Polinomios simétricos elementales

Mario Alberto Moctezuma Salazar

ESFM - IPN

Seminario Matrices y Operadores

11 de marzo de 2020

Estas pláticas están basadas en los estudios de polinomios simétricos, hechos en conjunto con: Egor Maximenko, Luis Ángel Serrano, Per Alexandersson, entre otros.

MacDonald (1979): Symmetric Functions and Hall Polynomials.
Stanley (1999): Enumerative Combinatorics, Vol. 2.

Polinomios simétricos

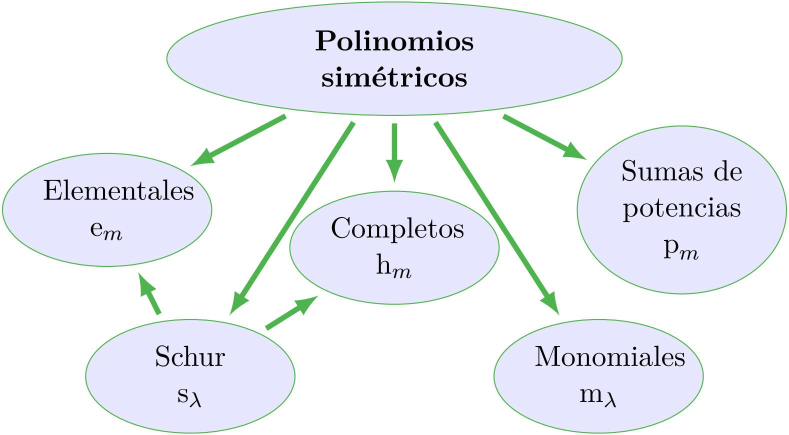
Definición

P se dice que es un polinomio simétrico si para cualquier permutación σ, tenemos que

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Ejemplo

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_3,$$
$$P(x_3, x_2, x_1) = x_3^2 + 2x_3x_2 + x_2^2 + 2x_2x_1 + x_1^2 + 2x_3x_1.$$


Polinomios simétricos
Elementales e_m
Completos h_m
Sumas de potencias p_m
Schur s_λ
Monomiales m_λ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3,\\
\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1,\\
\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3,\\
\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1,\\
\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3,\\
\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.\\
\mathrm{e}_4(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3??.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1,\\
\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3,\\
\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.\\
\mathrm{e}_4(x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1,\\
\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3,\\
\mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\\
\mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.\\
\mathrm{e}_4(x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned}$$

En general, $\mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si $m > n$ o si $m < 0$.

Definición

El polinomio simétrico elemental en n variables $x_1, \ldots, x_n$, de grado $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se define como

$$\mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}.$$

- tuplas $\{(j_1, \ldots, j_m) \colon j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}, j_1 < \cdots < j_m\}$,
- funciones estrictamente crecientes,
- m-subconjuntos del conjunto $\{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Observemos que

$$\mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n\in\{0,1\}} x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}.$$

Elementales por recurrencias

Proposición

$\mathrm{e}_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{e}_{m+1}(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}\,\mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n).$

Podemos dividir al subconjunto

$$\{j_1, \ldots, j_n, j_{m+1} \colon 1 \leq j_1 < \ldots < j_n < j_{m+1} \leq n+1\},$$

en la unión de el subconjunto

$$\{j_1, \ldots, j_n, j_{m+1} \colon 1 \leq j_1 < \ldots < j_n < j_{m+1} \leq n\}$$

y el subconjunto

$$\{j_1, \ldots, j_n, j_{m+1} \colon 1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq n, j_{m+1} = n+1\}.$$

$$\mathrm{e}_0()$$

$$\mathrm{e}_0(x_1) \qquad \mathrm{e}_1(x_1)$$

$$\mathrm{e}_0(x_1, x_2) \qquad \mathrm{e}_1(x_1, x_2) \qquad \mathrm{e}_2(x_1, x_2)$$

