $(e_k)_{k=0}^{\infty}$ como

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{p} a_k t^k = a_p t^p \sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k e_{-k} t^k = a_p t^p E(-1/t).$$
 (3.5)

Para algunas demostraciones consideraremos primero el caso triangular, el cual ya ha sido estudiado por varios autores, para facilitar la comparación de los resultados. Sea

$$b(t) = E(1/t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} e_{-k} t^k.$$
 (3.6)

Si e_k , para todo k > 0, son polinomios simétricos elementales en una cantidad finita de variables, z_1, \ldots, z_w , entonces las sumas en (3.6) son finitas, $y - z_1, \ldots, -z_w$ son raíces de b.

3.2. Determinantes de matrices de Toeplitz de banda

En esta sección se presenta una fórmula sencilla y práctica en términos de cálculos, para el determinante de matrices de Toeplitz de banda.

Proposición 3.1. Sean a(t) un polinomio de Laurent de la forma (3.1) y n en \mathbb{N} . Entonces

$$\det(T_n(a)) = (-1)^{pn} a_n^n s_{(n^p)}(z_1, \dots, z_w).$$
(3.7)

Demostración. Aplicando (3.4) a la matriz y factorizando los signos, es fácil ver que (3.7) se sigue de la fórmula dual de Jacobi-Trudi para polinomios de Schur. \Box

El plinomio de Schur $s_{(n^p)}$ del lado derecho de (3.7) se puede escribir por medio de la fórmula de Jacobi-Trudi (1.30). Entonces (3.7) toma la forma

$$\det T_n(a) = a_p^n (-1)^{pn} \det \left[h_{n-j+k} \right]_{i,k=1}^p. \tag{3.8}$$

Baxter y Schmidt [6] dieron (3.8) sin usar el lenguaje de funciones de Schur. Ellos denotaron por h_j a los coeficientes de la serie reciproca de la serie $\sum_k (-1)^k e_k t^k$. Esencialmente, probaron el teorema de Jacobi para el menor complementario para este caso particular. En el caso de banda, el polinomio de Schur $s_{(n^p)}(z_1,\ldots,z_w)$ también se puede escribir como el cociente de dos determinantes (1.29):

$$\det T_n(a) = a_p^n (-1)^{pn} \frac{A_{(n^p)}(z_1, \dots, z_w)}{\text{Vander}(z_1, \dots, z_w)}.$$
(3.9)

En esta forma la ecuación (3.7) fue deducida por Trench [53, Theorem 2]. Este resultado clásico también se explica en [11, Chap. 2].

Veamos un ejemplo de la Proposición 3.1.

Ejemplo 3.2. Para w=5 y p=2, el polinomio de Laurent (3.1) tiene la forma $a(t)=\sum_{k=-3}^2 a_k t^k$. Sean $a_2=1$ y n=7. Entonces

$$\det(T_7(a)) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

De las formulas de Vieta, los coeficientes a_k se expresan a través de e_{2-k} :

$$\det(T_7(a)) = \begin{vmatrix} e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & 0 & 0 & 0 \\ -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & 0 & 0 \\ e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & 0 \\ 0 & e_0 & e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 \\ 0 & 0 & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & e_6 & -e_7 & e_8 \\ -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & e_6 & -e_7 \\ e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 & e_6 \\ -e_{-1} & e_0 & e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 & -e_5 \\ e_{-2} & -e_{-1} & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 & e_4 \\ -e_{-3} & e_{-2} & -e_{-1} & e_0 & -e_1 & e_2 & -e_3 \\ e_{-4} & -e_{-3} & e_{-2} & -e_{-1} & e_0 & -e_1 & e_2 \end{vmatrix}.$$

Factorizando un signo de cada fila y cada columna y usando la fórmula dual de Jacobi—Trudi (1.31), llegamos a

$$\det(T_7(a)) = (-1)^{7 \cdot 2} s_{(7^2)}(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5),$$

donde z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 son las raíces de a(t). Notemos que si usamos (3.8), tendríamos un determinante 2×2 , lo cual hace que, computacionalmente, esta fórmula sea mas rápida.

Nota 3.3. El lado derecho de (3.8) muestra que podemos calcular el determinante de una matriz de Toeplitz de banda con un determinante de una matriz mas pequeña, esta vez evaluada en polinomios homogéneos. La ventaja de esto se hace notoria cuando el tamaño de la matriz n es grande y p es pequeño.

3.3. Menores de matrices de Toeplitz de banda

Para todo par de enteros n,m tales que $0 \le m \le n$, denotamos por I_n^m el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes $\{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$. Todo elemento ρ de I_n^m se puede escribir como m-tupla (ρ_1,\ldots,ρ_m) , donde $\rho_1,\ldots,\rho_m \in \{1,\ldots,n\}$ y $\rho_1 < \ldots < \rho_m$. Identificamos la función ρ con el subconjunto $\{\rho_1,\ldots,\rho_m\}$ de $\{1,\ldots,n\}$.

Dada A de tamaño $n \times n, m$ en $\{0, \dots, n\}$, y ρ, σ in I_n^m , denotamos por $A_{\rho, \sigma}$ a la submatriz

de A localizada en la intersección de las filas ρ_1, \ldots, ρ_m y las columnas $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$:

$$A_{\rho,\sigma} = \left[A_{\rho_j,\sigma_k} \right]_{i,k=1}^m.$$

Notemos que si m=0, entonces la submatriz $A_{\rho,\sigma}$ es vacía y su deteminante es 1.

Empezaremos con dos fórmulas equivalentes para menores de matrices Toepliz de banda.

Teorema 3.4. Sea a un polinomio de Laurent de la forma (3.1), $n, m \in \mathbb{Z}$, $0 \le m \le n$, $\rho, \sigma \in I_n^m$, d = n - m, $y \xi, \eta \in I_n^d$ los complementos de ρ y σ respectivamente. Entonces

$$\det(T_n(a)_{\rho,\sigma}) = (-1)^{pm+|\rho|+|\sigma|} a_p^m \operatorname{s}_{(m^p,\operatorname{rev}(\xi-\operatorname{id}_d))/\operatorname{rev}(\eta-\operatorname{id}_d)}(z_1,\ldots,z_w), \tag{3.10}$$

y también

$$\det(T_n(a)_{\rho,\sigma}) = (-1)^{pm+|\rho|+|\sigma|} a_p^m \ \mathbf{s}_{(m^p,m^d+\mathrm{id}_d-\eta)/(m^d+\mathrm{id}_d-\xi)}(z_1,\ldots,z_w). \tag{3.11}$$

Reescribiendo las particiones sesgadas de (3.10) y (3.11) en la forma expandida, el polinomio de Schur sesgado de (3.10) es $s_{\lambda/\mu}$, donde

$$\lambda = (\underbrace{m, \dots, m}_{p}, \xi_d - d, \dots, \xi_1 - 1), \quad \mu = (\eta_d - d, \dots, \eta_1 - 1),$$
 (3.12)

y el polinomio de Schur sesgado de (3.11) puede escribirse como $s_{\alpha/\beta}$, donde

$$\alpha = (\underbrace{m, \dots, m}_{n}, m + 1 - \eta_{1}, \dots, m + d - \eta_{d}), \quad \beta = (m + 1 - \xi_{1}, \dots, m + d - \xi_{d}).$$
 (3.13)

Para demostrar el Teorema 3.4 necesitamos dar los siguientes cuatro lemas. El siguiente lema es sólo una aplicación de la fórmula dual de Jacobi-Trudi.

Lema 3.5. Sean $n \ge 1$, $m \le n$, $\rho, \sigma \in I_n^m$, $y \ d = n - m \ y \ b(t)$ como en (3.6). Entonces

$$\det(T_n(b)_{\rho,\sigma}) = \det\left[e_{\sigma_k - \rho_j}\right]_{j,k=1}^m = s_{(\mathrm{id}_m - \rho + d^m)'/(\mathrm{id}_m - \sigma + d^m)'}. \tag{3.14}$$

Demostración. La (j,k)-ésima entrada de la matriz $T_n(b)_{\rho,\sigma}$ es $e_{\sigma_k-\rho_j}$. Reescribiendo la diferencia $\sigma_k-\rho_j$ como

$$\sigma_k - \rho_j = (j - \rho_j + d) - (k - \sigma_k + d) - j + k,$$

y definiendo las particiones λ y μ por medio de sus conjugados:

$$\lambda'_{j} = j - \rho_{j} + d, \qquad \mu'_{k} = k - \sigma_{k} + d.$$

$$T_{n}(b)_{\rho,\sigma} = \left[e_{\sigma_{k} - \rho_{j}} \right]_{j,k=1}^{m} = \left[e_{\lambda'_{j} - \mu'_{k} - k + k} \right]_{j,k=1}^{m}$$
(3.15)

y así, por la fórmula de Jacobi-Trudi (1.37)

$$\det(T_n(b)_{\rho,\sigma}) = s_{(\mathrm{id}_m - \rho + d^m)'/(\mathrm{id}_m - \sigma + d^m)'}.$$

El sumando d en (3.15) sirve para que λ'_j y μ'_k sean no negativos. Este sumando se puede sustituir por cualquier entero mayor o igual a máx $\{\rho_m - m, \sigma_m - m\}$.

El Lema 3.5 es bastante similar a [47, Section 4.2], con la diferencia que la matriz de Toeplitz que se considera allí es $[h_{k-j}]_{j,k=0}^{\infty}$, y el sumando $\sigma_m - m$ se usa en lugar de d. También en el trabajo [38, Section 1.4], se definen funciones de Schur sesgadas como ciertos menores de $[h_{k-j}]_{j,k=0}^{\infty}$, donde las partes de la partición se escriben en orden decreciente.

Si el número de filas y columnas seleccionadas (el cual denotamos por m) es pequeño, entonces el correspondiente menor de la matriz de Toeplitz es fácil de calcular. El caso interesante es cuando d = n - m es pequeño, es decir, cuando quitamos pocas filas y columnas. Expresaremos las particiones asociadas a λ y μ en términos de las filas y columnas eliminadas.

Lema 3.6. Bajo las hipótesis del Lema 3.5, denotemos por ξ y η los complementos de ρ y σ , con respecto al conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\det(T(b)_{\rho,\sigma}) = \operatorname{s}_{\operatorname{rev}(\xi - \operatorname{id}_{d})/\operatorname{rev}(\eta - \operatorname{id}_{d})}$$
(3.16)

y

$$\det(T(b)_{\rho,\sigma}) = s_{(m^d + \mathrm{id}_d - \eta)/(m^d + \mathrm{id}_d - \xi)}. \tag{3.17}$$

Demostración. La idea principal de la demostración del siguiente lema se presentó en el Lema 1.64.

Calculemos λ_j aplicando (1.1), (3.15) y (1.36). Para todo $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\lambda_{j} = \#\{k \colon \lambda'_{k} \ge j\} = \#\{k \colon k - \rho_{k} + d \ge j\}$$

$$= \#\{k \colon \rho_{k} - k \le d - j\} = \#\{k \colon \rho_{k} - k < d + 1 - j\}$$

$$= \xi_{d+1-j} - (d+1-j) = (\xi - \mathrm{id}_{d})_{d+1-j} = \mathrm{rev}(\xi - \mathrm{id}_{d})_{j}.$$

De lo que obtenemos $\lambda = \text{rev}(\xi - \text{id}_d)$. La fórmula $\mu = \text{rev}(\eta - \text{id}_d)$ se puede probar de manera análoga. De la Proposición 1.73, $s_{\lambda/\mu} = s_{\alpha/\beta}$, donde $\alpha/\beta = (\lambda/\mu)^*$. Calculemos α y β por (1.3):

$$\alpha = \lambda_1^{\ell(\lambda)} - \operatorname{rev}(\mu) = \lambda_1^{\ell(\lambda)} + \operatorname{id}_d - \eta, \qquad \beta = \lambda_1^{\ell(\lambda)} - \operatorname{rev}(\lambda) = \lambda_1^{\ell(\lambda)} + \operatorname{id}_d - \xi.$$

Notemos que $\lambda_1 = \xi_d - d \le n - d = m$. Las particiones $m^d + \mathrm{id}_d - \eta$ y $m^d + \mathrm{id}_d - \xi$ se obtienen de α y β sumándoles el mismo entero no negativo $m - \lambda_1$ a todas sus partes. Esta operación no cambia la función sesgada de Schur, por lo que (3.17) queda probada.

A lo largo del capítulo estaremos utilizando la siguiente identidad:

$$id_{d+p} = (id_p, p^d + id_d) = (id_d, d^p + id_p).$$
 (3.18)

El siguiente lema nos muestra como transformar un menor general de $T_n(a)$ a un menor particular de una matriz triangular $T_{n+p}(b)$. De nuevo, la notación para las submatrices indican las filas y columnas que no eliminamos, pero los índices que nos interesan son los de las filas y columnas eliminadas.

Lema 3.7. Sean a y b series de Laurent de la forma (3.5) y (3.6), respectivamente. Mas aún, sean $n, m \in \mathbb{Z}$, $1 \le m \le n$, $\rho, \sigma \in I_n^m$, $\xi = \{1, \ldots, n\} \setminus \rho$, $\eta = \{1, \ldots, n\} \setminus \sigma$. Entonces

$$\det T_n(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{|\rho| + |\sigma| + mp} a_p^m \det T_{n+p}(b)_{\widehat{\rho},\widehat{\sigma}}, \tag{3.19}$$

$$donde \ \widehat{\xi} = (\xi, \mathrm{id}_p + n^p), \ \widehat{\eta} = (\mathrm{id}_p, \eta + p^d), \ \widehat{\rho} = \{1, \dots, n+p\} \setminus \widehat{\xi}, \ y \ \widehat{\sigma} = \{1, \dots, n+p\} \setminus \widehat{\eta}.$$

Demostración. Primero expresamos la submatriz $T_n(a)_{\rho,\sigma}$ en términos de $(e_k)_{k=0}^{\infty}$:

$$T_n(a)_{\rho,\sigma} = [a_{\rho_j - \sigma_k}]_{j,k=1}^m = (-1)^p a_p [(-1)^{\rho_j + \sigma_k} e_{p+\sigma_k - \rho_j}]_{j,k=1}^m.$$

Ahora factorizamos $(-1)^{\rho_j}$ de la j-ésima fila, para todo j, y $(-1)^{\sigma_k}$ de la k-ésima columna, para todo k. Formalmente,

$$T_n(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^p a_p \operatorname{diag}([(-1)^{\rho_j}]_{j=1}^m) [e_{p+\sigma_k-\rho_j}]_{j,k=1}^m \operatorname{diag}([(-1)^{\sigma_k}]_{k=1}^m),$$

donde diag(v) es la diagonal de la matriz generada por el vector v. Pasando a los determinantes tenemos

$$\det T_n(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{|\rho| + |\sigma| + mp} a_p^m \det[e_{p+\sigma_k - \rho_i}]_{i,k=1}^m.$$
(3.20)

Definiendo $\widehat{\rho}, \widehat{\sigma} \in I_{n+p}^m$ como $\widehat{\rho} = \rho$ y $\widehat{\sigma} = \sigma + p^m$ llegamos a que (3.19). Nos falta calcular los complementos de $\widehat{\rho}$ y $\widehat{\sigma}$ en $\{1, \ldots, n+p\}$. Identificando subconjuntos con tuplas estrictamente crecientes y usando (3.18) obtenemos que

$$id_{n+p} \setminus \widehat{\rho} = (id_n \setminus \rho) \cup (id_p + n^p) = (\xi, id_p + n^p) = \widehat{\xi},$$

$$id_{n+p} \setminus \widehat{\sigma} = id_p \cup ((id_n + p^n) \setminus (\sigma + p^m)) = id_p \cup (\eta + p^d) = (id_p, \xi + p^d) = \widehat{\eta}.$$

Con los previos lemas estamos listos para demostrar el Teorema 3.4.

Demostración del Teorema 3.4. Del Lema 3.7 y del Lema 3.6 aplicados a $\hat{\xi}$ y $\hat{\eta}$,

$$\det T_n(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{|\rho|+|\sigma|+pm} a_p^m \, \mathbf{s}_{\lambda/\mu} = (-1)^{|\rho|+|\sigma|+pm} a_p^m \, \mathbf{s}_{\alpha/\beta},$$

donde

$$\lambda = \operatorname{rev}(\widehat{\xi} - \operatorname{id}_{d+p}), \qquad \mu = \operatorname{rev}(\widehat{\eta} - \operatorname{id}_{d+p}),$$

$$\alpha = m^{d+p} + \operatorname{id}_{d+p} - \widehat{\eta}, \qquad \beta = m^{d+p} + \operatorname{id}_{d+p} - \widehat{\xi}.$$

De la ecuación (3.18), estas expresiones se pueden transformar a las particiones (3.12) y (3.13) de Teorema 3.4. Por ejemplo,

$$\widehat{\xi} - \mathrm{id}_{d+p} = (\xi, \mathrm{id}_p + n^p) - (\mathrm{id}_d, \mathrm{id}_p + d^p) = (\xi - \mathrm{id}_d, m^p),$$

esto es
$$\lambda = \text{rev}((\xi - \text{id}_d, m^p)) = (m^p, \text{rev}(\xi - \text{id}_d)).$$

Nota 3.8. Otra forma de probar el Teorema 3.4 es aplicando la fórmula (1.37) y el Lema 1.64 directamente a $\det(T_n(a))_{\rho,\sigma}$, sin pasar al caso de matrices triangulares. La igualdad de los lados derechos de (3.10) y (3.11) también se puede demostrar, verificando que $\alpha/\beta = (\lambda/\mu)^*$ o aplicando la propiedad persimétrica de las matrices de Toeplitz.

Ilustremos el Teorema 3.4 con un ejemplo.

