



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

# Determinantes de matrices de Toeplitz autoadjuntas generadas por polinomios de Laurent

Tesis para obtener el grado de maestro  
en ciencias fisicomatemáticas

Eduardo Said Merín Martínez

Director de tesis:  
Dr. Egor Maximenko

México, D.F.  
Noviembre de 2015



# Índice general

Introducción	7
<b>1 Álgebra de Wiener</b>	<b>9</b>
1.1 El índice de una función . . . . .	9
1.2 Álgebra de Wiener . . . . .	15
1.3 Operadores de convolución . . . . .	23
1.4 Operadores de Toeplitz . . . . .	26
<b>2 Determinantes de matrices de Toeplitz de banda</b>	<b>31</b>
2.1 Matrices de Toeplitz . . . . .	31
2.2 Localización del espectro de una matriz autoadjunta de Toeplitz . . . . .	34
2.3 Fórmula de Baxter–Schmidt . . . . .	36
2.4 Fórmula de Widom . . . . .	39
2.5 Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta/2)$ . . . . .	46
2.6 Teorema límite de Szegő . . . . .	48
<b>3 Determinantes de matrices de Toeplitz de banda reales simétricas</b>	<b>53</b>
3.1 Polinomios de Chebyshev de cuatro tipos . . . . .	53
3.2 Coeficientes de la función recíproca en el caso real simétrico . . . . .	57
3.3 Fórmula de Elouafi . . . . .	59
3.4 Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta/2)$ . . . . .	64
<b>4 Polinomios característicos de matrices pentadiagonales de Toeplitz</b>	<b>65</b>
4.1 Fórmula de Widom para el caso pentadiagonal . . . . .	65
4.2 Fórmula de Elouafi para el caso pentadiagonal real simétrico . . . . .	68
4.3 Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta)$ . . . . .	69
4.4 Ejemplo $g(\theta) = 4 \text{sen}^2(\theta/2) + 16 \text{sen}^4(\theta/2)$ . . . . .	77
4.5 Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^4(\theta/2)$ . . . . .	85
<b>Apéndice A Algunas propiedades de los determinantes</b>	<b>91</b>
<b>Apéndice B Identidades trigonométricas e hiperbólicas</b>	<b>93</b>
<b>Apéndice C Logaritmos de números complejos</b>	<b>95</b>
<b>Apéndice D Logaritmos continuos de funciones complejas</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>103</b>

Deja al futuro decir la verdad y evaluar a cada uno  
según su trabajo y logros.

Nikola Tesla

# Resumen

Este trabajo es un ejemplo de aplicación del análisis complejo al álgebra lineal. El objetivo principal es expresar determinantes de cierta clase de matrices a través de las raíces de ciertos polinomios.

El trabajo está compuesto de cuatro capítulos, los cuales se encuentran desarrollados de la siguiente manera:

- (I) En el primer capítulo se dan los preliminares de los conocimientos que se requieren para desarrollar los temas del presente trabajo. Se definen operadores de Toeplitz y se demuestra su criterio de invertibilidad.
- (II) En el segundo capítulo se presentan algunas propiedades elementales de matrices de Toeplitz, se ve la fórmula de Baxter–Schmidt (1960) para determinantes de matrices de Toeplitz casi triangulares, de la cual se deduce la fórmula de Widom (1958) para calcular los determinantes de matrices de Toeplitz de banda. La utilidad de esta fórmula se basa en el hecho que su complejidad no depende del tamaño de la matriz. Por eso la fórmula es muy eficiente para matrices de tamaño grande.
- (III) En el tercer capítulo se deduce la fórmula de Elouafi (2014) para determinantes de matrices de Toeplitz de banda reales y simétricas. En esta fórmula se utilizan los polinomios de Chebyshov, por eso en el inicio del capítulo se repasan sus definiciones y propiedades básicas.
- (IV) En el último capítulo se aplican las herramientas anteriores para calcular los polinomios característicos de estas matrices reales simétricas pentadiagonales, y se consideran tres ejemplos.

La mayor parte de las demostraciones está escrita de manera más detallada que en las fuentes encontradas. Los resultados de los Capítulos 2, 3, 4 fueron comprobados en GNU Octave y se acompañan con códigos correspondientes.



# Abstract

This work offers an example of application of complex analysis to linear algebra. The main objective is to express some kind of matrix determinants through the roots of certain polynomials.

The text consists of four chapters, which are developed in the following manner:

- (I) In the first chapter we give some preliminary notions required for developing the themes of the present work. An invertibility criterion for Toeplitz operators is shown.
- (II) The second chapter presents some elemental properties of Toeplitz matrices the Baxter–Schmidt formula (1960) for almost triangular Toeplitz determinants, which implies the formula of Widom (1958) to calculate determinants of Toeplitz band matrices. The usefulness of this formula is based on the fact that their complexity does not depend on the matrix size. That is why the formula is very efficient for large matrices.
- (III) The third chapter contains the derivation of the formula of Elouafi (2014) for determinants of real symmetric Toeplitz band matrices. In the formula we use Chebyshev polynomials which is why in the beginning of the chapter we include the definitions and the basic properties.
- (IV) In the last chapter we apply some of the above mentioned tools to calculate the characteristic polynomials of real symmetric pentadiagonal Toeplitz matrices and we review consider three examples.

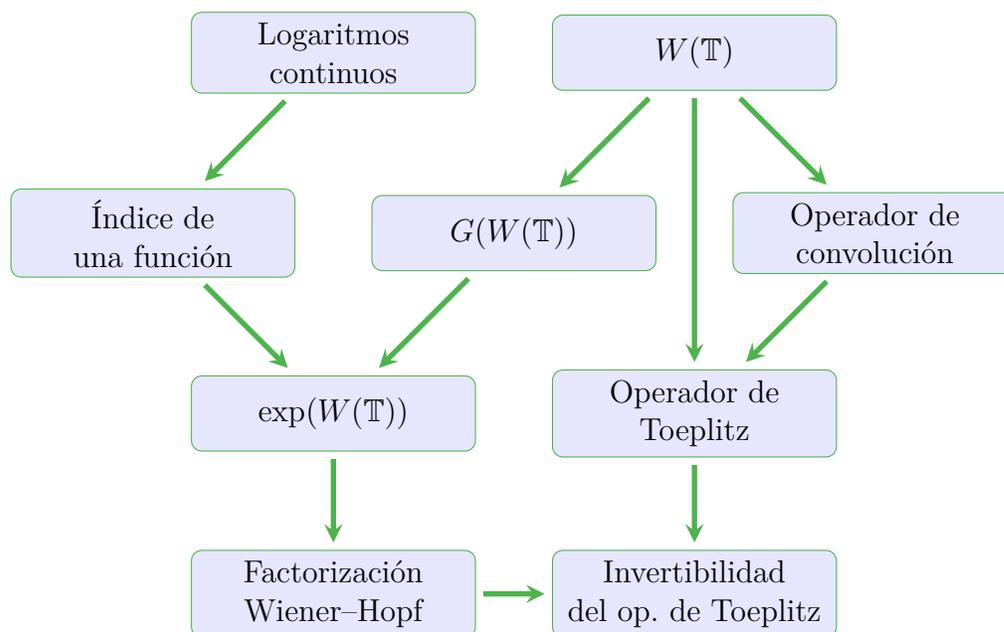
Most of the proofs are written in a more clear and detailed manner than in the cited sources. The results of the chapters 2,3 and 4 have been tested in GNU Octave and they are accompanied by the corresponding codes.

Este trabajo está dedicado a aquellas  
personas que creyeron en mí, que me apoyaron  
familiares, profesores y amigos.

Y en particular para mis padres  
Araceli y Ramón, mis hermanas Casandra y Dafne  
y finalmente al Dr. Egor Maximenko  
por sus consejos, su gran ayuda y paciencia.

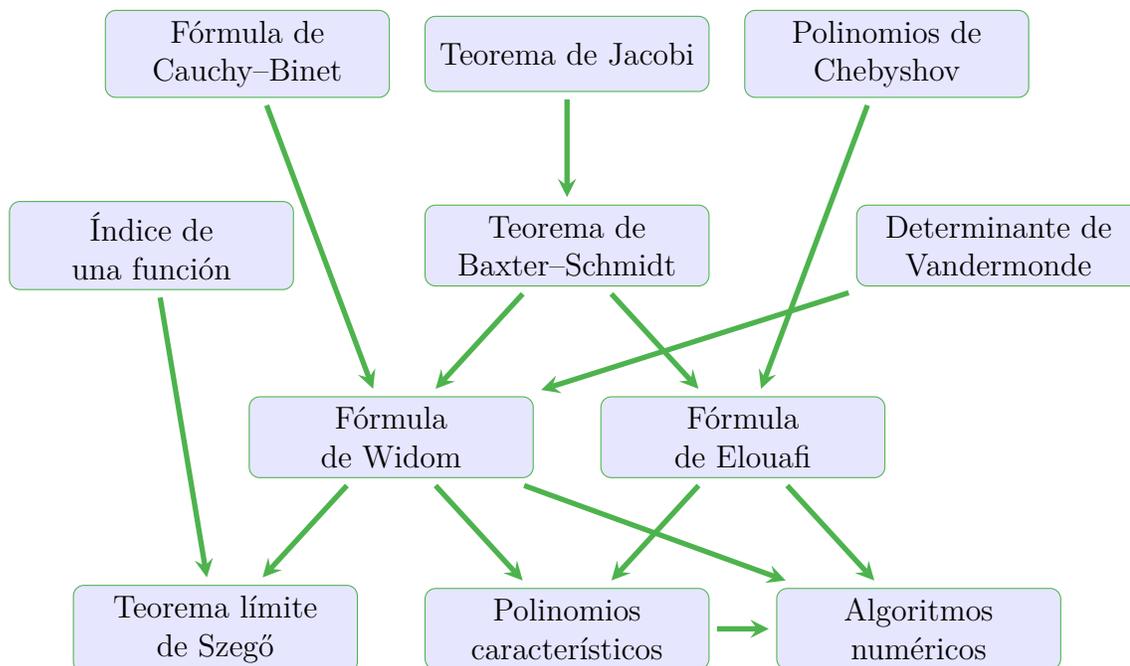
# Introducción

Las matrices de Toeplitz han sido extensamente estudiadas a partir del inicio del siglo XX, tanto en matemáticas puras como en matemáticas aplicadas, ya que aparecen en muchas aplicaciones, como son los procesos estocásticos estacionarios [7, 6] (de ahí, es dónde surge este tipo de matrices), métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales, procesamiento de imágenes [11] y modelación física, como es el modelo de Ising propuesto para estudiar el comportamiento de materiales ferromagnéticos [5], no se estudian éstos temas en el presente trabajo. Podemos encontrar gran variedad de literatura que habla acerca de ellas, libros, artículos, tanto teóricas como con aplicaciones. El esquema que se muestra a continuación tiene los conceptos principales del primer capítulo:



En el primer capítulo comenzamos con el índice de una función y algunas propiedades útiles, luego estudiamos el álgebra de Wiener ( $W(\mathbb{T})$ ), su grupo exponencial ( $\exp(W(\mathbb{T}))$ ), el operador de Toeplitz y la factorización de Wiener-Hopf, al final del capítulo demostramos el criterio de invertibilidad del operador de Toeplitz, usando herramientas vistas

anteriormente. Algunos resultados e ideas de este capítulo dan pauta para matrices de Toeplitz. El siguiente esquema muestra los conceptos principales de los capítulos 2–4.



Se demuestra el Teorema de Baxter–Schmidt utilizando el Teorema de Jacobi. Se escribe detalladamente la demostración de la fórmula de Widom usando el teorema de Baxter–Schmidt, la fórmula de Cauchy–Binet y el determinante de Vandermonde. De la fórmula de Widom se deduce el teorema de Szegő el cual describe el comportamiento asintótico de los determinantes de cierta subclase de matrices. También se estudian unas fórmulas recientes de Elouafi, para determinantes del caso de matrices reales y simétricas. Estas últimas utilizan los cuatro tipos de polinomios de Chebyshev. En el cuarto capítulo se calculan polinomios característicos de ejemplos particulares de matrices de banda pentadiagonales, usando las herramientas anteriores. Se escriben algunos algoritmos numéricos en el lenguaje GNU Octave para hacer comprobaciones.

Este trabajo está basado principalmente en trabajos de Widom [19], de Böttcher y Grudsky [2] y de Elouafi [8, 9].

El presente texto es accesible para aquellos lectores que tiene conocimientos básicos en áreas de las matemáticas como el álgebra lineal, la variable compleja, el análisis real y funcional. El trabajo de tesis fue apoyado por la beca de CONACYT y los proyectos IPN-SIP 20140639 y IPN-SIP 20150422.