$$\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) \qquad \mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) \qquad \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) \qquad \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{e}_0() \arrow[dr] & & & \\
\mathrm{e}_0(x_1) & \mathrm{e}_1(x_1) & & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2) & \mathrm{e}_2(x_1, x_2) & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{e}_0() & & & \\
\mathrm{e}_0(x_1) \arrow[dr] & \mathrm{e}_1(x_1) \arrow[d] & & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2) & \mathrm{e}_2(x_1, x_2) & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{e}_0() & & & \\
\mathrm{e}_0(x_1) & \mathrm{e}_1(x_1) & & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2) \arrow[dr] & \mathrm{e}_2(x_1, x_2) \arrow[d] & \\
\mathrm{e}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{e}_0() \arrow[dr] & & & \\
\mathrm{e}_0(x_1) \arrow[dr] & \mathrm{e}_1(x_1) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathrm{e}_0(x_1,x_2) \arrow[dr] & \mathrm{e}_1(x_1,x_2) \arrow[d] \arrow[dr] & \mathrm{e}_2(x_1,x_2) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{e}_0(x_1,x_2,x_3) & \mathrm{e}_1(x_1,x_2,x_3) & \mathrm{e}_2(x_1,x_2,x_3) & \mathrm{e}_3(x_1,x_2,x_3)
\end{tikzcd}
$$

```
def pol_elems(x):
    v = [1]
    for n in range(1, len(x) + 1):
        vprev = v
        v = [0] * (n+1)
        v[0] = 1
        for m in range(1, n):
            v[m] = vprev[m] + x[n] * vprev[m-1]
        v[n] = x[n] * vprev[n-1]
    return v
```

Por ejemplo `pol_elems([3, 5])` regresa la lista $[1, 8, 15]$.

Fórmula de Vieta para ec. cuadráticas

Dado $p(t) = t^2 + bt + c = (t - x_1)(t - x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} e_0(x_1, x_2) &= 1, \\ e_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 = -b, \\ e_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 = c. \end{aligned}$$

Fórmula de Vieta para ec. cubicas

Dado $p(t) = t^3 + at^2 + bt + c = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)$, entonces

$$
\begin{aligned}
e_0(x_1, x_2, x_3) &= 1, \\
e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\
e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\
e_0(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3 = -c.
\end{aligned}
$$

Fórmula de Vieta

Proposición

Para cualquier lista de variables $x_1, \ldots, x_n$,

$$\prod_{j=1}^{n}(t - x_j) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n)t^j.$$

La demostración es por inducción sobre n.

Para $n = 0$,

$$\prod_{j=1}^{0}(t - x_j) = 1, \quad \sum_{j=0}^{0}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n)t^j = 1.$$

Para $n = 1$,

$$\prod_{j=1}^{1}(t - x_j) = t - x_1, \quad \sum_{j=0}^{1}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n)t^j = -x_1 + t.$$

Supongamos que se cumple para n y demostremos que $n+1$ cumple

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n+1}(t-x_j) &= \left(\prod_{j=1}^{n}(t-x_j)\right)(t-x_{n+1}) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1,\ldots,x_n)t^j\right)(t-x_{n+1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1,\ldots,x_n)t^{j+1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j+1}x_{n+1}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1,\ldots,x_n)t^j.
\end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable en la primer suma y tenemos

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n+1}(t-x_j) &= \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n-j+1}\,\mathrm{e}_{n-j+1}(x_1,\ldots,x_n)t^j \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j+1}x_{n+1}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1,\ldots,x_n)t^j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-1}\,\mathrm{e}_{n+1-j}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})t^j.\end{aligned}$$

Los coeficientes de un polinomio de una variable,
se expresan como polinomios elementales con signos alternantes.

Ejemplos

Sea $P(t) = t^2 - 5t - 17$ y sean x_1, x_2 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^2 + x_2^2$?

$$x_1^2 + x_2^2 =$$

Ejemplos

Sea $P(t) = t^2 - 5t - 17$ y sean x_1, x_2 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^2 + x_2^2$?

$$x_1^2 + x_2^2 = (\mathrm{e}_1(x_1, x_2))^2 - 2\,\mathrm{e}_1(x_1, x_2)$$

Ejemplos

Sea $P(t) = t^2 - 5t - 17$ y sean x_1, x_2 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^2 + x_2^2$?