Ejemplo 3.9. Para w=5 y p=2, el polinomio de Laurent (3.1) tiene la forma $a(t)=\sum_{k=-3}^2 a_k t^k$. Sean $a_2=1, n=7, \xi=(3,6)$ y $\eta=(3,7)$. Entonces $d=2, m=5, \rho=(1,2,4,5,7)$ y $\sigma=(1,2,4,5,6)$. Si quitamos las filas ξ y columnas η de la matriz de Toeplitz $T_7(a)$ obtenemos el menor

$$\det(T_7(a)_{\rho,\sigma}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-3} & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_{-2} & a_{-3} & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ 0 & 0 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

De las formulas de Vieta los a_k se expresan a través de e_{2-k} :

$$\det(T_7(a)_{\rho,\sigma}) = \begin{vmatrix} e_2 & -e_3 & -e_5 & 0 & 0 \\ -e_1 & e_2 & e_4 & -e_5 & 0 \\ 0 & e_0 & e_2 & -e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & -e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & -e_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_2 & -e_3 & -e_5 & e_6 & -e_7 \\ -e_1 & e_2 & e_4 & -e_5 & e_6 \\ -e_{-1} & e_0 & e_2 & -e_3 & e_4 \\ e_{-2} & -e_{-1} & -e_1 & e_2 & -e_3 \\ e_{-4} & -e_{-3} & -e_{-1} & e_0 & -e_1 \end{vmatrix}.$$

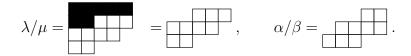
Usando (3.12), tenemos $\lambda = (5^2, 6-2, 3-1) = (5^2, 4, 2)$ y $\mu = (7-2, 3-1) = (5, 2)$, entonces

$$\det(T_n(a)_{\rho,\sigma}) = (-1)^{10+19+18} \, \mathbf{s}_{(5,5,4,2)/(5,2)} = -\mathbf{s}_{(5,4,2)/(2)} \,.$$

De (3.13), $\alpha = (5, 5, 3)$ y $\beta = (3, 1)$, entonces

$$\det(T_n(a)_{\rho,\sigma}) = -s_{(5,5,3)/(3,1)}.$$

Notemos que α/β se relaciona con λ/μ por medio de la operación giro *:



Observación 3.10. Analicemos la complejidad del algoritmo para calcular el menor $\det(T_n(a)_{\rho,\sigma})$, utilizando la fórmula (3.10) o (3.11). La longitud de las particiones ξ y η es p+d. Para calcular el polinomio de Schur sesgado, en el lado derecho de (3.10), aplicamos la fórmula de Jacobi-Trudi (1.34) y formamos una matriz cuadrada de orden p+d. Los elementos de esta matriz son polinomios h, los cuales calculamos por la fórmula (1.15). Es cómodo calcular por separado todos los w denominadores necesarios, lo cual requiere Cw^2 operaciones aritméticas con números complejos. Después de esto, para calcular todos los polinomios h, se necesitan $C(p+d)^2w$ operaciones. Finalmente, para calcular el determinante, se utilizan $C(p+d)^3$ operaciones. Por lo tanto, el número total de operaciones aritméticas es de orden

$$Cw^{2} + C(p+d)^{2}w + C(p+d)^{3}$$
,

lo cual se puede acotar por $C(w+d)^3$. En estos razonamientos, las constantes C pueden ser diferentes entre si y dependen del número de operaciones que estamos considerando (solamente las multiplicaciones, o también las adiciones, los incrementos y las comparaciones de los ciclos).

Notemos que la fórmula es eficiente cuando d (la cantidad de las filas y columnas eliminadas) es pequeño.

Lo más importante es que la complejidad algorítmica no depende del orden de la matriz original.

La siguiente proposición nos dice que todo polinomio de Schur sesgado se puede ver como algún menor de una matriz de Toeplitz de banda. Una idea similar a la siguiente proposición se presenta en [38]

Proposición 3.11. Sean λ/μ una partición sesgada y $d=\ell(\lambda)$. Definamos a por (3.1) con p=0 y $a_p=1$. Mas aún, sea $n=\lambda_1+d$,

$$\xi = \text{rev}(\lambda) + \text{id}_d = (\lambda_d + 1, \lambda_{d-1} + 2, \dots, \lambda_1 + d),$$

$$\eta = \text{rev}(\mu) + \text{id}_d = (\mu_d + 1, \mu_{d-1} + 2, \dots, \mu_1 + d),$$
(3.21)

y sean $\rho, \sigma \in I_n^d$ los complementos de ξ, η , respectivamente. Entonces

$$s_{\lambda/\mu}(z_1,\dots,z_w) = (-1)^{|\lambda|+|\mu|} \det T_n(a)_{\rho,\sigma}.$$
 (3.22)

Demostración. Las fórmulas (3.21) y (3.22) son equivalentes a (3.12) y (3.10), si $a_p=1$ y p=0.

Nota 3.12. Dada una partición sesgada λ/μ y un número w, el polinomio de Schur sesgado $s_{\lambda/\mu}$ no sólo se puede obtener mediante la Proposición 3.11. Por ejemplo, podemos tomar un n arbitrario que satisfaga $n \geq \lambda_1 + d$. De hecho, en lugar de usar (3.12) podemos usar (3.13) con p = 0 y definir ξ y η como

$$\xi = (\mu_1 - (m+1), \dots, \mu_d - (m+d)), \quad \eta = (\lambda_1 - (m+1), \dots, \lambda_d - (m+d)). \tag{3.23}$$

No tenemos una condición necesaria y suficiente para determinar cuando dos menores de matrices de Toeplitz corresponden al mismo polinomio de Schur sesgado. Dos particiones sesgadas diferentes pueden inducir el mismo polinomio de Schur sesgado, el problema de coincidencias entre polinomios de Schur sesgados no es trivial, véase [47].

3.4. Cofactores de matrices de Toeplitz de banda

En esta sección aplicaremos el Teorema 3.4, para obtener fórmulas equivalentes para cofactores, es decir, las entradas de la matriz adjunta.

Teorema 3.13. Sea a de la forma (3.1) y $n \ge 1$. Entonces para todo r, s en $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{p(n-1)} a_p^{n-1} s_{((n-1)^p,s-1)/(r-1)}, \tag{3.24}$$

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{p(n-1)} a_p^{n-1} s_{((n-1)^p, n-r)/(n-s)}, \tag{3.25}$$

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{p(n-1)} a_p^{n-1} \sum_{k=\max(0,s-r)}^{\min(n-r,s-1)} s_{((n-1)^{p-1},n+s-r-1-k,k)} \qquad (para \ p \ge 1), \qquad (3.26)$$

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{pn} a_p^{n-1} \left(h_{s-r-p} s_{(n^p)} - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k h_{s+k-p} s_{(n^{p-k-1},(n-1)^k,n-r)} \right).$$
(3.27)

La expansión del lado derecho de (3.26) no aplica cuando p=0; en este caso (3.24), (3.25), y (3.27) se reducen a $\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s}=a_0^{n-1}\operatorname{s}_{(r-s)}=a_0^{n-1}\operatorname{h}_{r-s}$.

Claro esta, (3.24)–(3.27) se pueden convertir en las entradas de la matriz inversa $T_n(a)^{-1}$: suponiendo que $s_{(n^p)} \neq 0$, cambiamos el lado izquierdo por $(T_n(a)^{-1})_{r,s}$ y dividimos el lado derecho por $(-1)^{pn}a_p^n s_{(n^p)}$.

Las fórmulas (3.24) y (3.25) son corolarios del Teorema 3.4.

Probaremos (3.26) aplicando un caso particular de la formula sesgada de Pieri y deduciremos (3.27) de (3.25) usando la fórmula de Jacobi-Trudi y expandiendo el correspondiente determinante por la primera columna.

Lema 3.14. Sean $n, p \in \mathbb{N}$ y $r, s \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$s_{(n^p,s)/(r)} = \sum_{k=\max(0,s-r)}^{\min(n-r,s)} s_{(n^{p-1},n+s-r-k,k)}.$$
(3.28)

Demostración. Aplicamos la regla de Pieri sesgada (1.39), como en el Ejemplo 1.72. De $\lambda = (n^p, s)$, las condiciones (1.40) se convierten en

$$n \le \nu_j \le n \quad (1 \le j \le p - 1), \quad s \le \nu_p \le n, \quad 0 \le \nu_{p+1} \le s, \quad np + s - |\nu| = r.$$

Por consiguiente, $\nu_1 = \ldots = \nu_{p-1} = n$, y si ν_{p+1} lo denotamos por k, entonces $\nu_p = n + s - r - k$. El correspondiente diagrama se ve como sigue (los nodos eliminados están coloreados de gris):

$$\nu = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline n^{p-1} \\ \hline n+s-r-k & r+k-s \\ \hline k & s-k \\ \hline \end{array}.$$

Las condiciones $0 \le k \le s$ y $s \le n+s-r-k \le n$ determinan los limites de la suma en (3.28).

Demostración del Teorema 3.13. Aplicando (3.10) y (3.11) con $d=1, \xi=(s)$ y $\eta=(r)$, obtenemos (3.24) y (3.25). Combinando el Lema 3.14 con la fórmula (3.24), tenemos (3.26). Para probar la identidad (3.27), consideremos la función de Schur sesgada de la forma (3.25):

$$\mathbf{s}_{((n-1)^{p},n-r)/(n-s)} = \begin{vmatrix} \mathbf{h}_{s-1} & \mathbf{h}_{n} & \cdots & \mathbf{h}_{n+p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{s-p} & \mathbf{h}_{n-p+1} & \cdots & \mathbf{h}_{n} \\ \mathbf{h}_{s-r-p} & \mathbf{h}_{n-r-p+1} & \cdots & \mathbf{h}_{n-r} \end{vmatrix}.$$

Como en el Ejemplo 1.72, expandimos el determinante por la primer a columna y usamos la Nota 1.56:

$$\mathbf{S}_{((n-1)^p, n-r)/(n-s)} = \sum_{j=1}^p (-1)^j \mathbf{h}_{s-j} \, \mathbf{S}_{(n^{j-1}, (n-1)^{p-j}, n-r)} + (-1)^p \, \mathbf{h}_{s-r-p} \, \mathbf{S}_{(n^p)} \,.$$

Haciendo el cambio de variable k = j - p obtenemos

$$\mathbf{s}_{((n-1)^p,n-r)/(n-s)} = (-1)^p \,\mathbf{h}_{s-r-p} \,\mathbf{s}_{(n^p)} - (-1)^p \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \,\mathbf{h}_{s+k-p} \,\mathbf{s}_{(n^{p-k-1},(n-1)^k,n-r)} \,.$$

La sustitución de la última expresión en (3.24) nos da (3.27).

El siguiente es un ejemplo sencillo que nos ayuda a ver el comportamiento de las entradas de la adjunta cuando aplicamos el Teorema 3.13.

Ejemplo 3.15. Sean p = 1, n = 5 y $a_1 = 1$, entonces aplicando (3.24), la adjunta de $T_5(a)$ se puede escribir como:

$$\mathrm{adj}(T_5(a)) = \begin{bmatrix} s_{(4)} & s_{(4)/(1)} & s_{(4)/(2)} & s_{(4)/(3)} & s_{(4)/(4)} \\ s_{(4,1)} & s_{(4,1)/(1)} & s_{(4,1)/(2)} & s_{(4,1)/(3)} & s_{(4,1)/(4)} \\ s_{(4,2)} & s_{(4,2)/(1)} & s_{(4,2)/(2)} & s_{(4,2)/(3)} & s_{(4,2)/(4)} \\ s_{(4,3)} & s_{(4,3)/(1)} & s_{(4,3)/(2)} & s_{(4,3)/(3)} & s_{(4,3)/(4)} \\ s_{(4,4)} & s_{(4,4)/(1)} & s_{(4,4)/(2)} & s_{(4,4)/(3)} & s_{(4,4)/(4)} \end{bmatrix}.$$

Escribiendo cada polinomio de Schur sesgado como combinación de polinomios de Schur tenemos:

$$\mathrm{adj}(T_5(a)) = \begin{bmatrix} s_{(4)} & s_{(3)} & s_{(2)} & s_{(1)} & s_{(0)} \\ s_{(4,1)} & s_{(4)} + s_{(3,1)} & s_{(3)} + s_{(2,1)} & s_{(2)} + s_{(1,1)} & s_{(1)} \\ s_{(4,2)} & s_{(4,1)} + s_{(3,2)} & s_{(4)} + s_{(3,1)} + s_{(2,2)} & s_{(3)} + s_{(2,1)} & s_{(2)} \\ s_{(4,3)} & s_{(4,2)} + s_{(3,3)} & s_{(4,1)} + s_{(3,2)} & s_{(4)} + s_{(3,1)} & s_{(3)} \\ s_{(4,4)} & s_{(4,3)} & s_{(4,2)} & s_{(4,2)} & s_{(4,1)} & s_{(4)} \end{bmatrix}.$$

Vemos que en la "frontera" tenemos sólo un polinomios de Schur y conforme nos movemos al "centro" aumenta el número de sumandos.

Sabemos que todas las entradas de $\operatorname{adj}(T_n(a))$ se pueden escribir como polinomios de Schur sesgadas, salvo ciertos coeficientes. En el caso que las entradas pertenezcan a la "frontera" de la matriz $\operatorname{adj}(T_n(a))$, estos polinomios de Schur sesgados se simplifican a polinomios de Schur. Como se ilustra en el ejemplo anterior. El siguiente resultado, el cual es un corolario del Teorema 3.13, nos da una fórmula para las entradas de la primera columna.

Corolario 3.16. Sea a de la forma (3.5) y $n \ge 1$. Entonces para todo r en $\{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,1} = a_n^{n-1} (-1)^{p(n-1)} s_{((n-1)^{p-1}, n-r)}.$$
(3.29)

Demostración. Aplicando (3.25) con s=1 y la identidad $s_{((n-1)^p,n-r)/(n-1)}=s_{((n-1)^{p-1},n-r)}$. Alternativamente, usando (3.24) con s=1 y la operación giro *.

3.5. Eigenvectores de matrices de Toeplitz de banda

El punto de partida de esta sección que pretende expresar eigenvectores, es la observación elemental que, para una matriz cuadrada no invertible A,

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n = 0_{n \times n}.$$

Entonces cada columna de la matriz adjunta adj(A) pertenece al espacio nulo de A. Aplicando este razonamiento a A - xI en lugar de A llegamos al siguiente lema, el cual se menciona y usa en [12, Section 2].

Lema 3.17. Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y x un eigenvalor de A. Entonces toda columna v de la matriz $\operatorname{adj}(A - xI_n)$ satisface Av = xv.

En el siguiente teorema presentamos una fórmula simple para los componentes de un eigenvector de $T_n(a)$, suponiendo que el eigenvalor asociado x es conocido, Más precisamente, construimos un vector v en \mathbb{C}^n que satisface $T_n(a)v = xv$. Sin embargo, no hay garantía que vsea distinto de cero.

Teorema 3.18. Sean a de la forma (3.1), $p \ge 1$, $n \ge 1$ y x un eigenvalor de $T_n(a)$. Denotemos por z_1, \ldots, z_w a las raíces de a - x. Entonces el vector $v = [v_r]_{r=1}^n$ con componentes

$$v_r = \mathbf{s}_{((n-1)^{p-1}, n-r)}(z_1, \dots, z_w),$$
 (3.30)

satisface $T_n(a)v = xv$. Si $1 \le p \le w$ y las raíces de a - x son simples, entonces el vector v se puede expresar como combinación lineal de progresiones geométricas con proporciones $1/z_1, \ldots, 1/z_w$ y algunos coeficientes complejos C_1, \ldots, C_w :

$$v_r = \sum_{j=1}^{w} C_j z_j^{n-r+w-p}.$$
 (3.31)

Demostración. Definamos $v \in \mathbb{C}^n$ como la primera columna de adj $(T_n(a-x))$ multiplicada por $(-1)^{p(n-1)}$. Entonces $v_r = s_{((n-1)^{p-1},n-r)}$, usando (3.29) y Lema 3.17, tenemos que $T_n(a) = xv$. Esta parte no sólo es cierta para polinomios de Laurent, sino también para series de Laurent de la forma (3.5).

Ahora supongamos que a es un polinomio de Laurent y a-x tiene w raíces diferentes z_1, \ldots, z_w . Consideremos las matrices

$$B = A_{((n-1)^{p-1}, n-r)}(z_1, \dots, z_w), \qquad D = A_{(n^p)}(z_1, \dots, z_w),$$

es decir,

$$B = \begin{bmatrix} z_1^{n+w-2} & \dots & z_w^{n+w-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n+w-p} & \dots & z_w^{n+w-p} \\ \hline z_1^{n-r+w-p} & \dots & z_w^{n-r+w-p} \\ \hline z_1^{w-p-1} & \dots & z_w^{w-p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline z_1^{0} & \dots & z_w^{0} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} z_1^{n+w-1} & \dots & z_w^{n+w-1} \\ \hline z_1^{n+w-2} & \dots & z_w^{n+w-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline z_1^{n+w-p} & \dots & z_w^{n+w-p} \\ \hline z_1^{w-p-1} & \dots & z_w^{w-p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline z_1^{0} & \dots & z_w^{0} \end{bmatrix}.$$

Después de eliminar la p-ésima fila de B y la primera fila de D (las que están sombreadas), obtenemos la misma submatriz. Por lo tanto el cofactor de la entrada (p, j) en B coincide con el cofactor de la entrada (1, j) en D, salvo por un factor $(-1)^{p-1}$. Denotemos por C_j a este factor dividido pro el polinomio de Vandermonde $V = V(z_1, \ldots, z_w)$:

$$C_j = \frac{(\text{adj } B)_{j,p}}{V} = \frac{(-1)^{p-1} (\text{adj } D)_{j,1}}{V}.$$
(3.32)

La matriz D no depende de r, por lo que el número C_j tampoco depende de r. A continuación presentamos de forma mas explícita a C_j :

$$C_{j} = \frac{(-1)^{p+j}}{V} \begin{bmatrix} z_{1}^{n+w-2} & \dots & z_{r-1}^{n+w-2} & z_{r+1}^{n+w-2} & \dots & z_{w}^{n+w-2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1}^{n+w-p} & \dots & z_{r-1}^{n+w-p} & z_{r+1}^{n+w-p} & \dots & z_{w}^{n+w-p} \\ z_{1}^{w-p-1} & \dots & z_{r-1}^{w-p-1} & z_{r+1}^{w-p-1} & \dots & z_{w}^{w-p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1}^{0} & \dots & z_{r-1}^{0} & z_{r+1}^{0} & \dots & z_{w}^{0} \end{bmatrix}.$$

Aplicando (1.29) representamos el polinomio de Schur $s_{((n-1)^{p-1},n-r)}$ del lado derecho de (3.30) como el cociente de dos determinantes. Expandiendo el numerador por la p-ésima fila, obtenemos

$$v_r = \frac{\det B}{V} = \sum_{j=1}^{w} C_j B_{p,j},$$
(3.33)

que coincide con (3.31).