# Capítulo 1

## Álgebra de Wiener

En la primera parte de este trabajo se estudian operadores de Toeplitz en  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  generados por funciones pertenecientes al álgebra de Wiener. Se define al álgebra de Wiener y se consideran algunas de sus propiedades, como la descripción del grupo de elementos invertibles y del grupo exponencial, y la factorización de Wiener–Hopf. Luego se estudian operadores de convolución en el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z})$  y al final se demuestra un criterio de invertibilidad de operadores de Toeplitz en el espacio  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ . La fuente principal es el libro [3], pero el desarrollo en la tesis es más completo: se introduce de manera detallada el concepto del índice de una función (el número de vueltas alrededor del origen) y se da una demostración más elemental de la necesidad en el criterio de invertibilidad de operadores de Toeplitz.

### 1.1. El índice de una función

En esta sección trabajamos con funciones continuas en un intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha < \beta$ . Luego vamos a aplicar varios conceptos y hechos de los Apéndices C y D al caso  $\alpha = 0, \beta = 2\pi$ , para después pasar a la circunferencia unitaria.

**1 Definición** (Logaritmo continuo de una función continua con valores complejos no nulos). Sea  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Una función  $g$  de la clase  $C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  se llama *logaritmo continuo* de  $f$  si  $f = \exp \circ g$ .

En el Apéndice D se demuestra la existencia de un logaritmo continuo para una función con valores complejos no nulos (Proposición 135) y su unicidad salvo sumandos de la forma  $2m\pi i$  (Proposición 137).

**2 Notación.** Denotemos por  $C_{per}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  al conjunto de las funciones de la clase  $C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  cuyos valores en los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  coinciden:

$$C_{per}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\}) \doteq \{f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\}) : f(\alpha) = f(\beta)\}.$$

El conjunto  $C_{per}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  se considera con la multiplicación puntual y es un grupo respecto a esta operación.

**3 Proposición.** Sea  $f \in C_{per}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Entonces para cualquier logaritmo continuo  $g$  de  $f$ , el cociente

$$\frac{g(\beta) - g(\alpha)}{2\pi i} \quad (1.1)$$

es un número entero. Más aún, si  $g_1$  y  $g_2$  son dos logaritmos continuos de  $f$ , entonces

$$\frac{g_1(\beta) - g_1(\alpha)}{2\pi i} = \frac{g_2(\beta) - g_2(\alpha)}{2\pi i}. \quad (1.2)$$

*Demostración.* Por hipótesis  $f(\alpha) = f(\beta)$ , luego entonces

$$\exp(g(\alpha)) = \exp(g(\beta)).$$

Así, por la Proposición 137 existe un número entero  $m \in \mathbb{Z}$  tal que

$$g(\beta) - g(\alpha) = 2m\pi i.$$

□

**4 Definición** (Índice de una función). Sea  $f \in C_{per}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Se define el número  $\text{wind}(f)$  o *índice* de una función, mediante la regla

$$\text{wind}(f) \doteq \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{2\pi i}, \quad (1.3)$$

donde  $g$  es algún logaritmo continuo de  $f$ . La Proposición 3 muestra que  $\text{wind}(f)$  es un número entero y no depende de la elección del logaritmo continuo de  $f$ . Desde un punto de vista topológico, el índice de una función nos da el número de vueltas de esta función alrededor del origen.

**5 Ejemplo.** Sea  $m \in \mathbb{Z}$ . Definimos  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mediante la regla

$$f(x) = e^{\frac{2\pi i m}{\beta - \alpha} x},$$

entonces la función

$$g(x) \doteq 2\pi i m x, \quad x \in [\alpha, \beta],$$

es un logaritmo continuo de  $f$  y por lo tanto

$$\text{wind}(f) = m.$$

**6 Proposición.** La función  $\text{wind}: C_{\text{per}}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un epimorfismo de grupos.

*Demostración.* Primero veamos que  $\text{wind}$  es un homomorfismo de grupos. Sean  $f_1, f_2 \in C_{\text{per}}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Usando la Proposición 135 encontramos algunas funciones  $g_1$  y  $g_2$  que sean logaritmos continuos de  $f$  y  $h$  respectivamente, es decir,

$$\exp(g_1) = f_1, \quad \exp(g_2) = f_2.$$

Luego  $g_1 + g_2$  es un logaritmo continuo de  $f_1 f_2$  ya que  $f_1 f_2 = \exp(g_1 + g_2)$ , así

$$\begin{aligned} \text{wind}(f_1 f_2) &= \frac{(g_1 + g_2)(\beta) - (g_1 + g_2)(\alpha)}{2\pi i} = \frac{g_1(\beta) - g_1(\alpha) + g_2(\beta) - g_2(\alpha)}{2\pi i} \\ &= \text{wind}(f_1) + \text{wind}(f_2). \end{aligned}$$

La sobreyectividad de la función  $\text{wind}$  se sigue del ejemplo anterior.  $\square$

La siguiente proposición dice que si  $f$  siempre toma valores cercanos a 1, entonces su número de vueltas alrededor del origen es cero.

**7 Notación.** Denotamos por  $\mathbb{D}$  al disco unitario en el plano complejo:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

**8 Proposición.** Sea  $f \in C_{\text{per}}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  tal que  $f([\alpha, \beta])$  está contenido en  $1 + \mathbb{D}$ . Entonces  $\text{wind}(f) = 0$ .

*Demostración.* Puesto que  $f([\alpha, \beta]) \subset 1 + \mathbb{D}$ , se define de manera natural un logaritmo continuo de  $f$  como

$$g(x) \doteq \ln_1 f(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

donde  $\ln_1$  se define en  $1 + \mathbb{D}$  mediante la serie de Mercator, véase la Proposición 131 en el Apéndice. Más aún, de la igualdad  $f(\alpha) = f(\beta)$  se sigue que  $g(\alpha) = g(\beta)$ . Por la fórmula (1.3),  $\text{wind}(f) = 0$ .  $\square$

Para funciones continuamente derivables o continuamente derivables a trozos el número de vueltas se puede expresar mediante una integral:

**9 Proposición.** Sea  $f \in C_{\text{per}}([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  una función continuamente derivable a trozos. Entonces

$$\text{wind}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx. \quad (1.4)$$

*Demostración.* Se sigue de la Definición 1.3 y de la Proposición 136.  $\square$

Algunos autores [Rudin, Silverman] utilizan la fórmula (1.4) como definición de  $\text{wind}$ , como por ejemplo [17, teorema 12.12]. Notemos que el camino elegido en esta tesis permite definir  $\text{wind}$  no solamente para funciones continuamente derivables a trozos, sino para todas funciones continuas (con valores diferentes de cero).

**10 Notación.** Denotamos por  $\mathbb{T}$  a la circunferencia unitaria en el plano complejo:

$$\mathbb{T} \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Dotamos a  $\mathbb{T}$  con la medida  $\mu_{\mathbb{T}}$  de la siguiente manera: dado un subconjunto de Borel  $X$  de la circunferencia  $\mathbb{T}$ , definimos su medida  $\mu_{\mathbb{T}}(X)$  mediante la fórmula:

$$\mu_{\mathbb{T}}(X) \doteq \mu\{x \in [0, 2\pi) : e^{ix} \in X\},$$

dónde  $\mu$  es la medida de Lebesgue. Notemos que la medida  $\mu_{\mathbb{T}}$  es invariante bajo rotaciones. En otras palabras,  $\mu_{\mathbb{T}}$  es la medida de Haar normalizada del grupo compacto  $\mathbb{T}$ .

**11 Definición.** Dada una función  $a \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ , definimos  $\text{wind}(a)$  como

$$\text{wind}(a) \doteq \text{wind}(g),$$

donde  $g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,

$$g(x) \doteq a(e^{ix}).$$

Obviamente la función  $g$  en la Definición 11 es de clase  $C_{\text{per}}([0, 2\pi], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ , por eso la definición tiene sentido.

**12 Ejemplo.** Para cada número entero  $p$  definimos la función  $\chi_p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  mediante la regla

$$\chi_p(t) \doteq t^p, \quad t \in \mathbb{T},$$

entonces

$$\text{wind}(\chi_p) = p.$$

**13 Ejemplo.** Sea  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Definimos  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  como la función constante idénticamente igual al número  $c$ :

$$f(t) \doteq c, \quad t \in \mathbb{T},$$

entonces  $\text{wind}(f) = 0$ .

Notemos algunas propiedades de  $\text{wind}$  que se obtienen como corolarios de las construcciones anteriores:

**14 Corolario.** La función  $\text{wind}: C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}$  es un epimorfismo de grupos.

**15 Corolario.** Si  $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$  y  $f(\mathbb{T}) \subset 1 + \mathbb{D}$ , entonces  $\text{wind}(f) = 0$ .

**16 Proposición** (Sobre el número de vueltas de una función racional). Sean  $P$  y  $Q$  polinomios de una variable con coeficientes complejos. Supongamos que  $P$  y  $Q$  son primos relativos y no tienen ceros en  $\mathbb{T}$ . Definimos  $f$  en  $\mathbb{T}$  mediante la regla

$$f(t) \doteq \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad t \in \mathbb{T},$$

entonces  $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$  y el número de las vueltas de  $f$  alrededor del origen se calcula como el número de ceros de  $f$  en el disco  $\mathbb{D}$  menos el número de polos de  $f$  en el disco  $\mathbb{D}$ .

*Demostración.* Por el teorema fundamental del álgebra podemos factorizar  $P$  y  $Q$  en productos de binomios. Separamos los ceros de  $P$  y  $Q$  en aquellos que están dentro de la circunferencia unitaria y aquellos que están afuera:

$$P(t) = p \prod_{m=1}^M (t - \alpha_m) \prod_{n=1}^N (t - \beta_n), \quad (1.5)$$

$$Q(t) = q \prod_{j=1}^J (t - \lambda_j) \prod_{k=1}^K (t - \mu_k), \quad (1.6)$$

con

$$|\alpha_m| < 1, \quad |\lambda_j| < 1, \quad |\beta_n| > 1, \quad |\mu_k| > 1,$$

para toda  $m, j, n, k$ . En cada binomio factorizamos el término mayor:

$$P(t) = (-1)^N p \prod_{n=1}^N \beta_n \cdot t^M \prod_{m=1}^M \left(1 - \frac{\alpha_m}{t}\right) \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{t}{\beta_n}\right), \quad (1.7)$$

$$Q(t) = q(-1)^K \prod_{k=1}^K \mu_k \cdot t^J \prod_{j=1}^J \left(1 - \frac{\lambda_j}{t}\right) \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{t}{\mu_k}\right). \quad (1.8)$$

Utilizando los Corolarios 14 y 15 y los Ejemplos 12 y 13 concluimos de ahí que

$$\text{wind}(f) = \text{wind}(P) - \text{wind}(Q) = M - J. \quad \square$$

**17 Observación.** Se sabe que el conjunto de funciones  $C(\mathbb{T}) \doteq C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$  provisto con las operaciones puntuales y la norma-máximo es un álgebra de Banach conmutativa (de hecho, un álgebra  $C^*$  conmutativa). La identidad de esta álgebra es la función  $\chi_0$ .

**18 Proposición** (Sobre un argumento continuo definido en  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ). *Existe una única función  $h \in C(\mathbb{C} \setminus [0, \infty), (0, 2\pi))$  tal que para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ,  $|z|e^{ih(z)} = z$ . Además, si  $z_0 > 0$ , entonces*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \text{Im } z > 0}} h(z) = 0, \tag{1.9}$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \text{Im } z < 0}} h(z) = 2\pi. \tag{1.10}$$

*Idea de la demostración.* La unicidad se sigue de la Proposición 3 y del hecho que el intervalo  $(0, 2\pi)$  no contiene a ningunos dos números la distancia entre los cuales sea mayor o igual a  $2\pi$ . La prueba de la existencia es constructiva. Construiremos a  $h$  de la forma

$$h(z) = \begin{cases} \text{arcctg} \left( \frac{\text{Re } z}{\text{Im } z} \right), & \text{si } \text{Im } z > 0; \\ \pi, & \text{si } z \in (-\infty, 0); \\ 2\pi - \text{arcctg} \left( \frac{\text{Re } z}{-\text{Im } z} \right), & \text{si } \text{Im } z < 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $h$  es continua; en particular, si  $z \in (-\infty, 0)$ , se verifica que  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \pi$ . Veamos ahora que  $z = |z|e^{ih(z)}$ , con  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Sólo veamos el caso donde  $\text{Im } z > 0$ . De la identidad

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2(\alpha)}}, \quad \text{para } \alpha \in (0, \pi),$$

se siguen las relaciones

$$\text{sen}(h(z)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{Re } z / \text{Im } z)^2}} = \frac{\text{Im } z}{|z|}, \quad \text{cos}(h(z)) = \frac{\text{Re } z}{|z|}.$$

Por lo tanto

$$|z|e^{ih(z)} = |z|(\text{cos}(h(z)) + i \text{sen}(h(z))) = \text{Re } z + i \text{Im } z.$$

Los otros dos casos se demuestran de manera análoga. □

**19 Lema.** *Sea  $f \in C_{\text{per}}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ . Entonces existe una única función  $a \in C(\mathbb{T})$  tal que*

$$a(e^{ix}) = f(x), \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{1.11}$$

*Demostración.* Para cada  $t \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$  existe un único  $x \in (0, 2\pi)$  tal que  $e^{ix} = t$ ; sea además  $h$  la función de la proposición anterior, así con la notación anterior se tiene que

$$e^{ih(t)} = t.$$

Por lo tanto definamos

$$a(t) \doteq \begin{cases} f(h(t)), & \text{si } t \in \mathbb{T} \setminus \{1\}, \\ f(0), & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

La identidad (1.11) determina  $a$  de manera única porque cada punto  $t \in \mathbb{T}$  se puede escribir en la forma  $t = e^{ix}$ , para  $t = 1$  hay dos puntos con esta propiedad, a saber,  $x = 0$  y  $x = 2\pi$ . Más aún,  $f$  tiene el mismo valor en estos dos puntos. De aquí se sigue que  $a$  está bien definida en cada punto. Notemos además que  $f(0) = f(2\pi) = a(1)$ .