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (\mathrm{e}_1(x_1, x_2))^2 - 2\,\mathrm{e}_1(x_1, x_2) \\ &= 5^2 - 2(-17) = 59. \end{aligned}$$

Sea $P(t) = t^3 + 2t^2 - 8t - 3$ y sean x_1, x_2, x_3 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3$?

$$x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3$$

Sea $P(t) = t^3 + 2t^2 - 8t - 3$ y sean x_1, x_2, x_3 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3$?

$$\begin{aligned} &x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3 \\ &\quad = \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3)\left(\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3)^2 - \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3)\right) \end{aligned}$$

Sea $P(t) = t^3 + 2t^2 - 8t - 3$ y sean x_1, x_2, x_3 las raíces del polinomio. ¿Cuanto vale $x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3$?

$$\begin{aligned} & x_1^3 x_2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1 x_2 x_3^3 \\ & \quad = \mathrm{e}_3(x_1, x_2, x_3) \left(\mathrm{e}_1(x_1, x_2, x_3)^2 - \mathrm{e}_2(x_1, x_2, x_3) \right) \\ & \quad = (3) \left((-2)^2 - (-8) \right) = 36. \end{aligned}$$

Proposición

$$\sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}_m(x_1, \ldots, x_n) t^m = \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t)$$

La demostración es similar a demostración de la fórmula de Vieta.

Función generadora

La función generadora para la sucesión $(\mathrm{e}_m)_{m=0}^{\infty}$ es

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(t) &\coloneqq \sum_{m\geq 0} \mathrm{e}_m\, t^m = \prod_{i\geq 1}(1+x_i t), \\ &\coloneqq \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}_m(x_1,\ldots,x_n) t^m = \prod_{i=1}^{n}(1+x_i t). \end{aligned}$$

Lema

$$\mathrm{E}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})(t) = (1+x_{n+1}t)\,\mathrm{E}(x_1,\ldots,x_n)(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(x,x_{n+1})(t) &= \sum_{m=0}^{n+1} \mathrm{e}_m(x,x_{n+1})t^m = 1 + \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}_{m+1}(x,x_{n+1})t^{m+1} \\
&= 1 + \sum_{m=0}^{n} \left(\mathrm{e}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{e}_m(x)\right) t^{m+1} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathrm{e}_m(x)t^m + \sum_{m=0}^{n} x_{n+1}\,\mathrm{e}_m(x)t^{m+1} \\
&= \mathrm{E}(x,x_n)(t) + x_{n+1}\,t\,\mathrm{E}(x,x_n)(t).
\end{aligned}$$

SUMAS DE POTENCIAS

Definición

El polinomio suma de potencias en n variables $x_1, \ldots, x_n$, de grado $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se define como

$$\mathrm{p}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j^m = x_1^m + \cdots + x_n^m.$$

Si en la fórmula de Vieta evaluamos t en algún x_k tenemos

$$0 = \prod_{j=1}^{n} (x_k - x_j) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \, \mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n) x_k^j.$$

Si hacemos la suma sobre todos los x_k tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \, \mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n) x_k^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \, \mathrm{e}_{n-j}(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{p}_j(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Identidades de Newton

Proposición

Para $n \geq 1$ y $n \geq k \geq 1$

$$k\,\mathrm{e}_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\,\mathrm{e}_{k-j}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{p}_j(x_1\ldots,x_n).$$

Equivalentemente

$$0 = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\,\mathrm{e}_{n-j}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{p}_j(x_1,\ldots,x_n).$$

Ejemplos

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_1(x_1,x_2,x_3) &= \mathrm{e}_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3,\\
\mathrm{p}_2(x_1,x_2,x_3) &= \mathrm{e}_1(x_1,x_2,x_3)^2 - 2\,\mathrm{e}_2(x_1,x_2,x_3)\\
&= (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2.
\end{aligned}$$

En general

$$\mathrm{p}_m = (-1)^{m-1} m\,\mathrm{e}_m + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-1+j}\,\mathrm{e}_{m-j}\,\mathrm{p}_j$$

Continuará...