Nota 3.19. La fórmula (3.31) se puede generalizar al caso cuando algunas de las raíces z_1, \ldots, z_w coinciden.

Notemos que el vector $C = [C_j]_{j=1}^w$, multiplicado por $(-1)^{p-1}$, es la p-ésima columna de la matriz $\operatorname{adj}(D)$. Dado que $\operatorname{det}(D) = 0$, este vector pertenece al espacio nulo de D. En [53], Trench escribe matrices de Toeplitz de forma transpuesta $[a_{k-j}]_{j,k=1}^n$, entonces, en lugar de (3.31) obtuvo una combinación lineal de progresiones geométrica con potencias *crecientes*. Salvo por estas diferencias técnicas, Trench describió al vector C como una solución no trivial del sistema lineal $DC = 0_w$. El resultado obtenido por Trench es un poco más general que (3.31).

Ejemplo 3.20. Si a es de la forma (3.5) con p = 1, entonces la correspondiente matriz de Toeplitz $T_n(a)$ solo tiene un diagonal distinta de cero bajo la diagonal principal, las matrices de este estilo son conocidas como matrices superiores de Hessenberg-Toeplitz. En este caso (3.30) se simplifica como

$$v_r = \mathbf{h}_{n-r} \,. \tag{3.34}$$

Una fórmula análoga de (3.34) para matrices inferiores de Hessenberg-Toeplitz se establece en [7, Teorema 1.1].

Capítulo 4

Matrices de Toeplitz generadas por polinomios de Laurent palíndromos

Muchas investigaciones y aplicaciones involucran matrices de Toeplitz hermitianas, en particular, matrices reales simétricas [32, 11, 12, 8]. En este capítulo nos concentraremos en matrices de Toeplitz de banda simétricas. Estas matrices están generadas por polinomios de Laurent palíndromos:

$$a(t) = \sum_{k=-p}^{p} a_k t^k$$
, con $a_k = a_{-k}$.

Las raíces de este tipo de polinomios son de la forma $x_1, \ldots, x_p, \frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_p}$.

En 1987 Trench [54] estudió los determinantes de este tipo de matrices en términos de polinomios trigonométricos, en 2014 Elouafi [22] expresó sus determinantes en términos de polinomios de Chebyshev de primer, segundo, tercer y cuarto orden.

Presentaremos resultados análogos de los presentados en el Capítulo 3 usando la teoría explicada en el Capítulo 2. Con esto obtenemos la Proposición 4.1 por último relacionamos los resultados de Toeplitz y Elouafi haciendo uso de nuestros resultados como se muestra en las Proposiciones 4.7 y 4.8.

4.1. Menores de matrices de Toeplitz de banda simétricas

El polinomio de Laurent:

$$a(t) = \sum_{k=-p}^{p} a_k t^k$$
, con $a_k = a_{-k}$,

se puede factorizar como

$$a(t) = a_p t^{-p} \prod_{j=1}^{p} \left((t - x_j) \left(t - \frac{1}{x_j} \right) \right).$$
 (4.1)

De la Proposición 2.9, sabemos que existe un polinomio g de grado n tal que a(t) = g(t + 1/t), y denotamos por z_1, \ldots, z_n a los ceros de g:

$$g(u) = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} 2\mathcal{T}_k(u/2) = a_n \prod_{j=1}^n (u - z_j).$$
(4.2)

Notemos que todos los menores de matrices de Toeplitz simétricas se pueden expresar a través de $sz_{\lambda/\mu}$ con cierta partición sesgada λ/μ .

Proposición 4.1. Sea a un polinomio de Laurent palíndromo de la forma (4.1), y z_1, \ldots, z_n los ceros del polinomio g definido por (4.2). Sean $m, r \in \mathbb{N}, r \leq m, \rho_1, \ldots, \rho_r \in \{1, \ldots, m\},$ $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \{1, \ldots, m\},$ tales que $\rho_1 < \cdots < \rho_r$ y $\sigma_1 < \cdots < \sigma_r$. Entonces

$$\det T_m(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{rn+|\rho|+|\sigma|} a_n^r \operatorname{sz}_{(r^n,\operatorname{rev}(\xi-\operatorname{id}_d))/(\operatorname{rev}(\eta-\operatorname{id}_d))}(z_1,\ldots,z_n)$$
(4.3)

$$\det T_m(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{rn+|\rho|+|\sigma|} a_n^r \operatorname{sz}_{(r^n, r^d + \operatorname{id}_d - \eta)/(r^d + \operatorname{id}_d - \xi)}(z_1, \dots, z_n), \tag{4.4}$$

donde
$$d = m - r$$
, $\{\xi_1, \dots, \xi_d\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$, $\{\eta_1, \dots, \eta_d\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$, $\xi_1 < \dots < \xi_d$, $\eta_1 < \dots < \eta_d$.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 3.4, dado un polinomio de Laurent general de la forma

$$a(t) = \sum_{k=-q}^{p} a_k t^k = a_p t^{-q} \prod_{j=1}^{p+q} (t - x_j),$$

el menor det $T_m(a)_{\rho,\sigma}$ se puede expresar como el siguiente polinomio de Schur sesgado evaluado en las variables x_1, \ldots, x_{p+q} :

$$\det T_m(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{nr+|\rho|+|\sigma|} a_p^r \, \mathbf{s}_{(r^n,\operatorname{rev}(\xi-\operatorname{id}_d))/(\operatorname{rev}(\eta-\operatorname{id}_d))}(x_1,\ldots,x_{p+q})$$
(4.5)

$$= (-1)^{nr+|\sigma|+|\rho|} a_p^r s_{(r^n, r^d + id_d - \eta)/(r^d + id_d - \xi)}(x_1, \dots, x_{p+q}).$$
(4.6)

En el caso palíndromo (4.1), usamos la notación sz y obtenemos la fórmula deseada.

En los siguientes tres corolarios, sean a y z_1, \ldots, z_n como en la Proposición 4.1 y $m \in \mathbb{N}$. Estos corolarios son análogos a la Proposición 3.1, el Teorema 3.13 y el Teorema 3.18 respectivamente, por lo que la demostración se obtiene al aplicar polinomios simétricos en el alfabeto simpléctico.

Corolario 4.2. Tenemos que

$$\det T_m(a) = (-1)^{nm} a_n^m \, \operatorname{sz}_{(m^n)}(z).$$

Corolario 4.3. Sean $p, q \in \{1, ..., m\}$. Entonces la (p, q)-ésima entrada de la matriz adjunta $de T_m(a) es$

$$(\operatorname{adj}(T_m(a)))_{p,q} = (-1)^{n(m-1)} a_n^{m-1} \operatorname{sz}_{((m-1)^n, q-1)/(p-1)}(z). \tag{4.7}$$

$$(\operatorname{adj}(T_n(a)))_{p,q} = (-1)^{n(m-1)} a_n^{m-1} \operatorname{sz}_{((m-1)^n, m-p)/(m-q)}. \tag{4.8}$$

$$(\operatorname{adj}(T_n(a)))_{p,q} = (-1)^{n(m-1)} a_n^{m-1} \sum_{k=\max(0,q-p)}^{\min(m-p,q-1)} \operatorname{sz}_{((m-1)^{n-1},m+q-p-1-k,k)}(z).$$

$$(\operatorname{adj}(T_n(a)))_{p,q} = (-1)^{n(m-1)} a_n^{m-1} \left(\operatorname{hz}_{q-p-n}(z) s_{(m^n)}(z)\right)$$

$$(4.9)$$

$$(\operatorname{adj}(T_n(a)))_{p,q} = (-1)^{n(m-1)} a_n^{m-1} \Big(\operatorname{hz}_{q-p-n}(z) s_{(m^n)}(z) \Big)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \operatorname{hz}_{q+k-n}(z) s_{(m^{n-k-1},(m-1)^k,m-p)}(z) \Big). \tag{4.10}$$

Corolario 4.4. Supongamos que det $T_m(a) = 0$. Entonces el vector $v = [v_q]_{q=1}^m$ con componentes

$$v_q = \text{sz}_{((m-1)^{n-1}, m-q)}(z)$$

pertenece al espacio nulo de $T_m(a)$.

Nota 4.5. Dado que las matrices de Toeplitz son persimétricas, es fácil encontrar dos submatrices diferentes en una matriz de Toeplitz grande tales que sus determinantes coincidan. Entonces, para n y m fijos, con m suficientemente grande, la correspondencia $(\rho, \sigma) \mapsto \operatorname{sz}_{\lambda/\mu}^{(n)}$, definida en la Proposicón 4.1, no es inyectiva.

Por otro lado, probaremos que todo polinomio de la forma $sz_{\lambda/\mu}(z)$ se puede escribir como un menor de una matriz de Toeplitz simétrica. Notemos que la partición sesgada λ/μ en (4.3) tiene una forma especial: las primeras entradas de λ coinciden. La idea principal es cancelarlas con las entradas iniciales de μ .

Proposición 4.6. Sean $\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n, \mu \leq \lambda$ y sean z_1, \ldots, z_n números complejos dados por

$$a(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - z_j + t^{-1}),$$

y sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > n + \ell(\lambda)$. Entonces existen $r \leq m, \rho_1, \ldots, \rho_r \in \{1, \ldots, m\}, \sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \{1, \ldots, m\}$ $\{1,\ldots,m\}$, tales que $\rho_1 < \cdots < \rho_r$, $\sigma_1 < \cdots < \sigma_r$ y

$$\det T_m(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{rn+|\rho|+|\sigma|} \operatorname{sz}_{\lambda/\mu}(z_1,\dots,z_n).$$
(4.11)

Demostración. Tomemos $q := \ell(\lambda), d := n + q, r := m - d$,

$$\xi := (\mathrm{id}_n, n^q + \mathrm{id}_q + \mathrm{rev}(\lambda)),$$

$$\eta := (\mathrm{id}_q + \mathrm{rev}(\mu), (m - n - q)^n + \mathrm{id}_n),$$
(4.12)

es decir,

$$\begin{array}{lll} \xi_1 \coloneqq 1, & \eta_1 \coloneqq 1 + \mu_q, \\ & \vdots & & \vdots \\ \xi_n \coloneqq n, & \eta_q \coloneqq q + \mu_1, \\ \xi_{n+1} \coloneqq n + 1 + \lambda_q, & \eta_{q+1} \coloneqq m - n - q + 1, \\ & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n+q} \coloneqq n + q + \lambda_1, & \eta_{q+n} \coloneqq m - q. \end{array}$$

Definamos ρ_1, \ldots, ρ_r como los elementos de $\{1, \ldots, m\} \setminus \{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$, ordenados de forma ascendente y $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ los elementos de $\{1, \ldots, m\} \setminus \{\eta_1, \ldots, \eta_d\}$ ordenados de forma ascendente. Entonces

$$\det T_{m}(a)_{\rho,\sigma} = (-1)^{rn+|\rho|+|\sigma|} \operatorname{sz}_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}}(z_{1}, \dots, z_{n}),$$

$$\operatorname{donde} \lambda^{(1)} = (r^{n}, \operatorname{rev}(\xi - \operatorname{id}_{d})) \text{ y } \mu^{(1)} = (\operatorname{rev}(\eta - \operatorname{id}_{d}))$$

$$\lambda_{1}^{(1)} \coloneqq m - n - q, \qquad \qquad \mu_{1}^{(1)} \coloneqq m - n - q,$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\lambda_{n}^{(1)} \coloneqq m - n - q, \qquad \qquad \mu_{n}^{(1)} \coloneqq m - n - q,$$

$$\lambda_{n+1}^{(1)} \coloneqq \lambda_{1}, \qquad \qquad \mu_{n+1}^{(1)} \coloneqq \mu_{1},$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\lambda_{n+q}^{(1)} \coloneqq \lambda_{q}, \qquad \qquad \mu_{n+q}^{(1)} \coloneqq \mu_{q}.$$

Como $\lambda^{(1)}$ y $\mu^{(1)}$ son iguales en sus primeras componentes, podemos decir que

$$\operatorname{sz}_{\lambda^{(1)}/\mu^{(1)}} = \operatorname{sz}_{\lambda/\mu},$$

y por la Proposición 4.1 obtenemos (4.11).

4.2. Determinantes de matrices de Toeplitz simétricas

El Corolario 4.2 relaciona determinantes de matrices de Toeplitz de banda simétricas con polinomios de Schur correspondientes a particiones rectangulares evaluados en el alfabeto simpléctico. Fórmulas eficientes para estos polinomios fueron halladas independientemente en [54, 35, 22]. Explicaremos estos resultados y su equivalencia. Como antes, escribimos x, x^{-1} y z en lugar de $x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ y z_1, \ldots, z_n , respectivamente.

La siguiente Proposición equivalente a un resultado de Trench [54].

Proposición 4.7.

$$\operatorname{sz}_{(m^n)}(u_1^2 - 2, \dots, u_n^2 - 2) = \frac{\det\left[2\mathcal{T}_{m+2j-1}(u_k/2)\right]_{j,k=1}^n \det\left[\mathcal{U}_{m+2j-2}(u_k/2)\right]_{j,k=1}^n}{\det\left[2\mathcal{T}_{2j-1}(u_k/2)\right]_{j,k=1}^n \det\left[\mathcal{U}_{2j-2}(u_k/2)\right]_{j,k=1}^n}.$$
 (4.13)

Demostración. Para conveniencia del lector, reescribimos la prueba de [54] con nuestra notación. Denotemos el lado izquierdo de (4.13) por L. Usando el cambio de variable $u_j = t_j + t_j^{-1}$. Entonces $u_j^2 - 2 = t_j^2 + t_j^{-2}$, y

$$L = \mathbf{s}_{(m^n)}(t_1^2, \dots, t_n^2, t_1^{-2}, \dots, t_n^{-2}) = \mathbf{s}_{(m^n, 0^n)}(t_1^2, \dots, t_n^2, t_1^{-2}, \dots, t_n^{-2}).$$

Escribimos este polinomio de Schur como cociente de determinantes $(2n) \times (2n)$, dividiéndolos en bloques $n \times n$:

$$L = \frac{\det \left[\frac{\left[t_k^{2(j-1)} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{-2(j-1)} \right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{2(m+n+j-1)} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{-2(m+n+j-1)} \right]_{j,k=1}^n} \right]}{\det \left[\frac{\left[t_k^{2(j-1)} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{-2(j-1)} \right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{-2(j-1)} \right]_{j,k=1}^n} \right]}{\left[t_k^{2(n+j-1)} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{-2(n+j-1)} \right]_{j,k=1}^n} \right]}.$$

$$(4.14)$$

Denotemos por A al numerador de la fracción. Para cada k en $\{1, \ldots, n\}$, dividimos la columna k por t^{m+2n-1} y multiplicamos la columna k+n por t^{m+2n-1} :

$$A = \det \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} t_k^{-m-2n+2j-1} \end{bmatrix}_{j,k=1}^n & \begin{bmatrix} t_k^{m+2n-2j+1} \end{bmatrix}_{j,k=1}^n \\ & \begin{bmatrix} t_k^{m+2j-1} \end{bmatrix}_{j,k=1}^n & \begin{bmatrix} t_k^{-m-2j+1} \end{bmatrix}_{j,k=1}^n \end{bmatrix}.$$

Ahora invertimos el orden de las primeras n filas, es decir, cambiamos j por n+1-j. El signo

de la correspondiente permutación es $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left[\frac{\left[t_k^{-(m+2j-1)} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{m+2j-1} \right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{m+2j-1} \right]_{j,k=1}^n \left[t_k^{-(m+2j-1)} \right]_{j,k=1}^n} \right].$$

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, restamos la fila j de la fila n + j:

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left[\frac{\left[t_k^{-(m+2j-1)}\right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{m+2j-1} - t_k^{-(m+2j-1)}\right]_{j,k=1}^n} \left[t_k^{m+2j-1}\right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{-(m+2j-1)} - t_k^{m+2j-1}\right]_{j,k=1}^n} \right].$$

Para cada k en $\{1, \ldots, p\}$, sumamos la columna n + k a la columna k:

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det \left[\frac{\left[t_k^{m+2j-1} + t_k^{-(m+2j-1)}\right]_{j,k=1}^n}{\left[0\right]_{j,k=1}^n} \frac{\left[t_k^{m+2j-1}\right]_{j,k=1}^n}{\left[t_k^{-(m+2j-1)} - t_k^{m+2j-1}\right]_{j,k=1}^n} \right].$$

La matriz que obtenemos es triangular superior por bloques y su determinante es el producto de determinantes de los bloques superior izquierdo e inferior derecho. De hecho, por (2.1) y (2.2), las entradas de estos bloques se pueden escribir en términos de polinomios de Chebyshev, por lo que el numerador de (4.14) es

$$A = C \det \left[\mathcal{T}_{m+2j-1}(u_k) \right]_{j,k=1}^n \det \left[\mathcal{U}_{m+2j-2}(u_k) \right]_{j,k=1}^n$$

donde

$$C = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n \prod_{k=1}^n (t_k - t_k^{-1}).$$

En el denominador de la fracción en (4.14) aplicamos transformaciones similares, pero con m=0. Después de cancelar el factor C, llegamos a (4.13).

La siguiente Proposición es equivalente al resultado de Elouafi [22]. Explicaremos dos demostraciones de este resultado.