Es claro que  $a$  es continua, sólo verifiquemos la continuidad en el punto 1. Si  $t \rightarrow 1$ ,  $\text{Im}(t) > 0$ , entonces  $h(t) \rightarrow 0$  y  $f(h(t)) \rightarrow f(0)$ , análogamente si  $t \rightarrow 1$ ,  $\text{Im}(t) < 0$ , entonces  $h(t) \rightarrow 2\pi$  y  $f(h(t)) \rightarrow f(0) = f(2\pi)$ .  $\square$

**20 Proposición.** La función  $\Phi: C(\mathbb{T}) \rightarrow C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C})$  definida mediante la regla

$$\Phi(a)(x) \doteq a(e^{ix}),$$

es un isomorfismo de álgebras de Banach.

*Demostración.* La propiedad suprayectiva está establecida en el Lema 19, las demás propiedades de  $\Phi$  se muestran de manera trivial.  $\square$

## 1.2. Álgebra de Wiener

**21 Definición** (Álgebra de Wiener). Denotemos por  $W(\mathbb{T})$  al conjunto de las funciones  $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  que se pueden representar en la forma

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1.12)$$

donde  $c_n$  son algunos coeficientes complejos tales que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < +\infty. \quad (1.13)$$

Se define la norma de cada elemento  $f$  del álgebra de Wiener de la siguiente manera:

Para cada  $f \in W(\mathbb{T})$ :

$$\|f\|_W \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|.$$

Se verifica fácilmente que el conjunto  $W(\mathbb{T})$  dotado con operaciones algebraicas punto a punto y con la norma  $\|\cdot\|_W$ , es una álgebra de Wiener. En particular, la completitud/completitud de  $W(\mathbb{T})$  se sigue de la completitud/completitud de  $\ell^1(\mathbb{Z})$ . Verifiquemos solamente que  $W(\mathbb{T})$  es cerrada bajo la multiplicación puntual y se cumple la propiedad submultiplicativa para la norma.

**22 Proposición.** *El álgebra de Wiener es cerrada bajo la multiplicación puntual de funciones; en otras palabras, para cada  $a, b \in W(\mathbb{T})$  se sigue que  $ab \in W(\mathbb{T})$  y  $\|ab\|_W \leq \|a\|_W \|b\|_W$ .*

*Demostración.* Sean  $a, b \in W(\mathbb{T})$ , entonces por el criterio de Cauchy para series dobles y absolutamente convergentes se tiene:

$$\begin{aligned} a(t)b(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l t^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k t^k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_l b_k t^{l+k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l b_k t^{l+k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k t^j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right) t^j, \quad t \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Por eso

$$(ab)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \|ab\|_W &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |(ab)_j| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k| \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k| = \|a\|_W \|b\|_W < +\infty. \end{aligned} \quad \square$$

**23 Notación** (Funciones monomiales). Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , definimos a la función  $\chi_n \in W(\mathbb{T})$  por

$$\chi_n(t) \doteq t^n, \quad t \in \mathbb{T}.$$

**24 Lema** (Ortogonalidad de los monomios sobre las circunferencia unitaria). *La familia de funciones  $(\chi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal con respecto a la medida  $\mu_{\mathbb{T}}$ , esto es, para cualesquiera  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_p \overline{\chi_q} d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} e^{-iq\theta} d\theta = \delta_{p,q}.$$

*Demostración.*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip\theta} e^{-iq\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(p-q)} d\theta = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q, \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases} \quad \square$$

**25 Definición** (Coeficientes de Fourier de una función integrable). Dada una función  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , vamos a denotar por  $f_k$  a su  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier:

$$f_k \doteq \int_{\mathbb{T}} f \chi_{-k} d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**26 Lema.** Sea  $f \in W(\mathbb{T})$  y sean  $c_n$  números complejos de la Definición 21. Entonces  $c_n$  son coeficientes de Fourier de la función  $f$ , es decir  $f_k = c_k$ .

*Demostración.* Utilizamos el Lema 24:

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\theta(n-k)} d\theta \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-k)} d\theta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n,k} = c_k. \end{aligned}$$

La tercera igualdad se da por un corolario del teorema de convergencia dominada, puede leer por ejemplo [14, Teorema 1.38].  $\square$

**27 Notación.** Vamos a denotar como  $GW(\mathbb{T})$  al grupo de elementos invertibles del álgebra de Wiener  $W$ . Así note que  $a \in GW(\mathbb{T})$  si y sólo si  $a \in W(\mathbb{T})$  y existe  $b \in W(\mathbb{T})$  tal que  $a(t)b(t) = 1$  para toda  $t \in \mathbb{T}$ .

Claramente una función  $a$  perteneciente a  $GW(\mathbb{T})$  no puede tener ceros en  $\mathbb{T}$ . El siguiente teorema nos dice que esta condición simple es suficiente para describir el grupo  $GW(\mathbb{T})$ .

**28 Teorema (Wiener).**

$$GW(\mathbb{T}) = \{a \in W(\mathbb{T}) : 0 \notin a(\mathbb{T})\}.$$

La demostración se puede encontrar, por ejemplo, en [15, Teorema 11.6].

En otras palabras, el teorema de Wiener afirma que si una función  $a: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  se desarrolla en una serie de Fourier absolutamente convergente:

$$a(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ni\theta}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

y  $a(e^{i\theta}) \neq 0$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , entonces la función  $1/a$  también se desarrolla en una serie de Fourier absolutamente convergente:

$$\frac{1}{a(e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{ni\theta}, \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty.$$

## Descripción del grupo exponencial de $W(\mathbb{T})$

**29 Notación.** Denotemos por  $G(C(\mathbb{T}))$  al conjunto de los elementos invertibles del álgebra  $C(\mathbb{T})$ :

$$G(C(\mathbb{T})) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \exists g \in C(\mathbb{T}) \quad fg = \chi_0\}.$$

Se sabe que los elementos invertibles de un álgebra con identidad forman un grupo. En el álgebra  $C(\mathbb{T})$  este grupo admite una descripción muy simple.

**30 Proposición.** *El grupo de los elementos invertibles del álgebra  $C(\mathbb{T})$  consiste de las funciones que no se anulan en  $\mathbb{T}$ :*

$$G(C(\mathbb{T})) = \{a \in C(\mathbb{T}) : 0 \notin a(\mathbb{T})\}.$$

*Demostración.* Sea  $a \in C(\mathbb{T})$  tal que  $0 \notin a(\mathbb{T})$ . Entonces la función  $b: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por la regla  $b(t) = 1/a(t)$  es continua y satisface  $ab = \chi_0$ .  $\square$

**31 Proposición.** *El grupo exponencial del álgebra  $C(\mathbb{T})$  consiste de todas las funciones que pertenecen al grupo de elementos invertibles de esta álgebra y hacen 0 vueltas alrededor del origen:*

$$\exp(C(\mathbb{T})) = \{a \in G(C(\mathbb{T})) : \text{wind}(a) = 0\}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $a \in \exp(C(\mathbb{T}))$ , esto es,  $a = \exp \circ b$  para alguna función  $b \in C(\mathbb{T})$ . Primero notamos que para cada  $t \in \mathbb{T}$

$$a(t) \exp(-b(t)) = \exp(b(t)) \exp(-b(t)) = \exp(0) = 1,$$

así que  $a \in G(C(\mathbb{T}))$  y  $1/a = \exp(-b)$ . Definimos funciones  $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mediante las fórmulas

$$f(x) \doteq a(e^{ix}), \quad g(x) \doteq b(e^{ix}).$$

Entonces  $f \in C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ ,  $g \in C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C})$  y  $f = \exp \circ g$ . Por eso

$$\text{wind}(a) = \text{wind}(f) = \frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi i} = 0.$$

Ahora supongamos que  $a \in G(C(\mathbb{T}))$ ,  $\text{wind}(a) = 0$ , y demostremos que  $a \in \exp(C(\mathbb{T}))$ . Definimos la función  $f \in C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  mediante la regla

$$f(x) \doteq a(e^{ix}).$$

Puesto que  $f \in C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ ,  $\text{wind}(f) = \text{wind}(a) = 0$ . Luego por la Proposición 3 existe una función  $g \in C_{per}([0, 2\pi], \mathbb{C})$  tal que  $f = \exp \circ g$ . Usando el Lema 19 construimos  $b$  tal que

$$b(e^{ix}) = g(x), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Entonces

$$a(e^{ix}) = f(x) = \exp(g(x)) = \exp(b(e^{ix})), \quad x \in [0, 2\pi],$$

esto es,  $a = \exp \circ b$ .  $\square$

## Factorización de Wiener–Hopf

El objetivo de esta sección es describir el grupo exponencial del álgebra de Wiener y demostrar el teorema sobre la factorización de Wiener–Hopf.

**32 Notación.** Denotemos a  $\text{Rat}(\mathbb{T})$  como el álgebra de las funciones racionales restringidas a  $\mathbb{T}$ . En otras palabras,  $\text{Rat}(\mathbb{T})$  consiste de todas las funciones  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  que pueden ser escritas de la forma

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1.14)$$

donde  $P$  y  $Q$  son dos polinomios primos relativos con coeficientes complejos.

**33 Proposición.** *Toda función  $f$  del tipo  $\text{Rat}(\mathbb{T})$  puede ser escrita de la forma*

$$f(t) = ct^\kappa \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \left(1 - \frac{t}{\alpha_j}\right) \prod_{j=1}^{m_2} \left(1 - \frac{\beta_j}{t}\right)}{\prod_{j=1}^{m_3} \left(1 - \frac{t}{\gamma_j}\right) \prod_{j=1}^{m_4} \left(1 - \frac{\delta_j}{t}\right)} \prod_{j=1}^{m_5} (t - \epsilon_j), \quad (1.15)$$

dónde  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $c, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \epsilon_j \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha_j| > 1$ ,  $|\beta_j| < 1$ ,  $|\gamma_j| > 1$ ,  $|\delta_j| < 1$ ,  $|\epsilon_j| = 1$ .

*Demostración.* De (1.14) se sigue la factorización de los polinomios  $P$  y  $Q$  en productos de polinomios de grado 1:

$$P(z) = c_1 t^{\kappa_1} \prod_{j=1}^{m_1} (t - \alpha_j) \prod_{j=1}^{m_2} (t - \beta_j) \prod_{j=1}^{m_5} (t - \epsilon_j), \quad Q(z) = c_2 t^{\kappa_2} \prod_{j=1}^{m_3} (t - \gamma_j) \prod_{j=1}^{m_4} (t - \delta_j).$$

Hagamos las siguientes factorizaciones:

$$t - \alpha_j = -\alpha_j \left(1 - \frac{t}{\alpha_j}\right), \quad t - \beta_j = t \left(1 - \frac{\beta_j}{t}\right).$$

Se hace una transformación análoga con los factores  $t - \gamma_j$  y  $t - \delta_j$  y después de juntar las potencias se obtiene (1.15).  $\square$

**34 Proposición.** *Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , con  $|\alpha| > 1$ ,  $|\beta| < 1$ . Definamos  $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  como*

$$f(t) = 1 - \frac{t}{\alpha}, \quad g(t) = 1 - \frac{\beta}{t},$$

entonces  $f$  y  $g$  son elementos invertibles de  $W(\mathbb{T})$ ; más aún  $f$  y  $g$  pertenecen al grupo exponencial de  $W(\mathbb{T})$ . Si  $\gamma \in \mathbb{T}$ , entonces la función

$$h(t) = t - \gamma,$$

es un elemento no invertible de  $W(\mathbb{T})$ .