Proposición 4.8.

$$s_{(m^n)}(x, 1/x) = \begin{cases} sp_{((p-1)^n)}(x, 1/x) o_{(p^n)}(x, 1/x), & m = 2p - 1, \\ o_{(p^n)}(x, 1/x, 1) o_{(p^n)}(x, 1/x, -1), & m = 2p, \end{cases}$$
(4.15)

es decir

$$\operatorname{sz}_{(m^n)}(z) = \begin{cases} \operatorname{spz}_{((p-1)^n)}(z) \operatorname{oz}_{(p^n)}(z), & m = 2p - 1, \\ (-1)^{pn} \operatorname{oz}_{(p^n)}^{\operatorname{odd}}(z) \operatorname{oz}_{(p^n)}^{\operatorname{odd}}(-z), & m = 2p. \end{cases}$$
(4.16)

Prueba de la Proposición 4.8 usando la Proposición 4.7. La idea es aplicar (4.13), el cambio de variable $z_k = u_k^2 - 2$ y las fórmulas de duplicación (2.20) y (2.21). Si m = 2p, entonces m+2j-1 = 2(p+j-1)+1, y por (2.20)

$$\det \left[2\mathcal{T}_{m+2j-1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n = \det \left[u_k \mathcal{V}_{p+j-1}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^n u_k \right) \det \left[\mathcal{V}_{p+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n.$$

Similarmente, si m = 2p, entonces por (2.21)

$$\det \left[\mathcal{U}_{m+2j-2}(u_k/2) \right] = \det \left[\mathcal{W}_{p+j-1}(z_k/2) \right]_{j,k=1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det \left[\mathcal{W}_{p+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n.$$

Razonando de la misma manera, pero con 0 en lugar de m, y aplicando la Proposición 2.6, llegamos a

$$\det \left[2\mathcal{T}_{2j-1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^n u_k \right) \text{Vander}(z),$$
$$\det \left[\mathcal{U}_{2j-2}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{Vander}(z).$$

Por (4.13),

$$\operatorname{sz}_{(m^n)}(z) = \frac{\det \left[\mathcal{V}_{p+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n \det \left[\mathcal{W}_{p+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n}{\operatorname{Vander}(z) \operatorname{Vander}(z)}.$$

La prueba para m=2p-1 es similar, pero usa (2.18) y (2.19). Ahora, los numeradores se transforman en

$$\det \left[2\mathcal{T}_{m+2j-1}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \det \left[2\mathcal{T}_{p+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n,$$

$$\det \left[2\mathcal{U}_{m+2j-2}(u_k/2) \right]_{j,k=1}^n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\prod_{k=1}^n z_k \right) \det \left[2\mathcal{U}_{p-1+n-q}(z_k/2) \right]_{q,k=1}^n.$$

Prueba de la Proposición 4.8 siguiendo [22]. Para conveniencia del lector, explicamos la idea de la prueba dada por Elouafi, pero en el lenguaje de polinomios simétricos. Empezamos con la fórmula de Jacobi-Trudi para $sz_{(m^n)}(z)$:

$$\operatorname{sz}_{(m^n)}(z) = \operatorname{det}\left[\operatorname{hz}_{m-j+k}(z)\right]_{j,k=1}^n.$$
 (4.17)

Usando que hz se puede ver como cociente de \mathcal{U} y el Lema 2.7, es posible llegar las siguientes

expansiones de hz:

$$hz_{2p+1-j+k}(z) = \sum_{s=1}^{n} \frac{2\mathcal{T}_{n+p+1-j}(z_s/2)\mathcal{U}_{p+k-1}(z_s/2)}{\Omega_s(z)},$$
(4.18)

$$hz_{2p-j+k}(z) = \sum_{s=1}^{n} \frac{W_{n+p-j}(z_s/2) V_{p+k-1}(z_s/2)}{\Omega_s(z)}.$$
 (4.19)

Aplicando (4.18) en el caso m=2p+1 o (4.19) en el caso m=2p, podemos escribir el determinante de la derecha de (4.17) como producto de determinantes.

Desgraciadamente, la fórmula de Elouafi (4.16) tiene dos casos: m par y m impar. La fórmula de Trench (4.13) tiene otra falla: en lugar de las variables "verdaderas" z_1, \ldots, z_n , utiliza variables auxiliares u_1, \ldots, u_n tal que $u_j = z_j^2 - 2$.

En [35], Krattenthaler demostró (4.15). Por otro lado Trench y Elouafi no usaron el lenguaje de polinomios simétricos. En [54], Trench trabajó con matrices de Toeplitz simétricas generadas por funciones racionales. Para el caso de matrices de Toeplitz simétricas, su resultado es equivalente a (4.13), después de cambios de variables trigonométricas. En [22] Elouafi trabajó con determinantes de matrices de Toeplitz de banda simétricas; su resultado es equivalente a (4.16), con el lado derecho escrito en forma bialternante, vease el Teorema 2.34.

Recientemente Ayyer y Behrend [4, fórmulas (18) y (19)] generalizaron (4.15) a particiones de la forma

$$(2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_1 + \lambda_n, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_1)$$

O

$$(2\lambda_1+1,\lambda_1+\lambda_2+1,\ldots,\lambda_1+\lambda_n+1,\lambda_1-\lambda_n,\ldots,\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1-\lambda_1).$$

Notemos que la demostración presentada en [4] usa la mismas ideas de la demostración en [54]: ambas empiezan con fórmulas bialternantes para $s_{(m^n)}(x, 1/x)$, aplican transformaciones elementales en los determinantes y los reducen a una forma triangular por bloques.

Capítulo 5

Ejemplos

En este Capítulo presentamos ejemplos que muestran las ventajas de usar las fórmulas expuestas en la presente tesis.

5.1. Inversas aproximadas para matrices de Toeplitz tridiagonales grandes.

Consideremos las matrices de Toeplitz tridiagonales generadas por polinomios de Laurent de la forma

$$a(t) = a_1 t^{-1} (t - x_1)(t - x_2).$$

Calcularemos sus inversas usando las fórmulas (3.7) y (3.24). A partir de la matriz inversa construiremos una matriz aproximadamente inversa, la cuál resulta más cómoda para aplicaciones teóricas.

Proposición 5.1. Sea a(t) un polinomio de Laurent de la forma (5.1). Supongamos que $T_n(a)$ es invertible, entonces

$$(T_n(a))_{r,s}^{-1} = \begin{cases} -\frac{1}{a_1} \frac{(x_1^{n-r+1} - x_2^{n-r+1})(x_1^s - x_2^s)}{(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})} & si \ r \ge s, \\ -\frac{1}{a_1} \frac{x_1^{n+1}x_2^{s-r} - x_1^{n-r+1}x_2^s - x_1^s x_2^{n-r+1} + x_1^{s-r}x_2^{n+1}}{(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})} & si \ r < s. \end{cases}$$
 (5.1)

Demostración. Podemos calcular, por medio de la fórmula (3.7), el determinante de la matriz de Toeplitz $T_n(a)$ tridiagonal:

$$\det(T_n(a)) = (-1)^n a_1^n s_{(n)}(x_1, x_2) = (-1)^n a_1^n h_n(x_1, x_2) = (-1)^n a_1^n \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}.$$
 (5.2)

Recordando (3.24), las entradas generales de la matriz adjunta están dadas por

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{n-1} a_1^{n-1} s_{(n-1,s-1)/(r-1)}(x_1, x_2).$$

Para calcular el polinomio de Schur sesgado del lado derecho usaremos la fórmula de Jacobi—Trudi, a continuación presentamos los grados correspondientes a los polinomios h para este caso.

Las entradas de la matriz adjunta son:

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \begin{vmatrix} h_{n-r}(x_1, x_2) & h_n(x_1, x_2) \\ h_{s-r-1}(x_1, x_2) & h_{s-1}(x_1, x_2) \end{vmatrix}.$$
 (5.3)

Veamos el primer caso, es decir, si $r \geq s$:

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \begin{vmatrix} h_{n-r}(x_1, x_2) & h_n(x_1, x_2) \\ h_{s-r-1}(x_1, x_2) & h_{s-1}(x_1, x_2) \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{n-1} a_1^{n-1} h_{n-r}(x_1, x_2) h_{s-1}(x_1, x_2)$$
$$= (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \frac{(x_1^{n-r+1} - x_2^{n-r+1})(x_1^s - x_2^s)}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Aplicando esto y dividiendo por (5.2)

$$T_n^{-1}(a)_{r,s} = -\frac{1}{a_1} \frac{(x_1^{n-r+1} - x_2^{n-r+1})(x_1^s - x_2^s)}{(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})}.$$

Consideremos ahora el segundo caso, si r < s:

$$\operatorname{adj}(T_n(a))_{r,s} = (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \begin{bmatrix} h_{n-r}(x_1, x_2) & h_n(x_1, x_2) \\ h_{s-r-1}(x_1, x_2) & h_{s-1}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \left(h_{n-r}(x_1, x_2) h_{s-1}(x_1, x_2) - h_{s-r-1}(x_1, x_2) h_n(x_1, x_2) \right)$$

$$= (-1)^{n-1} a_1^{n-1} \frac{(x_1^{n-r+1} - x_2^{n-r+1})(x_1^s - x_2^s) - (x_1^{s-r} - x_2^{s-r})(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Dividiendo por (5.2) y simplificando el numerador

$$T_n^{-1}(a)_{r,s} = -\frac{1}{a_1} \frac{(x_1^{n-r+1} - x_2^{n-r+1})(x_1^s - x_2^s) - (x_1^{s-r} - x_2^{s-r})(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})}$$

$$= -\frac{1}{a_1} \frac{x_1^{n+1}x_2^{s-r} - x_1^{n-r+1}x_2^s - x_1^sx_2^{n-r+1} + x_1^{s-r}x_2^{n+1}}{(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})}.$$

Corolario 5.2. Consideremos ahora el caso cuando las raíces satisfacen la condición $|x_1| < 1 < |x_2|$. Entonces la matriz $T_n(a)$ es invertible, y sus elementos son

$$(T_n(a))_{r,s}^{-1} = \begin{cases} -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^s - q^{n-r+1} + q^{n+1-r+s}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} & si \ r \ge s, \\ -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{x_1^{s-r}(1 - q^r - q^{n+1-s+r} - q^{n+1-s})}{(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} & si \ r < s. \end{cases}$$
 (5.4)

donde $q = x_1/x_2$.

Demostración. De las condiciones de las raíces y (5.2), se puede ver que $\det(T_n(a)) \neq 0$, por lo que es invertible. Partimos de las fórmulas (5.1). Primero, para el caso $r \geq s$, factorizamos $x_2^{n+1+s-r}$ del numerador y x_2^{n+1} del denominador. Entonces

$$T_n^{-1}(a)_{r,s} = -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{(1 - q^{n-r+1})(1 - q^s)}{x_2^{r-s}(x_1 - x_2)(x_1^{n+1} - x_2^{n+1})} = -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^s - q^{n-r+1} + q^{n+1-r+s}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})}.$$

Para el caso r < s, factorizamos $x_1^{s-r}x_2^{n+1}$ del numerador y x_2^{n+1} del denominador. Entonces

$$T_n^{-1}(a)_{r,s} = -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{x_1^{s-r} \left(1 - q^r + q^{n+1-s+r} - q^{n+1-s}\right)}{(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})}.$$

Del previo corolario, omitiendo los términos "pequeños", podemos construir la matriz "aproximadamente inversa":

$$S_n(a)_{r,s} = \begin{cases} -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1 - q^s - q^{n-r+1}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)} & \text{si } r \ge s, \\ -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{x_1^{s-r}(1 - q^{n+1-s} - q^r)}{(x_2 - x_1)} & \text{si } r < s. \end{cases}$$

Observación 5.3. Es posible mostrar que nuestra fórmula coincide con la fórmula propuesta por Widom [56].

Veamos cotas para la diferencia de la matriz aproximadamente inversa y la matriz inversa.

Proposición 5.4. Sea a(t) de la forma (5.1), con la condición $|x_1| < 1 < |x_2|$ y sea n suficien-

temente grande tal que $q^{n+1} < 1/2$. Entonces

$$|S_n(a)_{r,s} - T_n^{-1}(a)_{r,s}| \le \begin{cases} C \frac{|x_1|^{n+1-r+s}}{|x_2|^{n+1}} & \text{si } r \ge s, \\ C \frac{|x_1|^{n+1}}{|x_2|^{n+1-r+s}} & \text{si } r < s, \end{cases}$$

donde
$$C = \frac{8}{|a_1(x_2 - x_1)|}$$
.

Demostración. Empecemos con el caso $r \geq s$, considerando las entradas r, s de $T_n^{-1}(a)$ y $S_n(a)$, tenemos

$$|S_n(a)_{r,s} - T_n^{-1}(a)_{r,s}| = \left| -\frac{1}{a_1} \left(\frac{1 - q^s - q^{n-r+1} + q^{n+1-r+s}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} - \frac{1 - q^s - q^{n-r+1}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{a_1} \left(\frac{1 - q^s - q^{n-r+1} + q^{n+1-r+s} - (1 - q^{n+1})(1 - q^s - q^{n-r+1})}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{a_1} \left(\frac{q^{n+1-r+s} + q^{n+1}(1 - q^s - q^{n-r+1})}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{a_1} \left(\frac{q^{n+1-r+s}(1 + q^{r-s} - q^r - q^{n+1-s})}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)(1 - q^{n+1})} \right) \right|.$$

Recordando que tomamos n suficientemente grande tal que $q^{n+1} < \frac{1}{2}$ y que $q^m < 1$, para toda m > 0:

$$|S_n(a)_{r,s} - T_n^{-1}(a)_{r,s}| \le \left| -\frac{1}{a_1} \left(\frac{4q^{n+1-r+s}}{x_2^{r-s}(x_2 - x_1)\frac{1}{2}} \right) \right| = \left| -\frac{8}{a_1(x_2 - x_1)} \cdot \frac{q^{n+1-r+s}}{x_2^{r-s}} \right|$$

$$= \left| -\frac{8}{a_1(x_2 - x_1)} \right| \cdot \frac{\left| x_1^{n+1-r+s} \right|}{\left| x_2^{n+1} \right|}$$

Ahora consideremos el caso r < s

$$|S_{n}(a)_{r,s} - T_{n}^{-1}(a)_{r,s}| = \left| -\frac{1}{a_{1}} \left(\frac{x_{1}^{s-r} (1 - q^{r} + q^{n+1-s+r} - q^{n+1-s})}{(x_{2} - x_{1})(1 - q^{n+1})} - \frac{x_{1}^{s-r} (1 - q^{n+1-s} - q^{r})}{(x_{2} - x_{1})} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{x_{1}^{s-r}}{a_{1}} \left(\frac{1 - q^{r} + q^{n+1-s+r} - q^{n+1-s} - (1 - q^{n+1})(1 - q^{n+1-s} - q^{r})}{(x_{2} - x_{1})(1 - q^{n+1})} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{x_{1}^{s-r}}{a_{1}} \left(\frac{q^{n+1-s+r} + q^{n+1}(1 - q^{r} - q^{n+1-s})}{(x_{2} - x_{1})(1 - q^{n+1})} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{x_{1}^{s-r}}{a_{1}} \left(\frac{q^{n+1-s+r}(1 + q^{s-r} - q^{s} - q^{n+1-r})}{(x_{2} - x_{1})(1 - q^{n+1})} \right) \right|$$

$$\leq \left| -\frac{x_{1}^{s-r}}{a_{1}} \left(\frac{4q^{n+1-s+r}}{(x_{2} - x_{1})\frac{1}{2}} \right) \right| = \left| -\frac{8}{a_{1}(x_{2} - x_{1})} \left(x_{1}^{s-r} q^{n+1-s+r} \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{8}{a_{1}(x_{2} - x_{1})} \left| \frac{|x_{1}|^{n+1}}{|x_{2}|^{n+1-s+r}} \right|$$

El siguiente programa muestra una comprobación numérica para las cotas. Presentamos las entradas de la matriz inversa y las entradas de la matriz aproximadamente inversa. En este programa hay que tener en cuenta que necesitamos que se cumpla la condición que $q^{n+1} < \frac{1}{2}$ para que se cumpla la desigualdad en las cotas.

```
def inverse_toeplitz_entries(a1, x1, x2, n, r, s):
      a = -1 / a1
      q = x1 / x2
      if r >= s:
          num = 1 - q**s - q**(n-r+1) + q**(n+1-r+s)
          denom = y**(r-s) * (x2-x1) * (1 - q**(n+1))
      else:
          num = x**(s-r) * (1 - q**r - q**(n+1-s+r) - q**(n+1-s))
          denom = (x2-x1) * (1 - q**(n+1))
      return a * num / denom
11
 def inverse_aprox_inverse_entries(a1, x1, x2, n, r, s):
      a = -1 / a1
13
      q = x1 / x2
14
      if r >= s:
          num = 1 - q**s - q**(n-r+1)
          denom = x2**(r-s) * (x2-x1)
17
      else:
18
          num = x1**(s-r) * (1 - q**r - q**(n+1-s))
          denom = x2 - x1
20
```

```
return a * num / denom
22
 def test_cota(a1, x1, x2, n, r, s):
      S = inverse_aprox_inverse_entries(a1, x1, x2, n, r, s)
24
      Ti = inverse_toeplitz_entries(a1, x1, x2, n, r, s)
      if r >= s:
26
          z = abs(x2**(n+1) / x1**(n+1-r+s))
27
      else:
28
          z = abs(x2**(n+1-r+s) / x1**(n+1))
29
      return abs(Ti - S) * abs(a1 * (x2-x1) / 8) * z <= 1
30
31
print (test_cota(1, 1.1, 0.9, 64, 16, 16))
 print(test_cota(1, 1.1, 0.9, 64, 32, 16))
print (test_cota(1, 1.1, 0.9, 64, 8, 32))
```

5.2. Ejemplo pentadiagonal

Este ejemplo está basado en los artículos [9] y [12]. A diferencia de estos, en el presente ejemplo obtenemos fórmula exactas para el polinomio característico antes de llegar a fórmulas asintóticas y explicamos el método del punto fijo que permite calcular valores propios con presición arbitraria. Al omitir los términos que decaen exponencialmente llegamos a fórmulas equivalentes a [12]. El propósito de este ejemplo es ilustrar los resultados del Capítulo 4.

Consideramos el polinomio de Laurent

$$a(t) = t^{-2} - 6t^{-1} + 10 - 6t + t^2 (5.5)$$

y trabajamos con matrices de Toeplitz generadas por este polinomio. Por ejemplo,

$$T_7(a) = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 10 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 10 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 10 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Es útil considerar al símbolo generador en términos como una función trigonométrica, esto lo haremos definiendo $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = a(e^{ix}). (5.6)$$

Haciendo los cálculos y usando identidades de Euler llegamos a

$$g(x) = 8\sin^2\frac{x}{2} + 16\sin^4\frac{x}{2}. (5.7)$$

Es fácil ver que g es par y 2π -periódica, evaluando vemos que $g([0,\pi]) = [0,24]$ y que g'(x) > 0 para cada x en $(0,\pi)$, además g''(0) > 0 y $g''(\pi) < 0$. La función g es de clase "simpleloop" en el sentido del artículo [8].

Por otro lado, para cada λ en [0,24] existe exactamente un punto x en $[0,\pi]$ tal que $g(x)=\lambda$. Denotemos a este punto por $\phi(\lambda)$. La función $\phi \colon [0,24] \to [0,\pi]$ se calcula fácilmente:

$$\phi(\lambda) = 2\arcsin\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\lambda}}}.$$
 (5.8)

Es decir, $g(\phi(\lambda)) = g(x) = \lambda$.

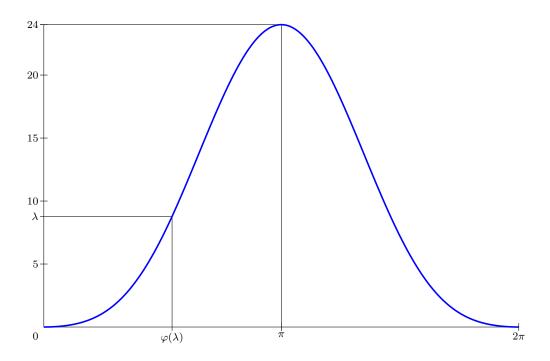


Figura 5.1: La gráfica de la función g en $[0, 2\pi]$.

En el siguiente programa comprobamos de manera numérica la igualdad (5.6), usando la fórmula (5.7).

```
def g(x):
   return 8 * \sin(x / 2) ^ 2 + 16 * \sin(x / 2) ^ 4
 def a(t):
   coefs = [1, -6, 10, -6, 1]
   return sum([coefs[j+2] * t**(j) for j in range(-2,3)])
 def test_a_and_g(x):
   return abs(g(x) - a(exp(i * x)))
print (test_a_and_g(0.3))
 print (test_a_and_g(2.5))
 def tabulate_function(filename, f, x0, x1, n, xscale, yscale):
   data = matrix(RDF, n + 1, 2)
15
   for j in range (n + 1):
16
        x = RDF(x0 + (x1 - x0) * j / n)
17
        data[j, 0] = x * xscale
18
```

```
data[j, 1] = f(x) * yscale
strings = ['%.6f %.6f\n'%(x, y) for x, y in data.rows()]

f = open(filename, 'wt')
f.write(''.join(strings))
f.close()

tabulate_function('gvalues.txt', g, 0, 2 * pi, 200, 1, 1/6)
```

Raíces de $a - \lambda$

Denotemos por $b_{\lambda}(t)$ a

$$b_{\lambda}(t) = a(t) - \lambda = t^{-2} - 6t^{-1} + (10 - \lambda) - 6t + t^{2}$$

$$= t^{-2}(t - x_{1}(\lambda))(t - x_{1}^{-1}(\lambda))(t - x_{2}(\lambda))(t - x_{2}^{-1}(\lambda)).$$
(5.9)

Es fácil ver que $b_{\lambda}(t)$ es el símbolo generador para la matriz $T_n(a-\lambda)$. Más aún como $T_n(a-\lambda)=T_n(a)-\lambda I_n$, entonces $b_{\lambda}(t)$ es el símbolo generador de $T_n(a)-\lambda I_n$.

Al igual que como definimos g(x), podemos evaluar la función $b_{\lambda}(t)$ en e^{ix} , es decir, $b(e^{ix})$ y recordando la definición de ϕ (5.8), podemos obtener dos ceros de la función $b_{\lambda} = a - \lambda$, a saber, $e^{i\phi(\lambda)}$ y $e^{-i\phi(\lambda)}$. Para encontrar otros dos ceros de $b_{\lambda} = a - \lambda$, usamos el cambio de variable $t = e^{y}$. Entonces

$$a(e^y) = -8\sinh^2\frac{y}{2} + 16\sinh^4\frac{y}{2}.$$

Denotemos por $\psi(\lambda)$ a la solución positiva de la ecuación $a(e^y) = \lambda$:

$$\psi(\lambda) = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \lambda}}}{2}.$$
 (5.10)

Las raíces de b_{λ} son

$$x_1(\lambda) = e^{i\phi(\lambda)}, \quad x_3(\lambda) = e^{-i\phi(\lambda)}, \quad x_2(\lambda) = e^{\psi(\lambda)}, \quad x_4(\lambda) = e^{-\psi(\lambda)}.$$

Notemos que $x_3(\lambda) = x_1^{-1}(\lambda)$ y $x_4(\lambda) = x_2^{-1}(\lambda)$.

En el siguiente programa hacemos comprobaciones numéricas de las raíces de $a - \lambda$ usando las ecuaciones (5.8) y (5.10).

```
def phi(la):
    s = sqrt(1 + la)
    return 2 * arcsin(sqrt(la) / (2*sqrt(1 + s)))
4
```

```
5 def psi(la):
   s = sqrt(1 + la)
   return 2 * arcsinh(sqrt(1 + s)/2)
 def azeros(la):
   x = phi(la)
   y = psi(la)
   return [exp(i * x), exp(- i * x), exp(y), exp(- y)]
 def test_zeros(la):
   z = azeros(la)
   ers = [abs(a(z[j]) - la) for j in range(4)]
16
   return max(ers)
17
 def random test zeros():
   la = RDF.random element(0, 24)
   return test_zeros(la)
21
 def big_random_test_zeros(nrep):
   return max(random_test_zeros() for r in range(nrep))
 print (big_random_test_zeros(100))
```

Polinomio característico

Recordemos la fórmula general para el determinante de la matriz de Toeplitz de banda. Widom [55], Baxter y Schmidt[6] y Trench [54] encontraron varias formas equivalentes de esta fórmula, sin usar los polinomios de Schur. Si

$$b(t) = \sum_{k=-q}^{p} b_k t^k = b_p t^{-q} \prod_{k=1}^{p+q} (t - x_k),$$

entonces

$$\det T_m(b) = (-1)^{pn} b_p^m s_{(n^p)}(x_1, \dots, x_{p+q}).$$

En este ejemplo p = q = 2, $a_p = 1$, y por lo tanto $b_p = 1$, y los ceros de b_λ son $x_1(\lambda)$, $x_1^{-1}(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ y $x_2^{-1}(\lambda)$. Haciendo los cambios de variables

$$z_1(\lambda) = x_1(\lambda) + x_1(\lambda)^{-1} = 2\cos(\phi(\lambda)), \quad z_2(\lambda) = x_2(\lambda) + x_2(\lambda)^{-1} = 2\cosh(\psi(\lambda)),$$

obtenemos,

$$\det T_m(a-\lambda) = \operatorname{sz}_{(m,m)}(z_1(\lambda), z_2(\lambda)), \tag{5.11}$$

luego

$$u_1(\lambda) = 2\cos\frac{\phi(\lambda)}{2}, \qquad u_2(\lambda) = 2\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2}.$$

Entonces es fácil ver que

$$z_i(\lambda) = u_i(\lambda)^2 - 2.$$

Por las fórmulas de Trench [54, Teorema 1] se obtiene el siguiente resultado para el polinomio característico.

Proposición 5.5.

$$\det T_m(a-\lambda) = \frac{C_m(\lambda)S_m(\lambda)}{C_0(\lambda)S_0(\lambda)},\tag{5.12}$$

con

$$C_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \cos\frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2} & \cosh\frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2} \\ \cos\frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2} & \cosh\frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} \end{bmatrix},$$

$$S_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \sin\frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2} & \sinh\frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2} \\ \sin\frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2} & \sinh\frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} \end{bmatrix}.$$

Proposición 5.6. Para todo m en \mathbb{N} ,

$$C_m(\lambda) = 2C_m^{(1)}(\lambda)\cos\left(\frac{(m+2)\phi(\lambda) - \vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}\right),\tag{5.13}$$

$$S_m(\lambda) = 2C_m^{(2)}(\lambda)\sin\left(\frac{(m+2)\phi(\lambda) - \vartheta_m^{(2)}(\lambda)}{2}\right),\tag{5.14}$$

donde usamos la siguiente notación:

$$A_m^{(1)}(\lambda) = \cos\frac{\phi(\lambda)}{2}\sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2},\tag{5.15}$$

$$B_m^{(1)}(\lambda) = \sin\frac{\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2},\tag{5.16}$$

$$C_m^{(1)}(\lambda) = \sqrt{A_m^2(\lambda) + B_m^2(\lambda)},$$
 (5.17)

$$\vartheta_m^{(1)}(\lambda) = 2 \arctan\left(\tan\frac{\phi(\lambda)}{2} \coth\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \coth\frac{\psi(\lambda)}{2}\right),\tag{5.18}$$

$$A_m^{(2)}(\lambda) = \cos\frac{\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2},\tag{5.19}$$

$$B_m^{(2)}(\lambda) = \sin\frac{\phi(\lambda)}{2}\sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2},\tag{5.20}$$

$$C_m^{(2)}(\lambda) = \sqrt{A_m^{(2)}(\lambda) + B_m^{(2)}(\lambda)},$$
 (5.21)

$$\vartheta_m^{(2)}(\lambda) = 2 \arctan\left(\tanh\frac{\phi(\lambda)}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\arctan\frac{\psi(\lambda)}{2}\right). \tag{5.22}$$

Demostración. Reduzcamos primero el determinante correspondiente a $\mathcal{C}_m(\lambda)$:

$$C_m(\lambda) = \cos\frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} - \cos\frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2}.$$

Aplicamos identidades para $\cos(\alpha \pm \beta)$ y $\cosh(\alpha \pm \beta)$, para expresar todo en términos de los mismos "angulos":

$$\cos \frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2} = \cos \left(\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} - \frac{\phi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \cos \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos \frac{\phi(\lambda)}{2} + \sin \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\sin \frac{\phi(\lambda)}{2},$$

$$\begin{split} \cosh\frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2} &= \cosh\left(\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} - \frac{\psi(\lambda)}{2}\right) \\ &= \cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2} + \sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2}, \end{split}$$

$$\cos \frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2} = \cos \left(\frac{\phi(\lambda)}{2} + \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \cos \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} \cos \frac{\phi(\lambda)}{2} - \sin \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} \sin \frac{\phi(\lambda)}{2},$$

$$\begin{split} \cosh\frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} &= \cosh\left(\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} + \frac{\psi(\lambda)}{2}\right) \\ &= \cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2} - \sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2}. \end{split}$$

Por lo tanto

$$C_m(\lambda) = 2\cos\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos\frac{\phi(\lambda)}{2}\sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2} + 2\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\sin\frac{\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2} + 2\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} + \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)}\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} + \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)}\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} + \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)}\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}$$

Como el punto $\left(\frac{A_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)}, \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)}\right)$ está en la circunferencia unitaria, entonces existe $\vartheta^{(1)}(\lambda)$ tal que

$$\frac{A_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)} = \cos\frac{\vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}, \qquad \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{C_m^{(1)}(\lambda)} = \sin\frac{\vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}.$$
 (5.23)

Este ángulo $\vartheta_m^{(1)}(\lambda)$ se puede definir mediante (5.18). Usando este ángulo y la identidad para $\cos(\alpha + \beta)$, obtenemos (5.13).

Consideremos ahora el determinante correspondiente a $S(\lambda)$

$$S_m(\lambda) = \sin\frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2} \sinh\frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} - \sinh\frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2} \sin\frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2}.$$

Aplicamos identidades para $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, para expresar todo en términos de los mismos "ángulos".

$$\sin\frac{(m+1)\phi(\lambda)}{2} = \sin\left(\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} - \frac{\phi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos\frac{\phi(\lambda)}{2} - \cos\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\sin\frac{\phi(\lambda)}{2},$$

$$\sinh \frac{(m+3)\psi(\lambda)}{2} = \sinh \left(\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} + \frac{\psi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \sinh \frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \cosh \frac{\psi(\lambda)}{2} + \sinh \frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \cosh \frac{\psi(\lambda)}{2},$$

$$\sinh \frac{(m+1)\psi(\lambda)}{2} = \sinh \left(\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} - \frac{\psi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \sinh \frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \cosh \frac{\psi(\lambda)}{2} - \cosh \frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \sinh \frac{\psi(\lambda)}{2},$$

$$\sin \frac{(m+3)\phi(\lambda)}{2} = \sin \left(\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} + \frac{\phi(\lambda)}{2}\right)$$
$$= \sin \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos \frac{\phi(\lambda)}{2} + \cos \frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\sin \frac{\phi(\lambda)}{2}.$$

Por lo tanto

$$S_{m}(\lambda) = 2\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\cos\frac{\phi(\lambda)}{2}\cosh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\sinh\frac{\psi(\lambda)}{2}$$
$$-2\cos\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\sin\frac{\phi(\lambda)}{2}\sinh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\cosh\frac{\psi(\lambda)}{2}$$
$$= 2C_{m}^{(2)}(\lambda)\left(\frac{A_{m}^{(2)}(\lambda)}{C_{m}^{(2)}(\lambda)}\sin\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2} - \frac{B_{m}^{(2)}(\lambda)}{C_{m}^{(2)}(\lambda)}\cos\frac{(m+2)\phi(\lambda)}{2}\right).$$

Como el punto $\left(\frac{A_m^{(2)}(\lambda)}{C_m^{(2)}(\lambda)}, \frac{B_m^{(2)}(\lambda)}{C_m^{(2)}(\lambda)}\right)$ está en la circunferencia unitaria, existe $\vartheta^{(2)}(\lambda)$ tal que

$$\frac{A_m^{(2)}(\lambda)}{C_m^{(2)}(\lambda)} = \cos\frac{\vartheta_m^{(2)}}{2}, \qquad \frac{B_m^{(2)}(\lambda)}{C_m^{(2)}(\lambda)} = \sin\frac{\vartheta_m^{(2)}}{2}.$$
 (5.24)

El ángulo $\vartheta^{(2)}(\lambda)$ se puede definir mediante (5.22). Usando este ángulo y la identidad para $\sin(\alpha - \beta)$, obtenemos (5.14).

En el siguiente programa mostramos de forma numérica las tres fórmulas que hemos visto para el polinomio característico y comprobamos que los errores relativos entre ellas son de aproximadamente 10^{-12} .

```
def toeplitz1(n):
    a = vector(RDF, n)
    a[0] = 10 - 1a
    a[1] = -6
    a[2] = 1
    b = vector(RDF, n - 1)
    b[0] = -6
    b[1] = 1
    return matrix.toeplitz(a, b)

def charpol1(n, la):
    T = toeplitz1(n)
    Idmatrix = identity_matrix(RDF, n, n)
    return det(la * Idmatrix - T)
```

```
16 def det Ts(n, la):
       x = phi(la)
17
       y = psi(la)
18
       T = matrix(RDF, 2, 2)
19
       T[0, 0] = cos((n + 1) * x / 2)
       T[0, 1] = \cosh((n + 1) * y / 2)
       T[1, 0] = cos((n + 3) * x / 2)
       T[1, 1] = cosh((n + 3) * y / 2)
23
       return det(T)
24
25
  def det_Us(n, la):
26
27
       x = phi(la)
       y = psi(la)
28
       U = matrix(RDF, 2, 2)
       U[0, 0] = \sin((n + 1) * x / 2)
30
       U[0, 1] = sinh((n + 1) * y / 2)
       U[1, 0] = \sin((n + 3) * x / 2)
32
       U[1, 1] = sinh((n + 3) * y / 2)
       return det (U)
34
35
  def charpol2(n, la):
36
       numer = det_Ts(n, la) * det_Us(n, la)
37
       denom = det_Ts(0, la) * det_Us(0, la)
38
       return numer / denom
39
40
  def Cexpr(n, la):
41
       x = phi(la) / 2
42
       y = psi(la) / 2
43
       A = \cos(x) \cdot \sinh((n+2) \cdot y) \cdot \sinh(y)
44
       B = \sin(x) \cdot \cosh((n+2) \cdot y) \cdot \cosh(y)
       C = sqrt(A**2 + B**2)
46
       tht = 2 \times \arctan(\tan(x) \times \coth((n+2) \times y) \times \coth(y))
47
       return 2*C * cos(((n+2)*x/2-tht)/2)
49
  def Sexpr(n, la):
50
       x = phi(la) / 2
51
       y = psi(la) / 2
       A = \cos(x) \cdot \cosh((n+2) \cdot y) \cdot \sinh(y)
       B = \sin(x) * \sinh((n+2) * y) * \cosh(y)
54
       C = sqrt(A**2 + B**2)
55
       tht = 2 \times \arctan(\tan(x) \times \tanh((n+2) \times y) \times \coth(y))
```

```
return 2*C * sin(((n+2)*x-tht)/2)
57
58
  def charpol3(n, la):
      numer = Cexpr(n, la) * Sexpr(n, la)
60
      denom = Cexpr(0, la) * Sexpr(0, la)
      return numer / denom
  # error relativo
  def test_charpol(n,la):
      numer1 = abs(charpol1(n, la) - charpol2(n, la))
66
      numer2 = abs(charpol1(n, la) - charpol3(n, la))
67
      denom = abs(charpol1(n, la))
68
      return max(numer1 / denom, numer2 / denom)
69
  def big_test_charpol(n, mmax):
71
      return max([test_charpol(n, uniform(0,24)) for j in range(mmax)])
```

Solución con el método del punto fijo

Ahora podemos transformar la ecuación característica $\det(T_m(a-\lambda))=0$ en una ecuación más cómoda para resolver. Usamos el cambio de variable $\lambda=g(x)$, con $x\in[0,\pi]$.