*Demostración.* La condición de  $f$  y  $g$  sean elementos invertibles de  $W(\mathbb{T})$  se sigue del hecho que  $f$  y  $g$  pertenecen a la bola abierta de radio 1, con centro  $\chi_0$  del álgebra  $W(\mathbb{T})$ :

$$\|f - \chi_0\|_W = \frac{1}{|\alpha|}, \quad \|g - \chi_0\|_W = |\beta| < 1.$$

Los inversos de  $f$  y  $g$ , resultan de las series de Neumann:

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\alpha^k}, \quad \frac{1}{g(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k t^{-k},$$

A partir de la serie de Mercator, se construyen algunos logaritmos continuos de  $f$  y  $g$ :

$$f(t) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\alpha^k}\right), \quad g(t) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k\alpha^k}\right).$$

La función  $h$  no es invertible en  $W(\mathbb{T})$  porque se anula en  $\gamma$ . □

**35 Lema.** *El conjunto  $\text{Rat}(\mathbb{T})$  es una subálgebra (no cerrada) de  $W(\mathbb{T})$ . Si  $f \in \text{Rat}(\mathbb{T})$  y  $0 \notin f(\mathbb{T})$ , entonces  $f$  es un elemento invertible de  $\text{Rat}(\mathbb{T})$ . Más aún, si  $f$  es escrito de la forma (1.15), entonces*

$$\text{wind}(f) = \kappa.$$

**36 Proposición.** *El conjunto  $\text{Rat}(\mathbb{T})$  es denso en  $W(\mathbb{T})$ .*

*Demostración.* Dada  $f \in W(\mathbb{T})$ , las sumas parciales  $\sum_{k=-n}^n f_k \chi_k$  se aproximan a  $f$  en la norma  $\|\cdot\|_W$ . □

A partir de este momento usaremos el teorema de Wiener.

**37 Corolario.** *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , y  $\|a - \chi_0\|_W < 1$ , entonces  $a \in \exp(W(\mathbb{T}))$ .*

*Demostración.* Un logaritmo de  $a$  puede ser construido con la serie de Mercator. □

**38 Lema.** *Sea  $f \in \text{Rat}(\mathbb{T})$ ,  $0 \notin f(\mathbb{T})$  y  $\text{wind}(f) = 0$ . Entonces*

$$f \in \exp(W(\mathbb{T})).$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  puede ser factorizada de la forma (1.15), entonces de la condición  $0 \notin f(\mathbb{T})$  significa que  $m_5 = 0$  y de la condición  $\text{wind}(f) = 0$  significa que  $\kappa = 0$ , la conclusión surge del Lema 35. □

**39 Teorema** (Descripción del grupo exponencial del álgebra de Wiener).

$$\exp(W(\mathbb{T})) = \{a \in GW(\mathbb{T}) : \text{wind}(a) = 0\}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $a \in \exp(W(\mathbb{T}))$  i.e existe alguna  $f \in W(\mathbb{T})$  tal que  $a = \exp(f)$ . Entonces  $\exp(-f)a = \exp(-f)\exp(f) = \chi_0$ , lo cuál significa que  $a$  es invertible. Más aún, por definición del índice de una función,

$$\text{wind}(a) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi i} = \frac{a(1) - a(1)}{2\pi i} = 0.$$

Veamos la otra contención. Supongamos que  $a$  es invertible, es decir  $0 \notin f(\mathbb{T})$ , y  $\text{wind}(a) = 0$ . Usando la Proposición 36, tomemos  $b \in \text{Rat}(\mathbb{T})$  tal que

$$\|a - b\|_W < \frac{1}{\|a^{-1}\|_W}.$$

Pongamos  $h = a^{-1}b$ . Entonces

$$\|h - \chi_0\|_W = \|a^{-1}(b - a)\|_W < 1.$$

Así por el Corolario 37 tenemos que  $h \in \exp(W(\mathbb{T}))$ . Luego la igualdad  $b = ah$  implica que  $b \in G(W(\mathbb{T}))$  y  $\text{wind}(b) = \text{wind}(a^{-1})\text{wind}(h) = 0$ . Por el Lema 38 concluimos que  $b \in \exp(W(\mathbb{T}))$ . Finalmente de la igualdad  $a = h^{-1}b$  obtenemos que  $a \in \exp(W(\mathbb{T}))$ .  $\square$

La factorización de Wiener–Hopf se usa para establecer criterios de invertibilidad de operadores de Toeplitz. Algunas ideas similares se usan para demostrar el teorema límite de Szegő que veremos más adelante. La idea de la factorización Wiener–Hopf es representar la función dada  $a$  como el producto de dos funciones que generan operadores de Toeplitz “triangulares” (y matrices de Toeplitz triangulares), los cuales son fáciles de invertir.

**40 Notación** (Parte “positiva y negativa” del álgebra de Wiener).

$$W_+(\mathbb{T}) \doteq \{a \in W(\mathbb{T}) : \forall k \leq 0 \quad a_k = 0\} = \left\{ a \in W(\mathbb{T}) : a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right\},$$

$$W_-(\mathbb{T}) \doteq \{a \in W(\mathbb{T}) : \forall k > 0 \quad a_k = 0\} = \left\{ a \in W(\mathbb{T}) : a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} t^{-k} \right\}.$$

**41 Definición.** Definimos las proyecciones canónicas del álgebra de Wiener, a su parte positiva y negativa, respectivamente:

$$P_+ : W(\mathbb{T}) \rightarrow W_+(\mathbb{T}), \quad P_- : W(\mathbb{T}) \rightarrow W_-(\mathbb{T}),$$

$$(P_+ a)(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad (P_- a)(t) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} t^{-k}.$$

Notemos que todas estas series convergen absolutamente al estar en el álgebra de Wiener.

**42 Observación.** Dado  $a \in W(\mathbb{T})$ , tenemos las siguientes propiedades:

$$a = P_+a + P_-a, \quad P_+(P_+a) = P_+a, \quad P_-(P_-a) = P_-a.$$

En otras palabras,  $P_+ + P_- = I_{W(\mathbb{T})}$ ,  $P_+^2 = P_+$ ,  $P_-^2 = P_-$ , donde  $I_{W(\mathbb{T})}$  es el operador identidad.

**43 Teorema** (Factorización de Wiener–Hopf). *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$  tal que  $0 \notin a(\mathbb{T})$ . Entonces  $a$  puede ser escrito en la forma*

$$a(t) = a_-(t)t^m a_+(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.16}$$

donde  $m = \text{wind}(a)$ ,  $a_+ \in \exp(W_+(\mathbb{T}))$  y  $a_- \in \exp(W_-(\mathbb{T}))$ .

*Demostración.* Por propiedades de  $\text{wind}$ ,

$$\text{wind}(a\chi_{-m}) = \text{wind}(a) + \text{wind}(\chi_{-m}) = m - m = 0.$$

Luego por la Proposición 39 existe  $b \in W(\mathbb{T})$  tal que  $a\chi_{-m} = \exp(b)$ . Así

$$a\chi_{-m} = \exp(b) = \exp(P_+b + P_-b) = \exp(P_+b) \exp(P_-b) = a_+a_-.$$

Denotando  $\exp(P_+b)$  por  $a_+$  y  $\exp(P_-b)$  por  $a_-$  obtenemos la fórmula (1.16). □

### 1.3. Operadores de convolución

En esta sección se consideran operadores de convolución sobre el grupo  $\mathbb{Z}$  y se explican sus propiedades principales. Por simplicidad supondremos que el símbolo generador  $a$  pertenece al álgebra de Wiener, esto es, la sucesión  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  es absolutamente sumable.

**44 Definición** (Operador de convolución sobre  $\mathbb{Z}$ ). Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , definimos el operador de convolución  $C(a) : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ,

$$(C(a)x)_j \doteq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}x_k, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad x \in \ell^2(\mathbb{Z}). \quad (1.17)$$

**45 Definición** (Operador de multiplicación). Dada una función  $a \in C(\mathbb{T})$ , denotemos por  $M(a)$  al operador de multiplicación por  $a$  que actúa en el espacio  $L^2(\mathbb{T}, d\mu_{\mathbb{T}})$  mediante la regla

$$(M(a)f)(t) = a(t)f(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

**46 Definición** (Rango esencial). Sea  $a$  una función de clase  $L^\infty(\mathbb{T})$ , denotamos a  $\mathcal{R}(a)$  al espectro de  $a$  como elemento de  $L^\infty(\mathbb{T})$ , es decir  $\mathcal{R}(a)$  será el conjunto definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}(a) \doteq \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \epsilon > 0 \quad \mu(\{t \in \mathbb{T} : |a(t) - \lambda| < \epsilon\}) > 0\},$$

donde  $\mu$  es la medida de Lebesgue.

**47 Proposición** (Criterio de invertibilidad del operador de multiplicación). Sea  $a \in C(\mathbb{T})$ . Entonces el operador de multiplicación  $M(a)$  es invertible si, y sólo si,  $0 \notin a(\mathbb{T})$ .

Este hecho es muy conocido, por eso omitimos la demostración, ver por ejemplo [15, Teorema 12.38]. En la Proposición 47 estamos suponiendo que la función  $a$  es continua y usamos el hecho que  $\mathbb{T}$  es un compacto. En el caso más general, si  $a$  fuera una función de clase  $L^\infty(\mathbb{T})$ , en vez de la imagen  $a(\mathbb{T})$  uno tendría que trabajar con la *imagen esencial* (llamado también el *rango esencial*), ver Definición 46.

**48 Definición** (Transformada de Fourier-Plancherel sobre la circunferencia unitaria). Denotemos por  $F$  al operador  $L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  que a cada función  $f \in L^2(\mathbb{T})$  le asocia la sucesión de sus coeficientes de Fourier:

$$(Ff)_j = \int_{\mathbb{T}} \chi_{-j} f d\mu_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ji\theta} f(\theta) d\theta.$$

Se sabe que  $F$  es un operador unitario, ver por ejemplo [15]. Su inverso asocia una serie de Fourier a una sucesión dada: si  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , entonces

$$(F^{-1}x)(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j t^j, \quad t \in \mathbb{T}.$$

**49 Proposición** (Diagonalización del operador de convolución). *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ . Entonces  $F^{-1}C(a)F = M(a)$ .*

*Demostración.* Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Demostremos que  $F^{-1}C(a)Ff = M(a)f$ . Primero suponemos que  $Ff$  es una sucesión finita. Calculemos la componente  $j$  de la sucesión  $C(a)Ff$ :

$$(C(a)Ff)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k}(Ff)_k.$$

Al aplicar el operador  $F^{-1}$  a esta sucesión obtenemos la función

$$\begin{aligned} (F^{-1}C(a)Ff)(t) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k}(Ff)_k t^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Ff)_k t^k \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} t^{j-k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (Ff)_k t^k \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m t^m = f(t)a(t) = (M(a)f)(t). \end{aligned}$$

La condición que  $Ff$  es una sucesión finita garantiza que el intercambio de las sumas es válido. Como las sucesiones finitas forman un subconjunto denso en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , la igualdad  $F^{-1}C(a)Ff = M(a)f$  se cumple para cada  $f \in L^2(\mathbb{T})$ .  $\square$

**50 Proposición.** *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ . Entonces el operador  $C(a)$  es invertible si, y sólo si,  $0 \notin a(\mathbb{T})$ .*

*Demostración.* Se sigue de las Proposiciones 47 y 49.  $\square$

**51 Notación.** Sea  $A \subseteq \mathbb{Z}$ . Denotemos por  $P_A$  al operador lineal que actúa en  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mediante la regla

$$(P_A x)_j = \begin{cases} x_j, & j \in A; \\ 0, & j \notin A. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $P_A$  es una proyección ortogonal.

**52 Ejemplo.** Sean  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  y  $y = P_{\mathbb{N}_0-2}x$ , entonces

$$P_{\mathbb{N}_0-2}x = (\dots, 0, 0, \dots, \underbrace{0}_{y-3}, \underbrace{x_{-2}}_{y-2}, \underbrace{x_{-1}}_{y-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

**53 Proposición** (Convergencia fuerte de una sucesión de proyecciones al operador identidad). *Para cada  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,*

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|P_{\mathbb{N}_0-q}x - x\|_2 = 0.$$

*En otras palabras, la sucesión de operadores  $P_{\mathbb{N}_0-q}$  tiende puntualmente al operador identidad del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .*

*Demostración.* En efecto,

$$\|P_{\mathbb{N}_0 - q}x - x\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{-m-1} |x_j|^2,$$

y la última expresión tiende a cero cuando  $q$  tiende a infinito, porque  $x$  es cuadrado sumable.  $\square$

**54 Definición** (Operador de desplazamiento). Dado  $q \in \mathbb{Z}$ , denotemos por  $\tau_q$  al operador que actúa en  $\ell^2(\mathbb{Z})$  mediante la regla

$$(\tau_q x)_j = x_{j-q}.$$

Es fácil ver que  $\tau_q$  es una isometría lineal del espacio  $\ell^2(\mathbb{Z})$  sobre si mismo.