Proposición 5.7. La ecuación característica $T_m(a - g(x)) = 0$ es equivalente a la disyunción de las siguiente m ecuaciones:

$$x = \frac{j\pi + \eta_{m,j}(x)}{m+2}, \qquad (j \in \{1, \dots, m\}).$$
 (5.25)

Aqui

$$\eta_m^{(1)}(x) = \vartheta_m^{(1)}(g(x)), \qquad \eta_m^{(2)}(x) = \vartheta_m^{(2)}(g(x)),$$

$$\eta_{m,j}(x) = \begin{cases} \eta_m^{(1)}(x) & \text{si } j \text{ es impar,} \\ \eta_m^{(2)}(x) & \text{si } j \text{ es par.} \end{cases}$$
(5.26)

Demostración. La ecuación det $T_m(a-g(x)) = 0$ es equivalente a que $C_m(g(x)) = 0$ o $S_m(g(x)) = 0$. Recordemos cómo resolver las ecuaciones trigonométricas elementales:

$$\{t \in \mathbb{R} : \cos(t) = 0\} = \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\{t \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(t) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

La ecuación $C_m(g(x)) = 0$, debido a igualdad (5.13), es equivalente a

$$\frac{(m+2)\phi(g(x)) - \vartheta_m^{(1)}(g(x))}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2},$$

esto es,

$$x = \frac{(2k+1)\pi + \eta_m^{(1)}(x)}{m+2}. (5.27)$$

Además de (5.23) tenemos que

$$\tan \frac{\vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2} = \frac{\sin \frac{\vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}}{\cos \frac{\vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}} = \frac{B_m^{(1)}(\lambda)}{A_m^{(1)}(\lambda)},$$

despejando $\vartheta_m^{(1)}(\lambda)$ se obtiene

$$\vartheta_m^{(1)}(\lambda) = 2 \arctan\left(\tan\frac{\phi(\lambda)}{2} \coth\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} \coth\frac{\psi(\lambda)}{2}\right). \tag{5.28}$$

Poniendo $x = \phi(\lambda)$, $\vartheta_m^{(1)}(\lambda) = 2\eta_{m,k}^{(1)}(x)$ y despejando x. En este caso $\eta_{m,k}^{(1)}(x)$ queda como sigue

$$\eta_{m,k}^{(1)}(x) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)$$

Si suponemos que $S_m = 0$, de la igualdad (5.14) tenemos

$$\sin\left(\frac{(m+2)\phi(\lambda) - \vartheta_m^{(2)}}{2}\right) = 0,$$

por lo que

$$\frac{(m+2)\phi(\lambda) - \vartheta_m^{(2)}}{2} = k\pi,$$

De manera análoga, de (5.24) se tiene que

$$\tan\frac{\vartheta_m^{(2)}(\lambda)}{2} = \frac{B_m^{(2)}(\lambda)}{A_m^{(2)}(\lambda)},$$

por lo tanto

$$\vartheta_m^{(2)}(\lambda) = 2 \arctan\left(\tan\frac{\phi(\lambda)}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2}\coth\frac{\psi(\lambda)}{2}\right). \tag{5.29}$$

Poniendo $x = \phi(\lambda), \, \vartheta_m^{(2)}(\lambda) = 2\eta_{m,k}^{(2)}(x)$ y despejando x

$$x = \frac{2k\pi + \eta_m^{(2)}(x)}{m+2}. (5.30)$$

Ahora $\eta_{m,k}^{(2)}(x)$ queda como sigue

$$\eta_m^{(2)}(x) \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \tanh \frac{(m+2)\psi(g(x))}{2} \coth \frac{\psi(g(x))}{2} \right).$$

Podemos observar que la función $\eta_{m,k}(x)$ no toma el mismo valor cuando x=0 y $x=\pi$, en la siguiente gráfica se muestra la función $\eta_{5,0}(x)$ comparándola con la función identidad.

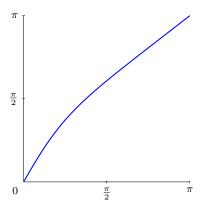


Figura 5.2: $\eta_{5,0}(x)$.

Nuestro objetivo es demostrar que la ecuación (5.25), para cada j en $\{1, \ldots, m\}$, se puede resolver con el método del punto fijo. Veamos unos lemas que nos ayudaran más adelante para ver que la función $\eta_{m,j}$ es contractiva. Usaremos fórmulas explícitas para $\eta_m^{(1)}$ y $\eta_m^{(2)}$:

$$\eta_m^{(1)}(x) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right),\tag{5.31}$$

$$\eta_m^{(2)}(x) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right). \tag{5.32}$$

Lema 5.8. Para cada x en $[0, \pi]$,

$$0 \le g'(x) \le 14.$$

Lema 5.9. Para cada λ en [0, 24]

$$0 \le \phi(\lambda) \le \pi$$
,

$$\phi'(\lambda) = \frac{2\left(\frac{1}{4\sqrt{\lambda}\sqrt{\sqrt{1+\lambda}+1}} - \frac{\sqrt{\lambda}}{8(\sqrt{1+\lambda}+1)^{3/2}\sqrt{1+\lambda}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\sqrt{1+\lambda}+4}}}.$$

Lema 5.10. Para cada λ en [0, 24],

$$\ln(4+\sqrt{15}) \ge \psi(\lambda) \ge \ln(2+\sqrt{3}),$$

$$\frac{1}{20\sqrt{5}} \le \psi'(\lambda) \le \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Demostración.

$$\psi'(\lambda) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4}(\sqrt{1+\lambda}+1)+1}\sqrt{\sqrt{1+\lambda}+1}\sqrt{1+\lambda}}.$$
 (5.33)

Es fácil ver que para λ en [0, 24] el máximo de $\psi'(\lambda)$ se alcanza cuando $\lambda = 0$.

Lema 5.11. Para cada $u \ge \ln(2 + \sqrt{3})$,

$$coth(u) \le \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$|\coth'(u)| \le 1.$$

Demostración. Dado que coth u es una función decreciente, para cada $u \geq \ln(2+\sqrt{3}),$

$$\coth(u) \le \coth(\ln(2+\sqrt{3})) = \frac{2(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Por otro lado la derivada de coth(u) es

$$|\coth'(u)| = \frac{1}{\operatorname{senh}^2(u)},$$

esta es decreciente y para cada $u \ge \ln(2 + \sqrt{3})$ tenemos:

$$|\coth'(u)| \le \frac{1}{\operatorname{senh}^2\left(\ln(2+\sqrt{3})\right)} = \frac{1}{3}.$$

Lema 5.12. Para todo $u \ge \ln(2 + \sqrt{3}),$

$$\frac{(m+2)}{\cosh^2\left(\frac{(m+2)u}{2}\right)} \le \frac{(m+2)}{\sinh^2\left(\frac{(m+2)u}{2}\right)} \le \frac{6}{25}.$$

Demostración. Dado que $\sinh^2 u$ es creciente, entonces

$$\frac{(m+2)}{\sinh^2\left(\frac{(m+2)u}{2}\right)} \le \frac{(m+2)}{\sinh^2\left(\frac{(m+2)\ln(2+\sqrt{3})}{2}\right)}.$$

Entonces tomando m=1, obtenemos

$$\frac{(m+2)}{\sinh^2\left(\frac{(m+2)u}{2}\right)} \le \frac{(3)}{\sinh^2\left(\frac{(3)\ln(2+\sqrt{3})}{2}\right)} = \frac{6}{25}.$$

Lema 5.13. Existe $C_3 > 0$ tal que para cada m en \mathbb{N} y cada x > 0,

$$\left| \left(\tan \frac{x}{2} \tanh \frac{(m+2)\psi(g(x))}{2} \coth \frac{\psi(g(x))}{2} \right)' \right| \le C_3 \left(1 + \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 \right).$$

Demostración. Recordemos que

$$\tan\frac{x}{2} \le \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\frac{x}{2} \right). \tag{5.34}$$

y que la derivada de la tangente se puede ver como

$$\left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right).$$
 (5.35)

Por la regla de la cadena,

$$\left(\tan\frac{x}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)'$$

$$= \left(\tan\frac{x}{2}\right)'\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}$$

$$+ \tan\frac{x}{2}\left(\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\right)'\coth\frac{\psi(g(x))}{2}$$

$$+ \tan\frac{x}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\left(\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)'.$$

Para el primer sumando usamos el Lema 5.11 y el hecho de que $\tanh(u) < 1$, entonces

$$\left(\tan\frac{x}{2}\right)'\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2} \le \left(1 + \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right)$$
 (5.36)

Para el segundo sumando, consideramos la derivada de $\tanh \frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}$ usando la regla de la

cadena, y aplicando los Lemas 5.8, 5.10 y 5.12 podemos ver que

$$\left(\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\right)' < C_1,$$

para los otros dos factores del producto apliquemos el Lema 5.11 y (5.34) para llegar a

$$\tan\frac{x}{2}\left(\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\right)'\coth\frac{\psi(g(x))}{2} \le \frac{C_1}{\sqrt{3}}\left(1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right)$$
(5.37)

Para el tercer sumando consideramos la derivada de coth $\frac{\psi(g(x))}{2}$, pare esto aplicamos los lemas 5.8, 5.10 y 5.11

$$\left(\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)' \le C_2,$$

para acotar todo el sumando usemos que tanh(u) < 1 y la ecuación (5.34), tenemos que

$$\tan\frac{x}{2}\tanh\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2}\left(\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)' \le \frac{C_2}{2}\left(1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right). \tag{5.38}$$

Por último de las ecuaciones (5.36), (5.37) y (5.38) llegamos al resultado deseado.

Lema 5.14. Existe $C_4 > 0$ tal que para cada m en \mathbb{N} y cada x > 0,

$$\frac{1 + \tan(x/2)^2}{1 + C_5 \tan(x/2)^2} < C_4.$$

Proposición 5.15. Existe $C_6 > 0$ tal que para cada m en \mathbb{N} y cada x en $(0, \pi)$,

$$|\eta'_{m,k}(x)| \le C_6. \tag{5.39}$$

Demostración. Los lemas anteriores prueban el resultado para $\eta_m^{(2)}$, y para $\eta_m^{(1)}$ la demostración es similar.

Proposición 5.16. Para m suficientemente grande, la función $f_{m,k}$ es contractiva, con

$$f_{m,k}(x) \coloneqq \frac{k\pi + \eta_{m,k}(x)}{m+2}.$$

Demostración. Se tiene que por (5.14)

$$f'_{m,k}(x) = \frac{\eta'_{m,k}(x)}{m+2} \le \frac{C_6}{m+2},$$

y por el teorema del valor medio se obtiene que

$$|f_{m,k}(x) - f_{m,k}(y)| \le \frac{C_6}{m+2} |x-y|.$$

Notemos que C_6 es una constante. Para $m \geq 2C_6$, se obtiene $\frac{C_6}{m+2} \leq 1/2$, por lo tanto $f_{m,k}$ es contractiva.

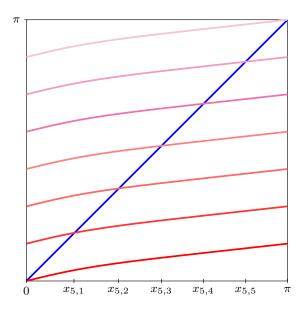


Figura 5.3: $f_{5,j}$ con $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $id_{[0,\pi]}$

Las gráficas anteriores muestran las funciones $f_{5,0}$ y $f_{5,6}$, en la gráfica de la función $f_{5,0}$ se puede observar que existe una única solución con x=0, por otro lado, viendo la forma explicita de la ecuación característica (5.12) podemos ver que x=0 no es solución ya que la ecuación característica resulta un cociente de ceros, por lo tanto, la solución con x=0 es una solución "artificial" ya que en el método de punto fijo trabajamos con $\eta_{m,k}$ en el numerador del cociente sin tomar en cuenta el denominador de (5.12).

En el siguiente programa usamos (5.26) y con el método del punto fijo calculamos valores propios de la matriz, por último calculamos los errores de las diferencias entre los valor propios obtenidos con métodos propios de SageMath y los valores propios obtenidos con el método del punto fijo.

```
def eta(m, j, x):
    y = psi(g(x))
    q = (m + 2) * y / 2
    tt = 1.0 if q > 100.0 else (tanh(q) if mod(j, 2) == 0 else coth(q))
    return 2 * arctan(tan(x / 2) * tt * coth(y / 2))
```

```
def eigenvalue_with_fixed_point(m, j):
    x = RDF(j * pi / (m + 2))
    eps = RDF.epsilon() * 4
    err = 2 * eps
    s = 0
    while (err > eps) and (s < 100):
12
        x_prev = x
13
        x = RDF((j * pi + eta(m, j, x)) / (m + 2))
14
        err = abs(x - x_prev)
        s += 1
    return g(x)
17
18
19 def eigenvalues_with_fixed_point(m):
    lambdas = [eigenvalue_with_fixed_point(m, j) for j in range(1, m + 1)]
20
    return vector(RDF, m, lambdas)
22
23 def mimatriz(m):
    a = vector(RDF, m)
    a[0] = 10
    a[1] = -6
26
    a[2] = 1
   b = vector(RDF, m-1)
28
   b[0] = -6
   b[1] = 1
30
    return matrix.toeplitz(a, b)
31
32
33 def mimatriz_eigenvalues(m):
    lambdas1 = mimatriz(m).eigenvalues()
34
    return vector(RDF, m, sorted(lambdas1))
35
36
 def error_eigenvalues_with_fixed_point(m):
37
    lambdas1 = mimatriz_eigenvalues(m)
    lambdas2 = eigenvalues_with_fixed_point(m)
39
    return norm(lambdas1 - lambdas2)
40
41
42 print (big_test_charpol(16, 10))
43 print (error_eigenvalues_with_fixed_point (100))
```

Fórmulas asintóticas para los valores propios

Denotemos por $\eta(x)$ la siguiente aproximación de $\eta_{m,k}(x)$:

$$\eta(x) = 2 \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right).$$

Proposición 5.17. Para cada x en $[0, \pi]$,

$$\eta'(x) \le C_7. \tag{5.40}$$

Demostración.

$$\eta'(x) = 2 \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)'}{1 + \left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)^2}$$

Calculando el numerados por la regla del producto y por regla de la cadena

$$\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)' = \tan'\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2} + \tan\frac{x}{2}\coth'\frac{\psi(g(x))}{2}.$$

Consideremos el primer sumando y apliquemos el Lema 5.11 y la ecuación (5.35), entonces llegamos a

$$\tan' \frac{x}{2} \coth \frac{\psi(g(x))}{2} \le \frac{C_8}{2} \left(1 + \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 \right),$$

para el segundo sumando de nuevo apliquemos el Lema 5.11 y la ecuación (5.34), llegando ahora a

$$\tan \frac{x}{2} \coth' \frac{\psi(g(x))}{2} \le \frac{1}{2} \left(1 + \left(\tan \frac{x}{2} \right)^2 \right).$$

Es decir que la derivada queda acotada como

$$\left(\tan\frac{x}{2}\coth\frac{\psi(g(x))}{2}\right)' \le C_9\left(1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

Por otro lado si consideramos el termino tan $\frac{x}{2}$ coth $\frac{\psi(g(x))}{2}$, del Lema 5.11 tenemos

$$1 + C_5 \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2$$
.

Entonces

$$\eta' \le \frac{C_8 \left(1 + \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2\right)}{1 + C_5 \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}.$$

Con esto llegamos a (5.40)

Lema 5.18. Para cada x en $(0, \pi)$,

$$|\eta_{m,j}(x) - \eta(x)| \le \frac{8}{\sqrt{3}} \exp(-4).$$

Demostración. Por el Lema (5.10), $\psi(g(x)) \ge \ln(2 + \sqrt{3})$. Luego

$$(m+2)\psi(g(x)) \ge \ln(2+\sqrt{3})(m+2) \ge 4,$$

Si $u \geq 4,$ entonces $1 - \mathrm{e}^{-2u} \geq 1 - \mathrm{e}^{-8} \geq 1/2$ y

$$\coth u - 1 \le \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} - 1 = \frac{2e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = \frac{2e^{-2u}}{1 - e^{-2u}} \le 4e^{-2u},$$

$$\left|\coth\frac{(m+2)\psi(\lambda)}{2} - 1\right| \le 4 \exp(-(m+2)\psi(\lambda)) \le 4\exp(-4).$$

Para abreviar las cuentas pongamos

$$t_1(x) = \tan \frac{x}{2} \coth \frac{\psi(g(x))}{2} \coth \frac{(m+2)\psi(g(x))}{2},$$
$$t_0(x) = \tan \frac{x}{2} \coth \frac{\psi(g(x))}{2}.$$

$$t_1(x) - t_0(x) = \tan\frac{x}{2} \coth\frac{\psi(g(x))}{2} \left(\coth\frac{(m+2)\psi(g(x))}{2} - 1\right)$$
$$\leq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right) \exp(-4).$$

Por el teorema del valor medio, existe un punto ξ entre $t_0(x)$ y $t_1(x)$

$$\eta_{m,j}(x) - \eta(x) = 2 \cdot \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot (t_1(x) - t_0(x)).$$

Como $\xi \ge t_0(x) \ge \tan \frac{x}{2}$,

$$\eta_{m,j}(x) - \eta(x) \le \frac{2}{1 + (t_0(x))^2} \cdot (t_1(x) - t_0(x)) \le \frac{2}{1 + (\tan\frac{x}{2})^2} \cdot (t_1(x) - t_0(x)) \\
\le \frac{8}{\sqrt{3}} \exp(-4).$$

Proposición 5.19. Sea $x_{m,j}$ la solución exacta y $\widetilde{x}_{m,j}$ la solución aproximada. Entonces

$$|x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}| \le \frac{2}{m+2} \exp(-(m+2)\psi(g(\widetilde{x}_{m,j}))) \le \frac{4}{C_6+1} \exp(-4).$$

Demostración. Si $m \geq 2C_6$, entonces

$$|x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}| = \left| \frac{j\pi + \eta_{m,j}(x_{m,j})}{m+2} - \frac{j\pi + \eta(\widetilde{x}_{m,j})}{m+2} \right|$$

$$= \frac{|\eta_{m,j}(x_{m,j}) - \eta(\widetilde{x}_{m,j})|}{m+2}$$

$$\leq \frac{|\eta_{m,j}(x_{m,j}) - \eta_{m,j}(\widetilde{x}_{m,j})| + |\eta_{m,j}(\widetilde{x}_{m,j}) - \eta(\widetilde{x}_{m,j})|}{m+2}$$

$$\leq \frac{C_6}{m+2} |x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}| + \frac{2}{m+2} \exp(-(m+2)\psi(g(\widetilde{x}_{m,j})))$$

$$\leq \frac{1}{2} |x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}| + \frac{2}{C_6 + 1} \exp(-4).$$

Despejando $|x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}|$, se obtiene

$$|x_{m,j} - \widetilde{x}_{m,j}| \le \frac{4}{C_6 + 1} \exp\left(-4\right).$$

Proposición 5.20. Se cumplen las siguientes fórmulas asintóticas.

$$\widehat{x}_{m,j} = \frac{j\pi}{m+2} + \frac{\eta\left(\frac{j\pi}{m+2}\right)}{m+2} + \frac{\eta\left(\frac{j\pi}{m+2}\right)\eta'\left(\frac{j\pi}{m+2}\right)}{(m+2)^2} + O\left(\frac{1}{(m+2)^3}\right),\tag{5.41}$$

$$\widehat{\lambda}_{m,j} = d_0 \left(\frac{j\pi}{m+2} \right) + \frac{d_1 \left(\frac{j\pi}{m+2} \right)}{m+2} + \frac{d_2 \left(\frac{j\pi}{m+2} \right)}{(m+2)^2} + O \left(\frac{1}{(m+2)^3} \right), \tag{5.42}$$

donde

$$d_0(u) = g(u),$$
 $d_1(u) = g'(u)\eta(u),$ $d_2(u) = g'(u)\eta(u)\eta'(u) + \frac{1}{2}g''(u)(\eta(u))^2.$

En el siguiente programa escribimos los valores propios de la Proposición 5.20 y comparamos lo errores con respecto a los valores propios obtenidos previamente con el método del punto fijo.

```
def g_der(x):
    return 8 * sin(x / 2) * (4 * sin(x / 2) ** 2 + 1) * cos(x / 2)

def g_der_der(x):
```

```
return \cos(x / 2) ** 2 * (4 + 48 * \sin(x / 2) ** 2) - 4 * (\sin(x / 2) **
                       2 + 4 * \sin(x / 2) * * 4
 7 def psi_der(la):
           s = sqrt(1 + la)
          denom = 4 * sqrt((1 / 4) * (s + 1) + 1) * sqrt(s + 1) * s
 9
           return 1 / denom
10
11
12 def eta_aprox(x):
          y = psi(q(x))
13
           return 2 * arctan(tan(x / 2) * coth(y / 2))
14
16 def eta_aprox_der(x):
          y = psi(g(x))
17
           der_tan = coth(y / 2) * sec(x / 2) ** 2
18
           der_coth = tan(x / 2) * csch(y / 2) ** 2 * psi_der(g(x)) * g_der(x)
          num = der_tan - der_coth
20
           denom = 1 + coth(y / 2) ** 2 * tan(x / 2) ** 2
21
           return num / denom
23
24 def eigenvalue_aprox(m, j):
           x = RDF(j * pi / (m + 2))
25
           second\_sumand = (g\_der(x) * eta\_aprox(x) / (m + 2)) * (1 + eta\_aprox\_der(x)) * (1 + eta\_aprox_der(x)) * (1 + eta\_aprox_der(x)) * (1 + eta_aprox_der(x)) * (1 + eta_aprox_
26
                    (x) / (m + 2)
          third_sumand = (g_der_der(x) * eta_aprox(x) ** 2) / (2 * (m + 2) ** 2)
27
           return g(x) + second_sumand + third_sumand
2.8
29
30 def eigenvalues_approx(m):
           lambdas = [eigenvalue_aprox(m, j) for j in range(1, m + 1)]
31
           return vector(RDF, m, lambdas)
32
33
34 def error_eigenvalues_approx(m):
           lambdas1 = eigenvalues_with_fixed_point(m)
35
           lambdas2 = eigenvalues_approx(m)
36
           return max([abs(lambdas1[k] - lambdas2[k]) for k in range(len(lambdas1))
37
                    ])
```

Para cada $j=1,\ldots,m$ sea $\omega_{m,j}=|\lambda_{m,j}-\widehat{\lambda}_{m,j}|$ y sea ω_m el correspondiente error maximal $\omega_m:=\max\{\omega_{m,j}\colon 1\leq j\leq m\}.$

Con ayuda del programa anterior calculamos la siguiente tabla de errores.

m	64	128	512	1024	2048	4096
ω_m	5.7×10^{-4}	7.5×10^{-5}	1.2×10^{-6}	1.5×10^{-7}	1.9×10^{-8}	2.4×10^{-9}
$(m+2)^3\omega_m$	164.82	164.14	163.60	163.50	163.46	163.44

Nota 5.21. La siguiente tabla muestra el tiempo de ejecución de los algoritmos previamente presentados para calcular valore propios, usando el método del punto fijo, después aplicando la fórmula asintótica (5.42) y por último con métodos generales para cálculo de valores propios realizados en SageMath (A.eigenvalues ()).

m	2048	4096	8192
Punto fijo	922~ms	$1.36 \ s$	$2.75 \ s$
Fórmula asintótica (5.42)	313~ms	515~ms	$1.05 \ s$
Métodos generales	22 s	$2.53 \ min$	$22.45\ min$

5.3. Otro ejemplo pentadiagonal

Al contrario del ejemplo pasado, en este caso tenemos una matriz de Toeplitz pentadiagonal generada por una función con cuatro intervalos de monotonía. Sin embargo, en este ejemplo llegamos a una fórmula sencilla para el polinomio característico, basados en los trabajos de Trench [54].

Consideramos el polinomio de Laurent

$$a(t) = t^{-2} - 2t^{-1} + 3 - 2t + t^{2}$$
(5.43)

y trabajamos con matrices de Toeplitz generadas por este polinomio. Por ejemplo,

$$T_7(a) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Símbolo generador

Para algunos cálculos es cómodo combinar a(t) con exp

$$g(x) = a(e^{ix}). (5.44)$$

Usando identidades de Euler tenemos

$$g(x) = 1 - 8\sin^2\frac{x}{2} + 16\sin^4\frac{x}{2} = (1 - 2\cos x)^2.$$
 (5.45)

Es fácil ver que g es par y 2π -periódica, la figura 5.4 muestra

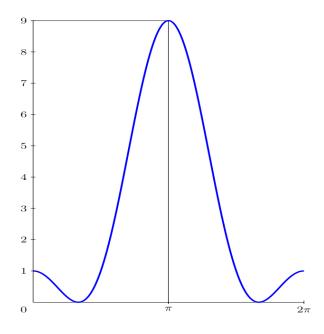


Figura 5.4: La gráfica de la función g en $[0, 2\pi]$.

Notemos que en este caso, para cada $\lambda \in (1,9]$ existe exactamente un punto $x \in (\pi/3,\pi]$ tal que $g(x) = \lambda$. Denotemos a este punto por $\theta_1(\lambda)$. La función $\theta_1 \colon (1,9] \to (\pi/3,\pi]$ se calcula fácilmente:

$$\theta_1(\lambda) = 2\arcsin\frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\lambda}}}.$$
 (5.46)

Es decir $g(\theta_1(\lambda)) = g(x) = \lambda$.

Mientras que para $\lambda \in [0,1]$ existen 2 valores de $x \in [0,\pi/3]$ tales que $g(x) = \lambda$. Llamémosles

 $\theta_1 \ y \ \theta_2$

$$\theta_1(\lambda) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\lambda}}{2}}$$
 (5.47)

$$\theta_2(\lambda) = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-\sqrt{1+\lambda}}{2}}$$
 (5.48)

En el siguiente programa muestra comprobaciones numéricas de las fórmulas (5.43) y (5.45)

```
def g(x):
    return 1 - 8*\sin(x / 2)^2 + 16*\sin(x / 2)^4
  def a(t):
    return (t**(-2)) - 2*(t**(-1)) + 3 - 2*t + (t**2)
 def g2(x):
      return (1 - 2 * cos(x)) * *2
 def test_a_and_g(x):
    return abs(g(x) - a(exp(i*x)))
 def test_a_and_q2(x):
    return abs(g2(x) - a(exp(i*x)))
14
print (test_a_and_g(0.3))
 print(test_a_and_g(2.5))
 print (test_a_and_g2(0.3))
 print (test_a_and_g2(2.5))
 def tabulate_function(filename, f, x0, x1, n):
    data = matrix(RDF, n + 1, 2)
23
    for j in range (n + 1):
24
        x = RDF(x0 + (x1 - x0) * j / n)
25
        data[j, 0] = x
26
        data[j, 1] = f(x)
27
    strings = ['%.6f %.6f n'%(x, y)  for x, y  in data.rows()]
28
    f = open(filename, 'wt')
29
    f.write(''.join(strings))
    f.close()
```

Raíces

Denotemos por $b_{\lambda}(t)$ a

$$b_{\lambda}(t) = a(t) - \lambda = t^{-2} - 2t^{-1} + (3 - \lambda) - 2t + t^{2}$$

$$= t^{-2}(t - x_{1}(\lambda))(t - x_{1}^{-1}(\lambda))(t - x_{2}(\lambda))(t - x_{2}^{-1}(\lambda)).$$
(5.49)

Es fácil ver que $b_{\lambda}(t)$ es el símbolo generador para la matriz $T_m(a-\lambda)$. Más aún como $T_m(a-\lambda) = T_m(a) - \lambda I_m$, entonces $b_{\lambda}(t)$ es el símbolo generador de $T_m(a) - \lambda I_m$.

Al igual que como definimos g(x), podemos evaluar la función $b_{\lambda}(t)$ en e^{ix} , es decir, $b(e^{ix})$, podemos obtener ceros de la función $b_{\lambda} = a - \lambda$.

Para encontrar otros dos ceros de $b_{\lambda}=a-\lambda$, cuando $\lambda\in(1,9]$, usamos el cambio de variable $t=\mathrm{e}^{y}$. Entonces

$$a(e^y) = 1 - 8\sinh^2\frac{y}{2} + 16\sinh^4\frac{y}{2}.$$

Denotemos por $\theta_2(\lambda)$ a la solución positiva de la ecuación $a(e^y) = \lambda$:

$$\theta_2(\lambda) = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \lambda}}}{2}.$$
 (5.50)

Las raíces de b_{λ} , cuando $\lambda \in [0, 9]$ son

$$x_1(\lambda) = e^{i\theta_1(\lambda)}, \quad x_3(\lambda) = e^{-i\theta_1(\lambda)}, \quad x_2(\lambda) = e^{\theta_2(\lambda)}, \quad x_4(\lambda) = e^{-\theta_2(\lambda)}.$$

Notemos que $x_3(\lambda) = x_1^{-1}(\lambda)$ y $x_4(\lambda) = x_2^{-1}(\lambda)$.

```
def phi(la):
    s = sqrt(1+la)
    r = sqrt(la/(4*(s+1)))
    return 2*asin(r)

def psi(la):
    s = sqrt(1+la)
    r = sqrt((1+s)/4)
    return 2*asinh(r)

def thetal(la):
    s = sqrt(1+la)
    r = sqrt((1+s)/2)
    return 2*arcsin(r)

def theta2(la):
```

```
s = sqrt(1+la)
17
      r = sqrt((1-s)/2)
      return 2*arcsin(r)
19
 def myroots(la):
    if la >1:
22
      x = phi(la)
     y = psi(la)
    x = theta1(la)
25
    y = theta2(la)
26
    return [\exp(i*x), \exp(-i*x), \exp(y), \exp(-y)]
27
29 def test1_myroots(la):
    z = myroots(la)
31
    v = map(a, z)
    er = [abs(N(w-la)) for w in v]
    return max(er)
33
 def big_test_roots1(mmax):
    return max([test1_myroots(uniform(0,24)) for j in range(mmax)])
36
 def test2_myroots(la):
    z = myroots(la)
39
    c = [0] *5
40
    c[0] = 1
41
    c[1] = -(z[0]+z[1]+z[2]+z[3])
49
    c[2] = z[0]*z[1]+z[0]*z[2]+z[0]*z[3]+z[1]*z[2]+z[1]*z[3]+z[2]*z[3]
43
    c[3] = -(z[0]*z[1]*z[2]+z[0]*z[1]*z[3]+z[0]*z[2]*z[3]+z[1]*z[2]*z[3])
44
    c[4] = z[0] * z[1] * z[2] * z[3]
45
    d = [1, -2, 3-1a, -2, 1]
46
    er = [abs(N(c[j]-d[j])) for j in range(5)]
47
    return max(er)
48
50 def random_test_zeros():
    la = RDF.random_element(0, 9)
51
    return test1_myroots(la)
 def big_random_test_zeros(nrep):
    return max(random_test_zeros() for r in range(nrep))
print (big_random_test_zeros(100))
```

Polinomio característico

Separaremos los casos como hasta ahora, para $\lambda \in (1, 9]$. Los ceros de b_{λ} son $x_1(\lambda)$, $x_1^{-1}(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ y $x_2^{-1}(\lambda)$. Haciendo los cambios de variables

$$z_1(\lambda) = x_1(\lambda) + x_1(\lambda)^{-1} = 2\cos(\theta_1(\lambda)), \quad z_2(\lambda) = x_2(\lambda) + x_2(\lambda)^{-1} = 2\cosh(\theta_2(\lambda)),$$

obtenemos,

$$\det T_m(a-\lambda) = \operatorname{sz}_{(m,m)}(z_1(\lambda), z_2(\lambda)), \tag{5.51}$$

luego

$$u_1(\lambda) = 2\cos\frac{\theta_1(\lambda)}{2}, \qquad u_2(\lambda) = 2\cosh\frac{\theta_2(\lambda)}{2}.$$

Entonces es fácil ver que

$$z_j(\lambda) = u_j(\lambda)^2 - 2.$$

Por las fórmulas de Trench se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.22. Para todo $m \ge 0$ y $\lambda \in (1, 9]$,

$$\det T_m(a-\lambda) = \frac{C_m(\lambda)S_m(\lambda)}{C_0(\lambda)S_0(\lambda)},\tag{5.52}$$

con

$$C_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \cos\frac{(m+1)\theta_1(\lambda)}{2} & \cosh\frac{(m+1)\theta_2(\lambda)}{2} \\ \cos\frac{(m+3)\theta_1(\lambda)}{2} & \cosh\frac{(m+3)\theta_2(\lambda)}{2} \end{bmatrix},$$

$$S_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \sin\frac{(m+1)\theta_1(\lambda)}{2} & \sinh\frac{(m+1)\theta_2(\lambda)}{2} \\ \sin\frac{(m+3)\theta_1(\lambda)}{2} & \sinh\frac{(m+3)\theta_2(\lambda)}{2} \end{bmatrix}.$$

De manera similar a la Proposición 5.6, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.23. Para todo m en \mathbb{N} , $y \lambda \in (1, 9]$

$$C_m(\lambda) = 2C_m^{(1)}(\lambda)\cos\left(\frac{(m+2)\theta_1(\lambda) - \vartheta_m^{(1)}(\lambda)}{2}\right),\tag{5.53}$$

$$S_m(\lambda) = 2C_m^{(2)}(\lambda)\sin\left(\frac{(m+2)\theta_1(\lambda) - \vartheta_m^{(2)}(\lambda)}{2}\right). \tag{5.54}$$

Ahora para $\lambda \in [0,1]$, podemos tomar las 4 raíces de (5.47) y (5.48) Los ceros de b_{λ} son $x_1(\lambda), x_1^{-1}(\lambda), x_2(\lambda)$ y $x_2^{-1}(\lambda)$. Haciendo los cambios de variables

$$z_1(\lambda) = x_1(\lambda) + x_1(\lambda)^{-1} = 2\cos(\theta_1(\lambda)), \quad z_2(\lambda) = x_2(\lambda) + x_2(\lambda)^{-1} = 2\cos(\theta_2(\lambda)),$$

obtenemos,

$$\det T_m(a-\lambda) = \operatorname{sz}_{(m,m)}(z_1(\lambda), z_2(\lambda)), \tag{5.55}$$

luego

$$u_1(\lambda) = 2\cos\frac{\theta_1(\lambda)}{2}, \qquad u_2(\lambda) = 2\cos\frac{\theta_2(\lambda)}{2}.$$

Entonces es fácil ver que

$$z_i(\lambda) = u_i(\lambda)^2 - 2.$$

Por las fórmulas de Trench se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 5.24. Para todo $m \ge 0$ y $\lambda \in [0, 1]$

$$\det T_m(a-\lambda) = \frac{C_m(\lambda)S_m(\lambda)}{C_0(\lambda)S_0(\lambda)},$$
(5.56)

con

$$C_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \cos\frac{(m+1)\theta_1(\lambda)}{2} & \cos\frac{(m+1)\theta_2(\lambda)}{2} \\ \cos\frac{(m+3)\theta_1(\lambda)}{2} & \cos\frac{(m+3)\theta_2(\lambda)}{2} \end{bmatrix},$$

$$S_m(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \sin\frac{(m+1)\theta_1(\lambda)}{2} & \sin\frac{(m+1)\theta_2(\lambda)}{2} \\ \sin\frac{(m+3)\theta_1(\lambda)}{2} & \sin\frac{(m+3)\theta_2(\lambda)}{2} \end{bmatrix}.$$