**55 Proposición** (Propiedades del operador de desplazamiento). *El conjunto de operadores  $\{\tau_q : q \in \mathbb{Z}\}$  es un grupo:*

$$\tau_p \tau_q = \tau_{p+q}, \quad \tau_0 = I_{\ell^2(\mathbb{Z})}, \quad \tau_p^{-1} = \tau_{-p}.$$

*Demostración.* Las demostraciones son sencillas, sólo veremos la primera. Sea  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  y  $j \in \mathbb{Z}$ , luego:

$$(\tau_p \tau_q x)_j = (\tau_p x)_{j-q} = x_{j-q-p} = (\tau_{p+q} x)_j. \quad \square$$

**56 Proposición** (El operador de convolución es invariante bajo desplazamientos). *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$  y sea  $q \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\tau_{-q}C(a)\tau_q = C(a)$ .*

*Demostración.* Sean  $q, j \in \mathbb{Z}$ , luego

$$\begin{aligned} (\tau_{-q}C(a)\tau_q x)_j &= (C(a)\tau_q x)_{j+q} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j+q-k}(\tau_q x)_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j+q-k}x_{k-q} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{j-l}x_l = (C(a)x)_j. \end{aligned} \quad \square$$

**57 Lema.** *Dados  $A \subseteq \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $P_{A+q}\tau_q = \tau_q P_A$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , luego por la definición del operador  $P_A$  y del operador de desplazamiento,

$$(P_{A+q}\tau_q x)_j = \begin{cases} (\tau_q x)_j, & j \in A+q; \\ 0, & j \notin A+q; \end{cases} = \begin{cases} x_{j-q}, & j-q \in A; \\ 0, & j-q \notin A. \end{cases}$$

$\square$

## 1.4. Operadores de Toeplitz

En esta sección veremos los operadores de Toeplitz en el espacio  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  y demostraremos el criterio de invertibilidad, utilizando el teorema de factorización de Wiener–Hopf.

Los operadores de Toeplitz se estudian en varios espacios: de Hardy, de Bergman, de Fock, etc. En particular, los operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy se pueden identificar con los operadores que se estudian en esta sección.

**58 Definición** (Operador de Toeplitz en el espacio  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ ). Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , definimos el operador de Toeplitz,  $T(a) : \ell^2(\mathbb{N}_0) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ,

$$(T(a)x)_j \doteq \sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}x_k, \quad j \in \mathbb{N}_0, x \in \ell^2(\mathbb{N}_0). \quad (1.18)$$

Identificamos el espacio  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  con la imagen del operador  $P_{\mathbb{N}_0}$ , esto es, con el conjunto de las sucesiones  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  tales que  $x_j = 0$  para cada  $j < 0$ . Después de esta identificación, podemos expresar el operador  $T(a)$  como el operador de convolución  $C(a)$  “truncado” por medio de la proyección  $P_{\mathbb{N}_0}$ :

**59 Proposición.** Sean  $a \in W(\mathbb{T})$  y  $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ . Entonces

$$T(a)x = P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0}x. \quad (1.19)$$

*Demostración.* Sea  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  y sea  $j \in \mathbb{Z}$ . Probemos que

$$(T(a)x)_j = (P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0}x)_j.$$

Si  $j < 0$ , entonces ambos lados de esta igualdad son cero. Si  $j \geq 0$ , entonces

$$(P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0}x)_j = (C(a)P_{\mathbb{N}_0}x)_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}(P_{\mathbb{N}_0}x)_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}x_k = (T(a)x)_j. \quad \square$$

**60 Proposición.** Sean  $a \in W(\mathbb{T})$  y  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , entonces

$$P_{\mathbb{N}_0-q}C(a)P_{\mathbb{N}_0-q}x = \tau_{-q}T(a)\tau_qP_{\mathbb{N}_0-q}x.$$

*Demostración.*

$$P_{\mathbb{N}_0-q}C(a)P_{\mathbb{N}_0-q} = P_{\mathbb{N}_0-q}\tau_{-q}C(a)\tau_qP_{\mathbb{N}_0-q} = \tau_{-q}P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0}\tau_q = \tau_{-q}T(a)\tau_q. \quad \square$$

**61 Proposición.** Para cada  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,

$$C(a)x = \lim_{q \rightarrow \infty} \tau_{-q}T(a)\tau_qP_{\mathbb{N}_0-q}x.$$

*Demostración.* Se sigue de las Proposiciones 53 y 60 haciendo tender  $q \rightarrow \infty$ .  $\square$

Los siguientes dos Lemas nos dirán cuando el operador de Toeplitz de un producto de símbolos es el producto de sus operadores de Toeplitz, es decir cuándo ocurre la igualdad  $T(ab) = T(a)T(b)$ .

**62 Lema.** *Sea  $b \in W_+(\mathbb{T})$ , entonces*

$$P_{\mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0} = C(b)P_{\mathbb{N}_0}.$$

*Demostración.* Calculemos la diferencia  $C(b)P_{\mathbb{N}_0} - P_{\mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0}$ :

$$C(b)P_{\mathbb{N}_0} - P_{\mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0} = (I_{\ell^2(\mathbb{Z})} - P_{\mathbb{N}_0})C(b)P_{\mathbb{N}_0} = P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0}.$$

Ahora, sea  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  luego, si  $j \geq 0$ , entonces  $(P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0}x)_j = 0$  por la acción de  $P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}$ .

Ahora si  $j < 0$ , entonces

$$(P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0}x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j-k}(P_{\mathbb{N}_0}x)_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{j-k}x_k = 0.$$

La última igualdad es cero puesto que  $b \in W_+(\mathbb{T})$ .  $\square$

**63 Lema.** *Sea  $a \in W_-(\mathbb{T})$ , entonces*

$$P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0} = P_{\mathbb{N}_0}C(a).$$

*Demostración.* De manera análoga, calculemos la diferencia  $P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0} - P_{\mathbb{N}_0}C(a)$ :

$$P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0} - P_{\mathbb{N}_0}C(a) = -P_{\mathbb{N}_0}C(a)(I_{\ell^2(\mathbb{Z})} - P_{\mathbb{N}_0}) = -P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}.$$

Ahora, sea  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , luego, si  $j < 0$ , entonces  $(P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}x)_j = 0$  por la acción de  $P_{\mathbb{N}_0}$ .

Ahora si  $j \geq 0$ , entonces

$$(C(a)P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k}(P_{\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0}x)_k = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0} a_{j-k}x_k = 0.$$

Por lo tanto, la última igualdad es cero puesto que  $a \in W_-(\mathbb{T})$ .  $\square$

**64 Proposición.** *Sean  $a, b \in W(\mathbb{T})$  tales que  $a \in W_-(\mathbb{T})$  o  $b \in W_+(\mathbb{T})$ . Entonces*

$$T(ab) = T(a)T(b).$$

*Demostración.* Sea  $x \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ , la afirmación se obtiene por la Proposición 59 junto con los Lemas 62 y 63:

$$T(a)T(b)x = P_{\mathbb{N}_0}C(a)P_{\mathbb{N}_0}C(b)P_{\mathbb{N}_0}x = P_{\mathbb{N}_0}C(a)C(b)P_{\mathbb{N}_0}x = T(ab)x. \quad \square$$

**65 Definición.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $S: H \rightarrow H$  un operador lineal acotado. Se dice que  $S$  es *acotado por abajo* si existe un número  $L > 0$  tal que

$$\text{para todo } f \in H \quad \|Sf\| \geq L\|f\|.$$

**66 Proposición.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $S: H \rightarrow H$  un operador lineal acotado. Entonces  $S$  es invertible si, y sólo si, este operador y su adjunto son acotados por abajo.

*Idea de demostración.* La necesidad es obvia: de la invertibilidad de  $S$  se sigue que es acotado por abajo, y la invertibilidad de  $S^*$  es equivalente a la invertibilidad de  $S$ . La suficiencia se sigue del teorema de Banach sobre operadores abiertos y de la identidad  $\text{clos}(S(H)) = (\ker(S^*))^\perp$ .  $\square$

**67 Proposición.** Sea  $a \in W(\mathbb{T})$  tal que el operador  $T(a)$  es invertible. Entonces  $C(a)$  es invertible.

*Demostración.* Sea  $L = \|T^{-1}(a)\|^{-1}$ . Entonces para cada  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  y cada  $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$  por la propiedad isométrica de  $\tau_p$  obtenemos

$$\|\tau_{-p}T(a)\tau_p P_{\mathbb{N}_0-p}x\| = \|T(a)\tau_p P_{\mathbb{N}_0-p}x\| \geq L\|\tau_p P_{\mathbb{N}_0-p}x\| = L\|P_{\mathbb{N}_0-p}x\|.$$

Pasando al límite cuando  $p \rightarrow \infty$  y por las Proposiciones 61 y 53 (de la convergencia fuerte de una sucesión de proyecciones al operador identidad) obtenemos

$$\|C(a)x\| \geq L\|x\|,$$

lo cual significa que  $C(a)$  es acotado por abajo. De manera similar se demuestra que  $C(a)^*$  es acotado por abajo, tomando en cuenta que  $T(a)^* = T(\bar{a})$  y  $C(a)^* = C(\bar{a})$ .  $\square$

**68 Corolario.** Sea  $a \in \exp(W_+(\mathbb{T}))$  o  $a \in \exp(W_-(\mathbb{T}))$ , entonces  $T(a)$  es invertible y  $T(a)^{-1} = T(a^{-1})$ .

*Demostración.* Se sigue de la Proposición 64.  $\square$

**69 Proposición.** Sea  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces  $T(\chi_m)$  es invertible si y sólo si  $m = 0$ .

*Demostración.* Si  $m = 0$ , entonces  $T(\chi_m)$  es el operador identidad. Si  $m > 0$ , entonces

$$T(\chi_m)x = \left( \underbrace{0, \dots, 0}_m, x_0, x_1, \dots \right),$$

así que  $T(\chi_m)$  no es suprayectivo. Si  $m < 0$ , entonces  $\chi_0, \dots, \chi_{m-1} \in \ker(T(\chi_m))$ , así que  $T(\chi_m)$  no es inyectivo.  $\square$

**70 Teorema** (Criterio de invertibilidad del operador de Toeplitz). *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , entonces  $T(a)$  es invertible si y sólo si  $0 \notin a(\mathbb{T})$  y  $\text{wind}(a) = 0$ .*

*Demostración.* Suficiencia. Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , puesto que  $\text{wind}(a) = 0$  y al aplicar la factorización Wiener–Hopf:

$$a = a_- a_+.$$

Por el Lema 64 se verifica  $T(a) = T(a_-)T(a_+)$ , así por el Corolario 68 se tiene,

$$T(a_+^{-1}) = T(a_+)^{-1}, \quad T(a_-^{-1}) = T(a_-)^{-1}.$$

Por lo tanto,  $T(a_+^{-1})T(a_-^{-1})$  es el operador inverso de  $T(a)$ .

Necesidad. Supongamos que  $T(a)$  es invertible, entonces  $C(a)$  es invertible por el Lema 67, luego por la Proposición 50 se tiene  $0 \notin a(\mathbb{T})$ . Más aún, denotemos a  $m = \text{wind}(a)$ , luego por la factorización Wiener–Hopf,  $a = a_- \chi_m a_+$  y aplicando el operador de Toeplitz:

$$T(a) = T(a_-)T(\chi_m)T(a_+),$$

luego  $T(a_-)^{-1}T(a)T(a_+)^{-1} = T(\chi_m)$ . Notemos que el operador de la parte izquierda de esta última igualdad es invertible por ser producto de operadores invertibles, así finalmente por el Corolario 69 se tiene que  $m = 0$ .  $\square$

**71 Corolario.** *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$ , entonces el espectro del operador  $T(a)$  es la unión del conjunto  $a(\mathbb{T})$  con el conjunto de los puntos  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\mathbb{T})$  para los cuales  $\text{wind}(a - \lambda) \neq 0$ :*

$$\text{sp}(T(a)) = a(\mathbb{T}) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus a(\mathbb{T}) : \text{wind}(a - \lambda) \neq 0\}.$$



# Capítulo 2

## Determinantes de matrices de Toeplitz de banda

En este capítulo trabajamos con matrices de Toeplitz de banda; en otras palabras, suponemos que el símbolo generador es un polinomio de Laurent. Demostramos la fórmula de Baxter–Schmidt [1] para determinantes de Toeplitz casi triangulares y el Teorema de Widom [19], que es una fórmula para los determinantes de Toeplitz de banda. Como consecuencia de ésta última se deduce el “segundo teorema límite” de Szegő. A diferencia de los textos mencionados arriba, el teorema de Baxter–Schmidt se deduce del teorema de Jacobi. La demostración del teorema de Widom se da de manera detallada y evita varios errores pequeños cometidos en el libro [2].