El siguiente programa compara el polinomio característico mediante el método estándar y las fórmulas antes dadas.

```
def phi(la):
    s = sqrt(1+la)
    r = sqrt(la/(4*(s+1)))
    return 2*asin(r)

def psi(la):
    s = sqrt(1+la)
    r = sqrt((1+s)/4)
    return 2*asinh(r)

def thetal(la):
    s = sqrt(1+la)
```

```
r = sqrt((1+s)/2)
13
      return 2*arcsin(r)
  def theta2(la):
      s = sqrt(1+la)
      r = sqrt((1-s)/2)
18
      return 2*arcsin(r)
19
20
 def myroots(la):
21
    if la >1:
22
      x = phi(la)
23
      y = psi(la)
24
    x = theta1(la)
    y = theta2(la)
26
    return [\exp(i*x), \exp(-i*x), \exp(y), \exp(-y)]
27
29 def test1_myroots(la):
    z = myroots(la)
30
    v = map(a, z)
31
    er = [abs(N(w-la)) for w in v]
32
    return max(er)
33
 def big test roots1(mmax):
35
    return max([test1_myroots(uniform(0,24)) for j in range(mmax)])
36
37
38 def test2_myroots(la):
    z = myroots(la)
39
    c = [0] *5
40
    c[0] = 1
41
    c[1] = -(z[0]+z[1]+z[2]+z[3])
42
    c[2] = z[0]*z[1]+z[0]*z[2]+z[0]*z[3]+z[1]*z[2]+z[1]*z[3]+z[2]*z[3]
43
    c[3] = -(z[0]*z[1]*z[2]+z[0]*z[1]*z[3]+z[0]*z[2]*z[3]+z[1]*z[2]*z[3])
44
    c[4] = z[0]*z[1]*z[2]*z[3]
    d = [1, -2, 3-1a, -2, 1]
46
    er = [abs(N(c[j]-d[j])) for j in range(5)]
47
    return max(er)
48
49
50 def random_test_zeros():
    la = RDF.random_element(0, 9)
51
    return test1_myroots(la)
52
53
```

```
def big_random_test_zeros(nrep):
    return max(random_test_zeros() for r in range(nrep))

print(big_random_test_zeros(100))
```

Conclusiones

Aunque las matrices de Toeplitz de banda han sido ampliamente estudiadas y hay resultados clásicos para calcular sus determinantes, menores, valores y vectores propios, ninguna de estas fórmulas clásicas estaba escrita en términos de polinomios simétricos. Los trabajos de Bump y Diaconis [17], Lascoux [38] y Tracy y Widom [51] hicieron latente la relación entre menores de Toeplitz de banda y polinomios de Schur. Los dos primeros usaron la fórmula de Jacobi-Trudi para expresar ciertos menores como polinomios simétricos homogéneos (aunque sin llamarlos así), el segundo expresó polinomios de Schur sesgados como menores de ciertas matrices de Toepliz. Los últimos observaron que el menor localizado en la primera columna de la matriz de Toeplitz triangular se puede escribir como polinomios de Schur.

Este trabajo pone de manifiesto la estrecha relación entre algunos polinomios simétricos y matrices de Toeplitz de banda:

- Con ayuda de las fórmulas de Vieta pudimos ver matrices de Toeplitz generadas por polinomios de Laurent como matrices cuyas entradas son polinomios simétricos elementales.
- Con las fórmulas de Jacobi-Trudi los determinantes se escriben como un polinomio de Schur.
- El poder escribir matrices de Toeplitz como matrices cuyas entradas son polinomios elementales nos ayudó a expresar menores de Toeplitz de banda como polinomios de Schur sesgados asociados a ciertas particiones sesgadas que se expresan explícitamente en términos de los índices de filas y columnas eliminadas.
- La ventaja teórica y algorítmica de estas fórmulas es que su complejidad computacional no depende del orden de la matriz de Toeplitz (el cual puede ser muy grande), solamente de la estructura de la banda y de la cantidad de filas y columnas eliminadas.
- Como aplicación directa de las fórmulas para los menores podemos escribir las entradas de la matriz adjunta en forma sencilla usando polinomios de Schur sesgados. De esta forma, si la matriz es invertible, tenemos fórmulas para las entradas de la inversa. Por otro lado, si la matriz no es invertible, tenemos fórmulas, usando las obtenidas para la matriz adjunta, para vectores propios de la matriz de Toeplitz de banda.

- El caso particular de matrices de Toeplitz simétricas de banda, las cuales se generan con polinomios de Laurent palíndromos, nos llevó a estudiar polinomios simétricos evaluados en el alfabeto simpléctico. Pudimos describir estas familias de polinomios en términos de variables tipo "Dickson-Zhukovsky" al relacionarlas con polinomios de Chebyshev para escribirlos de forma bialternante.
- El estudio de los polinomios simétricos evaluados en el alfabeto simpléctico nos permitió obtener resultados para el caso de matrices de Toeplitz de banda simétricas. El hecho de ser simétricas hace que estas fórmulas sean un poco mas sencillas que en el caso general. Por ejemplo en las fórmulas bialternantes el tamaño del determinante se reduce a la mitad, y en otras fórmulas se reduce a la mitad el número de variables.

Finalmente, presentamos algunas líneas de trabajo a futuro que permiten darle continuidad a esta investigación:

- Las fórmulas presentadas en este trabajo se pueden expresar de forma concisa y son útiles para cálculos numéricos y ayudan a relacionar resultados conocidos. Sin embargo al ser combinatorias, no siempre son cómodas para el análisis teórico del comportamiento asintótico de valores y vectores propios. Por lo tanto, una tarea natural es encontrar fórmulas aproximadas más sencillas que nos ayuden a entender el comportamiento asintótico.
- Aunque pudimos dar fórmulas bialternantes para varias familias de polinomios simétricos evaluados en el alfabeto simpléctico, no pudimos hacerlo para los polinomios de Schur como lo muestra la Nota 2.43. El problema de existencia de fórmulas semejantes es abierto.
- Day [19] encontró una fórmula complicada para determinantes de matrices de Toeplitz generadas por símbolos racionales. Estudiar la relación de polinomios simétricos con este tipo de matrices podría llevar a fórmulas más sencillas y arrojar más luz sobre estas.
- El ejemplo de la Sección 5.2, donde el símbolo generador tiene dos intervalos de monotonía, es relativamente sencillo y bien entendido. Sin embargo, un problema abierto y complicado es entender el comportamiento de valores y vectores propios, cuando el símbolo generador tiene más intervalos de monotonía y, para algunos valores de λ la ecuación $a(t) = \lambda$ tiene 4 ceros en la circunferencia unitaria. Si bien los primeros pasos del análisis del polinomio característico se pueden llevar a cabo como en el ejemplo de la Sección 5.2, el ejemplo presentado en la Sección 5.3 pone en evidencia que éste se complica al separar los términos "lentos" de los "rápidos".

Bibliografía

- [1] Alexandersson, P. (2012): Schur polynomials, banded Toeplitz matrices and Widom's formula. Electron. J. Combin. 19:4, P22, doi:10.37236/2651.
- [2] Alexandersson, P. (2019): The symmetric functions catalog. An overview of symmetric functions and related topics. https://www.math.upenn.edu/~peal/polynomials/polynomialindex.htm
- [3] Alexandersson, P.; González-Serrano, L.A.; Maximenko, E.A.; Moctezuma-Salazar, M.A. (2019): Symmetric polynomials in the symplectic alphabet and their expression via Dickson–Zhukovsky variables. arXiv:1912.12725, https://arxiv.org/abs/1912.12725.
- [4] Ayyer, A.; Behrend, R.E. (2019): Factorization theorems for classical group characters, with applications to alternating sign matrices and plane partitions. J. Comb. Th. A 165, 78–105, doi:10.1016/j.jcta.2019.01.001.
- [5] Barrera, M.; Grudsky, S.M. (2017): Asymptotics of eigenvalues for pentadiagonal symmetric Toeplitz matrices. Oper. Theory Adv. Appl. 259, 51–77, doi:10.1007/978-3-319-49182-0_7.
- [6] Baxter, G.; Schmidt, P. (1961): Determinants of a certain class of non-Hermitian Toeplitz matrices. Math. Scand. 9, 122–128, doi:10.7146/math.scand.a-10630.
- [7] Bogoya, J.M.; Böttcher, A.; Grudsky, S.M.; Maksimenko, E.A. (2012): Eigenvectors of Hessenberg Toeplitz matrices and a problem by Dai, Geary, and Kadanoff. Linear Algebra Appl. 436:9, 3480–3492, doi:10.1016/j.laa.2011.12.012.
- [8] Bogoya, J.M.; Böttcher, A.; Grudsky, S.M.; Maximenko, E.A. (2015): Maximum norm versions of the Szegő and Avram-Parter theorems for Toeplitz matrices. J. Approx. Theory 196, 79–100, doi:10.1016/j.jat.2015.03.003.
- [9] Bogoya, J.M.; Böttcher, A.; Grudsky, S.M.; Maximenko, E.A. (2016): Eigenvectors of Hermitian Toeplitz matrices with smooth simple-loop symbols. Linear Algebra Appl. 493, 606–637, doi:10.1016/j.laa.2015.12.017.

- [10] Borodin, A.; Okounkov, A. (2000): A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants. Integr. Equ. Oper. Theory 37:4, 386–396, doi:10.1007/BF01192827.
- [11] Böttcher, A.; Grudsky, S.M. (2005): Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices. SIAM, Philadelphia, doi:10.1137/1.9780898717853.
- [12] Böttcher, A.; Grudsky, S.M.; Maksimenko, E.A. (2010): On the structure of the eigenvectors of large Hermitian Toeplitz band matrices. Oper. Theory Adv. Appl. 210, 15–36, doi:10.1007/978-3-0346-0548-9 2.
- [13] Böttcher, A.; Fukshansky, L.; Garcia, S.R.; Maharaj, H. (2015): Toeplitz determinants with perturbations in the corners. J. Funct. Analysis 268:1, 171–193, doi:10.1016/j.jfa.2014.10.023.
- [14] Böttcher, A.; Silbermann, B. (1999): Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices. Springer-Verlag, New York.
- [15] Böttcher, A.; Silbermann, B. (2006): Analysis of Toeplitz Operators, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, doi:10.1007/3-540-32436-4.
- [16] Böttcher, A.; Widom, H. (2006): Szegö via Jacobi, Linear Algebra Appl. 419, 656–667, doi:10.1016/j.laa.2006.06.009.
- [17] Bump, D.; Diaconis, P. (2002): Toeplitz minors. J. Combin. Theory Ser. A 97, 252–271, doi:10.1006/jcta.2001.3214.
- [18] Ciucu, M.; Krattenthaler, C. (2009): A factorization theorem for classical group characters, with applications to plane partitions and rhombus tilings. In: Kotsireas I., Zima E. (eds.) Advances in Combinatorial Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, doi:10.1007/978-3-642-03562-3 3.
- [19] Day, K.M. (1975): Toeplitz matrices generated by the Laurent series expansion of an arbitrary rational function. Trans. Amer. Math. Soc. 206, 224-24, doi:10.2307/1997155.
- [20] Dickson, L.E. (1914): Elementary Theory of Equations. Wiley, New York.
- [21] Deift, P.; Its, A.; Krasovsky, I. (2013): Toeplitz matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the Ising model. Some history and some recent results. Comm. Pure Appl. Math. 66:9, 1360–1438, doi:10.1002/cpa.21467.
- [22] Elouafi, M. (2014): On a relationship between Chebyshev polynomials and Toeplitz determinants. Appl. Math. Comput. 229:1, 27–33, doi:10.1016/j.amc.2013.12.029.

Bibliografía 143

[23] Elouafi, M. (2015): A Widom like formula for some Toeplitz plus Hankel determinants. J. Math. Anal. Appl. 422:1, 240–249, doi:10.1016/j.jmaa.2014.08.043.

- [24] Fulmek, M.; Krattenthaler, C. (1997): Lattice path proofs for determinantal formulas for symplectic and orthogonal characters. J. Combin. Theory, Ser. A 77, 3–50, doi:10.1006/jcta.1996.2711.
- [25] Fulton, W. (1996): Young Tableaux: With Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge, London Mathematical Society Student Texts, doi:10.1017/CBO9780511626241.
- [26] Fulton, W. (1998): Intersection Theory. Springer-Verlag, New York.
- [27] Fulton, W.; Harris, J. (1991): Representation Theory. Springer-Verlag, New York.
- [28] García-García, D.; Tierz, M. (2020): Toeplitz minors and specializations of skew Schur polynomials, J. Comb. Theory Ser. A 172, 105201, doi:10.1016/j.jcta.2019.105201.
- [29] Garoni, C.; Serra-Capizzano, S. (2016): The theory of locally Toeplitz sequences: a review, an extension, and a few representative applications. Bol. Soc. Mat. Mex. 22:2, 529–565, doi:10.1007/s40590-016-0088-8.
- [30] Gemignani, L.; Noferini, V. (2013): The Ehrlich–Aberth method for palindromic matrix polynomials represented in the Dickson basis. Linear Algebra Appl. 438, 1645–1666, doi:10.1016/j.laa.2011.10.035.
- [31] Gessel, I.M. (1990): Symmetric functions and P-recursiveness. J. Combin. Theory Ser. A 53:2, 257–285, doi:10.1016/0097-3165(90)90060-A.
- [32] Grenander, U.; Szegő, G. (1958): Toeplitz Forms and Their Applications. University of California Press, Berkeley, Los Angeles.
- [33] Hamel, A.M. (1997): Determinantal forms for symplectic and orthogonal Schur functions. Can. J. Math. 49(2), 263–282, doi:10.4153/CJM-1997-013-5.
- [34] King, R.C. (1976): Weight multiplicities for the classical groups. In A. Janner, T. Janssen, and M. Boon, editors, Group Theoretical Methods in Physics, volume 50 of Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 490–499, doi:10.1007/3-540-07789-8_51.
- [35] Krattenthaler, C. (1998): Identities for classical group characters of nearly rectangular shape. J. Algebra 209, 1–64, doi:10.1006/jabr.1998.7531.

- [36] Lachaud, G. (2016): On the distribution of the trace in the unitary symplectic group and the distribution of Frobenius. Workshop on Frobenius Distributions on Curves, David Kohel and Igor Shparlinsky, Feb 2014, Marseille, France, pp. 194–231, doi:10.1090/conm/663/13355.
- [37] Lang, S. (2005): Undergraduate Algebra, Springer Science & Business Media, Springes, New York, doi:10.1007/0-387-27475-8.
- [38] Lascoux, A. (2003): Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials. In series: CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 99, co-publication of the AMS and Conference Board of the Mathematical Sciences, Providence, Rhode Island, doi:10.1090/cbms/099.
- [39] Lita da Silva, J. (2018): On one type of generalized Vandermonde determinants. Amer. Math. Monthly 125:5, 433–442, doi:10.1080/00029890.2018.1427393.
- [40] Littlewood, D.E. (1950): The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups. 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford.
- [41] Macdonald, I.G. (1995): Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd ed. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford.
- [42] Mason, J.C.; Handscomb, D. (2003): Chebyshev Polynomials. CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
- [43] Maximenko, E.A.; Moctezuma-Salazar, M.A. (2017): Cofactors and eigenvectors of banded Toeplitz matrices: Trench formulas via skew Schur polynomials. Oper. Matrices 11:4, 1149–1169, doi:10.7153/oam-2017-11-79.
- [44] OEIS Foundation Inc. (2019): The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A123456.
- [45] Okada, S. (1998): Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups. J. Algebra 205:2, 337–367, doi:10.1006/jabr.1997.7408.
- [46] Okada, S. (2020): A bialternant formula for odd symplectic characters and its application. Josai Mathematical Monographs, Vol.12, pp.99–116 doi:10.20566/13447777_12_99.
- [47] Reiner, V.; Shaw, K.M.; Willigenburg, S. van (2007): Coincidences among skew Schur functions. Adv. Math. 216:1, 118–152, doi:10.1016/j.aim.2007.05.006.
- [48] Stanley, R.P. (1999): Enumerative Combinatorics, vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, doi:10.1112/S0024609300227379.

Bibliografía 145

[49] The Sage Developers (2020): SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 7.6.1), http://www.sagemath.org, doi:10.5281/zenodo.28514.

- [50] The Sage-Combinat community (2008): Sage-Combinat: enhancing Sage as a toolbox for computer exploration in algebraic combinatorics, http://combinat.sagemath.org.
- [51] Tracy, C.A.; Widom, H. (2001): On the distributions of the lengths of the longest monotone subsequences in random words. Probab. Theory Relat. Fields 119, 350–380, doi:10.1007/s004400000107.
- [52] Trench, W.F. (1985): Explicit inversion formulas for Toeplitz band matrices. SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods (transformed to SIAM J. Matrix Anal. Appl.) 6:4, 546–554, doi:10.1137/0606054.
- [53] Trench, W.F. (1985): On the eigenvalue problem for Toeplitz band matrices. Linear Algebra Appl. 64, 199–214, doi:10.1016/0024-3795(85)90277-0.
- [54] Trench, W.F. (1987): Characteristic polynomials of symmetric rationally generated Toeplitz matrices. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 21, 289–296, doi:10.1080/03081088708817803.
- [55] Widom, H. (1958): On the eigenvalues of certain Hermitian operators. Trans. Amer. Math. Soc. 88:2, 491–522, doi:10.2307/1993228.
- [56] Widom H. (1976): Asymptotic behaviour of block Toeplitz matrices and determinants. II. Adv. in Math. 21, 1-29 doi:10.1016/0001-8708(74)90072-3.