### 2.1. Matrices de Toeplitz

**72 Definición.** Una *matriz de Toeplitz* de orden  $n \in \mathbb{N}$  es una matriz de la forma

$$T_n(a) \doteq (a_{j-k})_{j,k=1}^n = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots & a_{-(n-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(n-2)} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-(n-3)} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{-(n-4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Vamos a suponer que los números  $a_n$  son los coeficientes de Fourier de una función  $a$  que pertenece al álgebra de Wiener (véase la Definición 25).

**73 Observación.** A veces será conveniente considerar en vez de la función  $a$  definida en

La función  $g$  definida en  $[0, 2\pi)$  o en todo  $\mathbb{R}$  mediante la fórmula

$$g(\theta) \doteq a(e^{i\theta}).$$

**74 Ejemplo.** Sea  $n = 6$ , entonces la matriz de Toeplitz de tamaño  $n = 6$  es de la forma

$$T_6(a) \doteq (a_{j-k})_{j,k=1}^6 = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & a_{-5} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices se caracterizan por que tienen términos constantes en sus diagonales. Observe que una matriz de éste tipo está determinada por su primera fila y su primera columna, esto es, por  $2n - 1$  números  $a_{-n+1}, \dots, a_0, \dots, a_{n-1}$ .

En la Sección 1.3 vimos que las propiedades del operador de convolución  $C(a)$  se describen fácilmente en términos de la función  $a$ .

En la teoría de matrices de Toeplitz el objetivo es describir algunas propiedades de las matrices  $T_n(a)$  en términos de la función  $a$ , al menos algunas propiedades asintóticas cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, las matrices de Toeplitz son objetos mucho más complicados que los operadores de convolución. En particular, el producto de matrices de Toeplitz por lo común no es matriz de Toeplitz.

**75 Ejemplo.** Es un ejemplo de dos matrices de Toeplitz cuyo producto no es matriz de Toeplitz. Consideremos símbolos generadores de la forma

$$a(t) = a_0 + a_1 t, \quad b(t) = b_{-1} t^{-1} + b_0, \quad a_0 \neq 0, \quad b_{-1} \neq 0.$$

Entonces

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$T_2(a)T_2(b) = \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_{-1} \\ a_1 b_0 & a_1 b_{-1} + a_0 b_0 \end{pmatrix}.$$

La siguiente proposición proporciona una condición suficiente para que el producto de matrices de Toeplitz se calcule fácilmente.

**76 Proposición.** Si  $a, b \in W_+(\mathbb{T})$ , entonces

$$T_n(ab) = T_n(a)T_n(b).$$

En otras palabras, el producto de matrices de Toeplitz triangulares inferiores es una matriz de Toeplitz triangular inferior.

*Demostración.* Calculemos la entrada  $(j, k)$  del producto  $T_n(a)T_n(b)$ .

$$(T_n(a)T_n(b))_{j,k} = \sum_{l=1}^n (T_n(a))_{j,l} (T_n(b))_{l,k} = \sum_{l=1}^n a_{j-l} b_{l-k}.$$

Hagamos el cambio de variable  $s = l - k$ , y puesto que  $l \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $s \in \{1 - k, \dots, n - k\}$ , por lo tanto

$$(T_n(a)T_n(b))_{j,k} = \sum_{s=1-k}^{n-k} a_{j-s-k} b_s,$$

y como  $a, b \in W_+(\mathbb{T})$ , entonces

$$a_p = 0 \quad \text{para todo } p < 0 \quad \text{y} \quad b_s = 0 \quad \text{para todo } s < 0,$$

es decir, sólo tenemos sumandos positivos  $j - s - k \geq 0$ , luego  $j - k \geq s$  por lo tanto

$$(T_n(a)T_n(b))_{j,k} = \sum_{s=1-k}^{n-k} a_{j-s-k} b_s = \sum_{s=0}^{j-k} a_{j-s-k} b_s = (ab)_{j-k} = (T_n(ab))_{j,k}. \quad \square$$

## 2.2. Localización del espectro de una matriz autoadjunta de Toeplitz

Se sabe que los espectros de matrices autoadjuntas son reales. En el caso de matrices autoadjuntas de Toeplitz podemos acotar sus valores propios por arriba y por abajo en términos de los valores del símbolo generador  $a$ .

**77 Notación.** Dada una matriz cuadrada compleja  $A$ , denotamos por  $\text{sp}(A)$  a su espectro.

**78 Proposición** (Expresión integral de la forma cuadrática asociada a una matriz de Toeplitz). Sean  $a \in W(\mathbb{T})$  y  $v \in \mathbb{C}^n$ . Entonces

$$v^* T_n(a) v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) |f(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

donde  $f$  es el polinomio asociado al vector  $v$ :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k t^k.$$

*Demostración.* Primero expresamos  $|f(e^{i\theta})|^2$  a través de  $v_0, \dots, v_{n-1}$  usando la identidad  $|z|^2 = z \bar{z}$ :

$$|f(e^{i\theta})|^2 = f(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{ki\theta} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}_j e^{-ji\theta} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} v_k \bar{v}_j e^{(k-j)i\theta}.$$

Ahora por la linealidad de la integral obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) |f(e^{i\theta})|^2 d\theta &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{v}_j v_k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) e^{-(j-k)i\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j-k} v_k \bar{v}_j = v^* T_n(a) v, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene usando la definición del producto de matrices y la definición de la matriz  $T_n(a)$ .  $\square$

**79 Corolario.** Sea  $v \in \mathbb{C}^n$ . Denotemos por  $f$  al polinomio asociado al vector  $v$ , como en la Proposición 78. Entonces la norma euclidiana del vector  $v$  coincide con la norma de la función  $f$  en el espacio  $L^2(\mathbb{T}, d\mu_{\mathbb{T}})$ :

$$\|v\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

*Demostración.* Se obtiene de la Proposición 78 al poner  $a(t) = 1$ . También es un caso particular de la identidad de Parseval.  $\square$

**80 Proposición** (Localización del espectro de una matriz autoadjunta de Toeplitz). *Sea  $a \in W(\mathbb{T})$  tal que  $a(\mathbb{T}) = [\alpha, \beta]$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha < \beta$ . Entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  se tiene*

$$\text{sp}(T_n(a)) \subset (\alpha, \beta).$$

*Demostración.* Como  $a$  tiene valores reales, sus coeficientes de Fourier satisfacen  $a_{-j} = \overline{a_j}$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, las matrices de Toeplitz  $T_n(a)$  son autoadjuntas, y sus valores propios son reales. Sea  $\lambda$  un valor propio de  $T_n(a)$  y sea  $v \in \mathbb{C}^n$  un vector propio normalizado asociado a  $\lambda$ , esto es,

$$T_n(a)v = \lambda v, \quad \|v\|_2 = 1.$$

Vamos a demostrar que  $\lambda > \alpha$ ; la desigualdad  $\lambda < \beta$  se demuestra de manera similar. Denotemos por  $f$  al polinomio con coeficientes  $v_0, \dots, v_{n-1}$ . Usando la Proposición 78 podemos escribir  $\lambda$  como

$$\lambda = \lambda v^* v = v^* T_n(a) v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\theta}) |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Aplicamos la desigualdad  $a(e^{i\theta}) \geq \alpha$  y el Corolario 79:

$$\lambda \geq \alpha.$$

Falta demostrar que la desigualdad es estricta. Razonando por contradicción, supongamos que  $\lambda = \alpha$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a(e^{i\theta}) - \alpha) |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = 0,$$

es decir,

$$(a(e^{i\theta}) - \alpha) |f(e^{i\theta})|^2 = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Como  $f$  es un polinomio, el conjunto de sus raíces es finito, por lo tanto, los puntos tales que  $f(e^{i\theta}) = 0$  forman un conjunto de medida cero, por lo tanto

$$a(e^{i\theta}) - \alpha = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Como  $a$  es continua, entonces la igualdad se cumple en todas partes, es decir  $a(e^{i\theta}) = \alpha$  para toda  $\theta \in [0, 2\pi)$ , y la imagen de  $a$  consiste en un solo punto  $\alpha$ :

$$a(\mathbb{T}) = \{\alpha\}.$$

Con esto contradecimos a la hipótesis  $a(\mathbb{T}) = [\alpha, \beta]$ .  $\square$

## 2.3. Fórmula de Baxter–Schmidt

La fórmula de Baxter–Schmidt se aplica a matrices de Toeplitz “casi triangulares” y nos da una manera para calcular sus determinantes de tamaño muy grande pasando a determinantes más pequeños. Nuestra herramienta principal para demostrar la fórmula de Baxter–Schmidt es el siguiente Teorema:

**81 Teorema** (de Jacobi, sobre los menores de la matriz adjunta clásica). *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  y sean  $J = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ ,  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  algunos subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Suponemos que  $j_1 < \dots < j_p$ ,  $k_1 < \dots < k_p$ . Denotemos por  $J'$  y  $K'$  los complementos de  $J$  y  $K$ :*

$$J' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J, \quad K' = \{1, 2, \dots, n\} \setminus K.$$

Entonces

$$M_{\text{adj}(A)} \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + \dots + j_p + k_1 + \dots + k_p} \det(A)^{p-1} M_A \begin{pmatrix} K' \\ J' \end{pmatrix}.$$

Aquí usamos la notación 120 para los menores de una matriz.

Una demostración de este teorema, basada en el concepto de la *matriz de menores*, se puede encontrar en [18].

Para nuestros fines, usaremos la versión de éste teorema con la inversa de  $A$ :

**82 Corolario.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  una matriz invertible. Entonces, en la notación del teorema anterior,*

$$M_{A^{-1}} \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} (-1)^{j_1 + \dots + j_p + k_1 + \dots + k_p} M_A \begin{pmatrix} K' \\ J' \end{pmatrix}.$$

**83 Notación.** Dado  $a \in W(\mathbb{T})$ , identificaremos a  $D_n(a)$  como el determinante de la matriz de Toeplitz de tamaño  $n$  generada por  $a$ :

$$D_n(a) \doteq \det T_n(a).$$

Ahora, veremos una relación estrecha entre conceptos de diferentes áreas de las matemáticas. A saber, se utilizan conceptos y herramientas de la variable compleja y el álgebra lineal para dar paso al teorema de Baxter–Schmidt. Primero tenemos las siguientes observaciones y notaciones.

**84 Observación.** En la definición de  $T_n(a)$  se usan solamente los coeficientes  $a_j$ , con  $|j| \leq n - 1$ . Por eso la Proposición 76 sigue siendo válida cuando  $a$  y  $b$  son series de potencias, sin importar la convergencia. Es decir, si

$$a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_0 \neq 0,$$

es una serie formal de potencias, podemos considerar la serie recíproca:

$$c(z) := 1/a(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots, \quad c_0 = a_0^{-1}.$$

**85 Observación.** Sea  $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$  una serie formal de potencias, y sea  $r \in \{1, 2, \dots\}$ . Si  $b = \chi_{-r}a$ , entonces  $b$  es de la forma

$$b(t) = t^{-r} \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-r} = \sum_{k=-r}^{\infty} a_{k+r} t^k,$$

y por lo tanto  $b_j = a_{j+r}$ . Más aún,  $T_n(\chi_{-r}a)$  es una matriz casi triangular inferior, con solamente  $r$  diagonales por arriba de la diagonal superior.

$$T_n(\chi_{-r}a) = (a_{j-k+r})_{j,k=1}^n.$$

Por ejemplo, para  $n = 6$  y  $r = 2$ ,

$$T_6(\chi_{-2}a) = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

**86 Teorema** (Baxter–Schmidt). *Sea  $a$  una serie formal de potencias, con  $a_0 \neq 0$  y sea  $c$  la serie recíproca. Si  $n, r \geq 1$ , entonces*

$$a_0^{-r} D_n(\chi_{-r}a) = (-1)^{rn} c_0^{-n} D_r(\chi_{-n}c). \quad (2.2)$$

**87 Ejemplo.** Antes de demostrar el teorema, veamos qué significa su enunciado para el caso particular  $n = 5$  y  $r = 2$ . En este caso, en la fórmula (2.2) participan los siguientes dos determinantes:

$$D_5(\chi_{-2}a) = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_2(\chi_{-5}c) = \begin{vmatrix} c_5 & c_4 \\ c_6 & c_5 \end{vmatrix}.$$

Se observa que estos determinantes son menores de las siguientes matrices triangulares:

$$A^{-1} \doteq T_7(a) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

y

$$A \doteq T_7(c) = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_6 & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \end{pmatrix}.$$

Usando el Corolario 82, el teorema Baxter–Schmidt expresa uno de estos menores en términos del otro:

$$a_0^{-2}D_5(\chi_{-2}a) = c_0^{-5}D_2(\chi_{-5}c).$$

*Demostración del teorema de Baxter–Schmidt.* Sea  $b \in W_+(\mathbb{T})$ , definamos

$$A = T_{n+r}(c), \quad A^{-1} = T_{n+r}(a).$$

Del Corolario 82 tenemos  $J = \{r+1, \dots, n+r\}$  y  $K = \{1, \dots, n\}$ , luego

$$J' = \{1, \dots, r\}, \quad K' = \{n+1, \dots, n+r\}.$$

Así de la Observación 85:

$$D_n(\chi_{-r}a) = \det [a_{j-k+r}]_{j,k=1}^n = M_{A^{-1}} \begin{pmatrix} r+1, \dots, r+n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Calculemos un elemento de la matriz del determinante anterior

$$\left( (A^{-1})_{1, \dots, n}^{r+1, \dots, n+r} \right)_{t,s} = (A^{-1})_{r+t,s} = (T_{n+r}(a))_{r+t,s} = a_{r+t-s}.$$

Aplicando el Corolario del Teorema de Jacobi 82,

$$D_n(\chi_{-r}a) = \frac{1}{c_0^{n+r}} (-1)^{rn} M_A \begin{pmatrix} n+1, \dots, n+r \\ 1, \dots, r \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, calculemos la entrada  $(t, s)$  de la submatriz anterior,

$$\left( A_{1, \dots, r}^{n+1, \dots, n+r} \right)_{t,s} = A_{n+t,s} = (T_{n+r}(c))_{n+t} = c_{n+t-s} = (T_r(\chi_{-n}c))_{t,s}.$$

Así finalmente

$$D_n(\chi_{-r}a) = \frac{1}{c_0^{n+r}} (-1)^{rn} D_r(\chi_{-n}c),$$

lo cual coincide con (2.2). □

## 2.4. Fórmula de Widom

Primero, vamos a definir a los polinomios de Laurent. Son funciones del álgebra de Wiener que tienen una cantidad finita de coeficientes de Fourier no cero. Les corresponden matrices de Toeplitz de banda que vamos a estudiar.

**88 Definición** (Polinomios de Laurent). Una función  $b: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  es un *polinomio de Laurent* si se puede escribir en la forma

$$b(t) = \sum_{j=-r}^s b_j t^j \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.3)$$

**89 Observación.** Si  $r \leq 0$  o  $s \leq 0$ , entonces  $T_n(b)$  es triangular superior o inferior y así  $D_n(b)$  es la  $n$ -ésima potencia de la entrada en la diagonal principal. Siempre excluimos este caso trivial y suponemos que  $r \geq 1$ ,  $s \geq 0$ ,  $b_{-r} \neq 0$ ,  $b_s \neq 0$ .

**90 Ejemplo** (Matriz de Toeplitz de banda). Si  $r = s = 1$ , entonces el polinomio  $b$  de la Definición 88 es de la forma

$$b(t) = b_{-1}t^{-1} + b_0 + b_1t,$$

esto es,  $b_j = 0$  para  $|j| > 1$ . En este caso las matrices de Toeplitz correspondientes son tridiagonales. Por ejemplo,

$$T_5(b) = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 & b_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_0 & b_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

**91 Observación.** Sea  $b$  un polinomio de Laurent de la forma (2.3), con  $r \geq 1$ ,  $s \geq 1$ ,  $b_{-r} \neq 0$ ,  $b_s \neq 0$ . Entonces

$$b(t) = b_s t^{-r} \prod_{j=1}^{r+s} (t - z_j), \quad (2.4)$$

donde  $z_1, \dots, z_{r+s}$  son las raíces de  $b$ . Notemos que  $z_1, \dots, z_{r+s}$  son también las raíces del polinomio

$$z^r b(z) = b_{-r} + b_{-r+1}z + \dots + b_s z^{r+s}.$$

Además la condición  $b_{-r} \neq 0$  asegura que todas las raíces  $z_1, \dots, z_{r+s}$  son distintas de cero.

La fórmula de Widom que vamos a demostrar en esta sección expresa los determinantes de matrices de Toeplitz de banda  $T_n(b)$  en términos de las raíces de  $b$ , suponiendo que estas raíces son simples. La complejidad de la fórmula de Widom crece rápidamente al aumentar el ancho de la banda, pero no depende de  $n$ .

Vamos a deducir la fórmula de Widom de la fórmula de Baxter–Schmidt. Para ello, vamos a expresar los coeficientes de  $c$  a través de las raíces del polinomio de Laurent.

**92 Lema.** *Sea  $a(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_p)$  un polinomio complejo mónico de grado  $p$ , con  $p$  raíces distintas a pares y diferentes de cero. Sea  $c$  la función recíproca de  $a$ :*

$$c(z) \doteq \frac{1}{a(z)}.$$

Entonces  $c$  se expande en una serie de potencias alrededor del origen, con radio de convergencia  $\min_{1 \leq j \leq p} |z_j|$ , de la siguiente manera:

$$c(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l, \tag{2.5}$$

donde

$$c_l = \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} \frac{B_j}{z_j^{l+1}}, \quad B_j = \prod_{k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}} -(z_j - z_k)^{-1}.$$

*Demostración.* Se sabe que una función racional tiene una descomposición en fracciones parciales. Descompongamos a la función  $c$  en fracciones parciales y denotemos por  $B_k$  al coeficiente que corresponde al polo  $z_k$ :

$$\frac{-1}{\prod_{k=1}^p (z - z_k)} = \sum_{k=1}^p \frac{B_k}{z - z_k}.$$

Para calcular  $B_j$  separamos el  $j$ -ésimo sumando y multiplicamos ambos lados por  $(z - z_j)$ :

$$\frac{-1}{\prod_{k=1}^p (z - z_k)} = \frac{B_j}{z - z_j} + \sum_{k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}} \frac{B_k}{z - z_k},$$

$$\frac{-1}{\prod_{k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}} (z - z_k)} = B_j + \sum_{k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}} \frac{B_k (z - z_j)}{z - z_k}.$$

Sustituyendo  $z = z_j$  obtenemos el coeficiente  $B_j$ :

$$B_j = -\frac{1}{\prod_{k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}} (z_j - z_k)}.$$

De lo anterior se sigue finalmente

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} \frac{B_j}{z_j - z} = \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} \frac{B_j}{z_j} \frac{1}{1 - z/z_j} \\ &= \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} \frac{B_j}{z_j} \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \frac{z^l}{z_j^l} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \left( \sum_{j \in \{1, \dots, p\}} \frac{B_j}{z_j^{l+1}} \right) z^l, \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir como (2.5). □

**93 Lema.** Sean  $z_1, z_2, \dots, z_m$  algunos números complejos. Entonces

$$\prod_{1 \leq j < k \leq m} z_j z_k = \prod_{j=1}^m z_j^{m-1}.$$

*Demostración.* El producto original se escribe como  $\prod z_j \prod z_k$ , luego los dos factores se calculan por separado:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq j < k \leq m} z_j &= \prod_{j=1}^m \prod_{k=j+1}^m z_j = \prod_{j=1}^m z_j^{m-j}, \\ \prod_{1 \leq j < k \leq m} z_k &= \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^{k-1} z_k = \prod_{k=1}^m z_k^{k-1} = \prod_{j=1}^m z_j^{j-1}. \end{aligned}$$

Juntando los productos se obtiene el resultado. □

**94 Lema.** Sean  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , algunos números complejos no nulos. Entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/u_1^{r-1} & \cdots & 1/u_r^{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & u_1^{r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & u_r^{r-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^r u_j^{-r+1} \prod_{\substack{1 \leq j, k \leq r \\ j \neq k}} (u_j - u_k). \quad (2.6)$$

*Demostración.* Por la Proposición 123 sobre el determinante de Vandermonde, el producto de determinantes queda como:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/u_1^{r-1} & \cdots & 1/u_r^{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & u_1^{r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & u_r^{r-1} \end{vmatrix} &= \prod_{1 \leq j < k \leq r} \left( \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_j} \right) \prod_{1 \leq j < k \leq r} (u_k - u_j) \\ &= \prod_{1 \leq j < k \leq r} \left( \frac{u_j - u_k}{u_k u_j} \right) \prod_{1 \leq j < k \leq r} (u_k - u_j) \\ &= \prod_{j=1}^r \frac{1}{u_j^{r-1}} \prod_{\substack{1 \leq j, k \leq r \\ j \neq k}} (u_j - u_k). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del Lema 93. □

**95 Teorema** (Widom). *Sea  $b$  un polinomio de Laurent de la forma (2.3), con  $b_{-r} \neq 0$ ,  $b_s \neq 0$ , y con  $r + s$  raíces distintas a pares  $z_1, \dots, z_{r+s}$ . Entonces para todo  $n \geq 1$ ,*

$$D_n(b) = \sum_M C_M w_M^n, \quad (2.7)$$

donde la suma es sobre todos los  $\binom{r+s}{s}$  subconjuntos  $M \subset \{1, 2, \dots, r+s\}$  de cardinalidad  $|M| = s$  y además  $\bar{M} \doteq \{1, 2, \dots, r+s\} \setminus M$ ,

$$w_M \doteq (-1)^s b_s \prod_{m \in M} z_m, \quad C_M \doteq \prod_{m \in M} z_m^r \prod_{\substack{m \in M \\ k \in \bar{M}}} (z_m - z_k)^{-1}.$$

*Demostración.* De la Observación 85 vemos que

$$D_n(b) = b_s^n D_n(\chi_{-r} a), \quad (2.8)$$

donde

$$a(z) = (z - z_1) \dots (z - z_{r+s}) = a_0 + a_1 z + \dots + z^{r+s}.$$

Denotemos a la función recíproca de  $a$  por  $c$ :

$$c(z) = 1/a(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

La fórmula de Baxter–Schmidt (Teorema 86) nos da

$$D_n(\chi_{-r} a) = (-1)^{rn} a_0^r c_0^{-n} D_r(\chi_{-n} c) = (-1)^{rn} a_0^{r+n} D_r(\chi_{-n} c). \quad (2.9)$$

Descompongamos  $c(z)$  en fracciones parciales, como en el Lema 92:

$$D_r(\chi_{-n} c) = \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n-r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n+r-1} & \cdots & c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_j B_j / z_j^{n+1} & \cdots & \sum_j B_j / z_j^{n-r+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_j B_j / z_j^{n+r} & \cdots & \sum_j B_j / z_j^{n+1} \end{vmatrix}.$$

La última matriz es el producto de dos matrices:

$$\begin{aligned} D_r(\chi_{-n} c) &= \begin{vmatrix} \sum_j B_j / z_j^{n+1} & \cdots & \sum_j B_j / z_j^{n-r+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_j B_j / z_j^{n+r} & \cdots & \sum_j B_j / z_j^{n+1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \left( \begin{array}{ccc} B_j & \cdots & B_{r+s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_j / z_1^{r-1} & \cdots & B_{r+s} / z_{r+s}^{r-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc} 1/z_1^{n+1} & \cdots & 1/z_1^{n-r+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/z_{r+s}^{n+1} & \cdots & 1/z_{r+s}^{n-r+2} \end{array} \right) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, por la fórmula de Cauchy–Binet (Proposición 122),

$$D_r(\chi_{-n}c) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq r+s} \begin{vmatrix} B_{j_1} & \cdots & B_{j_r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{j_1}/z_{j_1}^{r-1} & \cdots & B_{j_r}/z_{j_r}^{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/z_{j_1}^{n+1} & \cdots & 1/z_{j_1}^{n-r+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/z_{j_r}^{n+1} & \cdots & 1/z_{j_r}^{n-r+2} \end{vmatrix}.$$

Factorizamos  $B_{j_1}, \dots, B_{j_r}$  de las columnas del primer determinante:

$$D_r(\chi_{-n}c) = \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\}, |M|=s \\ \bar{M} = \{j_1, \dots, j_r\}, j_1 < \dots < j_r}} \frac{B_{j_1} \cdots B_{j_r}}{(z_{j_1} \cdots z_{j_r})^{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1/z_{j_1}^{r-1} & \cdots & 1/z_{j_r}^{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & z_{i_1}^{r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cdots & z_{i_r}^{r-1} \end{vmatrix}.$$

Luego aplicamos el Lema 93:

$$\begin{aligned} D_r(\chi_{-n}c) &= \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{j \in \bar{M}} B_j \right) \left( \prod_{j \in \bar{M}} z_j^{-n-1} \right) \left( \prod_{\substack{j, k \in \bar{M} \\ k \neq j}} (z_j - z_k) \right) \left( \prod_{j \in \bar{M}} z_j^{-r+1} \right) \\ &= \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{j \in \bar{M}} B_j \right) \left( \prod_{j \in \bar{M}} z_j^{-n-r} \right) \left( \prod_{\substack{j, k \in \bar{M} \\ k \neq j}} (z_j - z_k) \right). \end{aligned}$$

Reemplacemos  $B_j$  por su expresión del Lema 92:

$$B_j = - \prod_{l \neq j} (z_j - z_l)^{-1},$$

y simplifiquemos el siguiente producto:

$$\begin{aligned} \left( \prod_{j \in \bar{M}} B_j \right) \left( \prod_{\substack{j, k \in \bar{M} \\ k \neq j}} (z_j - z_k) \right) &= \prod_{j \in \bar{M}} \left( - \prod_{l \neq j} (z_j - z_l)^{-1} \right) \prod_{\substack{j, k \in \bar{M} \\ k \neq j}} (z_j - z_k) \\ &= (-1)^r \prod_{\substack{j \in \bar{M} \\ m \in M}} (z_j - z_m)^{-1} \prod_{\substack{j, l \in \bar{M} \\ l \neq j}} (z_j - z_l)^{-1} \prod_{\substack{j, k \in \bar{M} \\ k \neq j}} (z_j - z_k) \\ &= (-1)^{r+rs} \prod_{\substack{j \in \bar{M} \\ m \in M}} (z_j - z_m)^{-1}. \end{aligned}$$

Usando (2.8), (2.9) y lo anterior, se sigue

$$D_n(b) = b_s^n (-1)^{rs} a_0^{r+n} \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{j \in \bar{M}} z_j^{-r-n} \right) (-1)^{r+rs} \left( \prod_{\substack{j \in \bar{M} \\ m \in M}} (z_j - z_m)^{-1} \right),$$

dónde el término constante es  $a_0 = (-1)^{r+s}(z_1 z_2 \cdots z_{r+s})$ . Luego

$$D_n(b) = b_s^n (-1)^{rn+(r+s)(r+n)+r+rs} \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{m \in M} z_m^{n+r} \right) \left( \prod_{\substack{j \in \overline{M} \\ m \in M}} (z_j - z_m)^{-1} \right).$$

Note que  $rn + (r + s)(r + n) + r + rs \equiv 2rn + 2rs + r(r + 1) + sn \equiv sn \pmod{2}$  y además

$$\sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{m \in M} z_m^{n+r} \right) \left( \prod_{\substack{j \in \overline{M} \\ m \in M}} (z_j - z_m)^{-1} \right) = \sum_{\substack{M \subset \{1, \dots, r+s\} \\ |M|=s}} \left( \prod_{m \in M} z_m^{n+r} \right) \left( \prod_{\substack{k \in \overline{M} \\ m \in M}} (z_m - z_k)^{-1} \right).$$

Finalmente, al separar los productos que no dependen de  $n$  se obtiene:

$$w_M \doteq (-1)^s b_s \prod_{m \in M} z_m, \quad C_M \doteq \prod_{m \in M} z_m^r \prod_{\substack{m \in M \\ k \in \overline{M}}} (z_m - z_k)^{-1}. \quad \square$$

## Fórmula de Widom para el caso tridiagonal

**96 Ejemplo.** Apliquemos la fórmula de Widom (2.7), vista en la sección anterior, para calcular el determinante de la matriz de Toeplitz tridiagonal. En este caso  $r = s = 1$ , y el conjunto  $\{1, 2\}$  tiene dos subconjuntos de tamaño 1. Calculamos  $w_M$  y  $C_M$  para  $M = \{1\}$  y  $M = \{2\}$ :

$$\begin{aligned} w_{\{1\}} &= -b_1 z_1, & C_{\{1\}} &= \frac{z_1}{z_1 - z_2}, \\ w_{\{2\}} &= -b_1 z_2, & C_{\{2\}} &= \frac{z_2}{z_2 - z_1}. \end{aligned}$$

Aplicamos (2.7):

$$D_n(a) = (-b_1)^n \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2}. \quad (2.10)$$

## Algoritmo que realiza la fórmula de Widom

En el siguiente algoritmo se denota por `coefs` el arreglo  $(a_s, \dots, a_{-r})$ .

```

1 function D = detwidom(coefs, r, n),
    s = length(coefs) - r - 1;
3    z = roots(coefs);
    D = 0;
5    indices = 1 : (r + s);
    subsets = nchoosek(indices, s)';
7    for M = subsets,
        Mc = setdiff(indices, M);
9        w = ((-1) ^ s) * coefs(1) * prod(z(M));
        C = 1;
11       for j = M',
            differs = z(j) - z(Mc);
13         C = C * (z(j) ^ r) / prod(differs);
        endfor
15       D = D + C * (w ^ n);
    endfor
17 endfunction

```

Para hacer comprobaciones, escribimos la siguiente función que construye una matriz de Toeplitz a partir del arreglo de los coeficientes del polinomio de Laurent y calcula su determinante utilizando la función estándar de GNU Octave:

```

1 function D = detbandtoeplitz(coefs, r, n),
    s = length(coefs) - r - 1;
3    col = zeros(n, 1);
    row = zeros(n, 1);
5    col(1 : s + 1) = coefs(s + 1 : -1 : 1);
    row(1 : r + 1) = coefs(s + 1 : r + s + 1);
7    T = toeplitz(col, row);
    D = det(T);
9 endfunction

```

Pruebas numéricas muestran que la función `detwidom` regresa los mismos valores que la función `detbandtoeplitz`, pero es mucho más rápida para valores grandes de  $n$ .

## 2.5. Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta/2)$

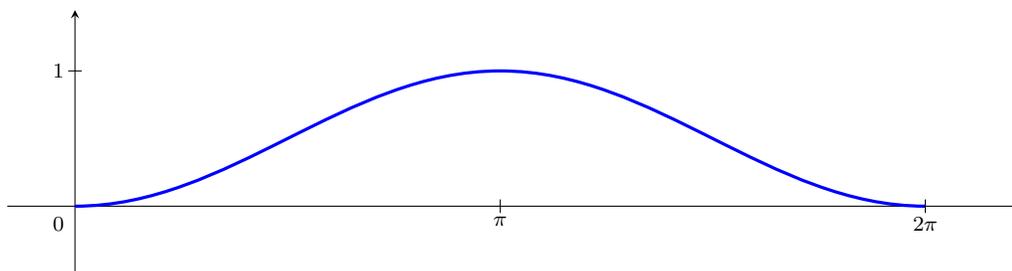
En esta sección haremos uso de la fórmula (2.10) para obtener el polinomio característico de la matriz de Toeplitz de orden  $n$  generada por el símbolo

$$g(\theta) = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}.$$

Con el cambio de variable  $t = e^{i\theta}$ , podemos escribir el símbolo generador como una función definida en  $\mathbb{T}$ :

$$a(t) = -\frac{t^{-1}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}.$$

La gráfica de  $g$  es:



En este ejemplo las matrices de Toeplitz son tridiagonales. Por ejemplo, para  $n = 6$ ,

$$T_6(a) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La imagen de  $g$  es  $[0, 1]$ , y por la Proposición 80 los espectros de  $T_n(a)$  están contenidos en  $(0, 1)$  para cada  $n$ . Para cada  $\lambda \in (0, 1)$  las raíces de la ecuación  $g(\theta) = \lambda$  son  $\theta_\lambda$  y  $-\theta_\lambda$ , donde

$$\theta_\lambda \doteq 2 \arcsen(\sqrt{\lambda}).$$

Por eso las raíces de la ecuación  $a(z) = \lambda$  son

$$z_1 = e^{i\theta_\lambda}, \quad z_2 = e^{-i\theta_\lambda}.$$

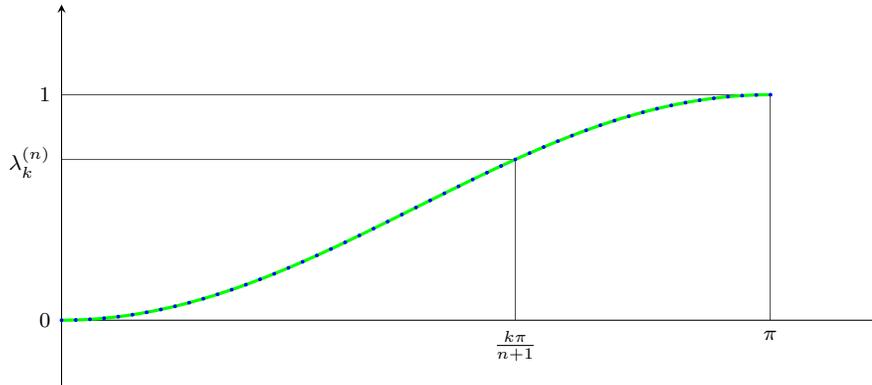
Para calcular el polinomio característico de  $T_n(a)$ , apliquemos la fórmula (2.10) con raíces de  $b = \lambda - a$ :

$$D_n(\lambda - a) = (-1)^n \frac{e^{(n+1)i\theta_\lambda} - e^{-(n+1)i\theta_\lambda}}{4^n (e^{i\theta_\lambda} - e^{-i\theta_\lambda})} = (-1)^n \frac{\text{sen}((n+1)\theta_\lambda)}{4^n \text{sen}(\theta_\lambda)}. \quad (2.11)$$

Resolviendo la ecuación  $D_n(\lambda - a) = 0$  obtenemos  $\theta_\lambda = \frac{k\pi}{n+1}$ . La condición  $0 < \theta_\lambda < \pi$  implica que  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto, los valores propios son

$$\lambda_k^{(n)} = \text{sen}^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El siguiente dibujo muestra que los valores propios  $\lambda_k^{(n)}$  de la matriz  $T_n(a)$  se obtienen como los valores de la función  $g$  en los puntos equidistantes  $k\pi/(n+1)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .



## 2.6. Teorema límite de Szegő

En esta sección vamos a deducir de la fórmula de Widom el teorema límite de Szegő sobre los determinantes de matrices de Toeplitz, el cuál nos da una fórmula asintótica para el calculo de  $D_n(b)$ . Nos restringimos al caso de matrices de Toeplitz de banda.

Sea  $b$  un polinomio de Laurent, y suponga que

$$0 \notin b(\mathbb{T}) \quad \text{y} \quad \text{wind}(b) = 0. \quad (2.12)$$

Por la Proposición 31 la función  $b$  pertenece al grupo exponencial del álgebra de Wiener, esto es, existe una función  $h \in W(\mathbb{T})$  tal que  $b = \exp(h)$ . Claramente  $h$  se determina por la adición de una constante en  $2\pi i\mathbb{Z}$ . Sea  $h_k$  el  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier del  $h$ . Denotemos por  $G(b)$  y  $E(b)$  los siguientes dos números:

$$G(b) \doteq \exp(h_0), \quad (2.13)$$

$$E(b) \doteq \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} kh_k h_{-k}\right). \quad (2.14)$$

Como  $b \in C^\infty(\mathbb{T})$ , la función  $h$  pertenece también a  $C^\infty(\mathbb{T})$ . Esto implica que  $h_k = O(1/|k|^m)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, la serie (2.14) converge absolutamente. Las constantes  $G(b)$  y  $E(b)$  no dependen de la elección de  $h$ .

Los números  $G(b)$  y  $E(b)$  se pueden expresar a través de las raíces de  $b$ .

**97 Lema** (Fórmulas para  $E(b)$  y  $G(b)$ ). *Sea  $b$  un polinomio de Laurent de tal forma que*

$$0 \notin b(\mathbb{T}) \quad \text{y} \quad \text{wind}(b) = 0.$$

*con  $z_1, \dots, z_{r+s}$  raíces de  $b$  indexadas de tal manera que  $|z_1| \leq \dots \leq |z_{r+s}|$ . Entonces*

$$G(b) = b_s (-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j, \quad (2.15)$$

$$E(b) = \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j^r \prod_{j=r+1}^{r+s} \prod_{l=1}^r \frac{1}{z_j - z_l}. \quad (2.16)$$

*Demostración.* Sea

$$b(t) = b_s t^{-r} \prod_{j=1}^{r+s} (t - z_j) \quad t \in \mathbb{T}.$$

Notemos que  $z_1, \dots, z_{r+s}$  son distintas de 0 y no pertenecen a la circunferencia unitaria. Por la Proposición 16,  $\text{wind}(b)$  es el número de raíces de  $b$  que están dentro de la circunferencia unitaria, menos el número  $r$ . La hipótesis  $\text{wind}(b) = 0$  implica que  $b$  tiene

exactamente  $r$  raíces dentro de la circunferencia unitaria y  $s$  raíces están fuera de ésta. Es decir, podemos ordenar las raíces  $z_1, z_2, \dots, z_{r+s}$  del polinomio de Laurent (2.3) de la siguiente manera:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| < 1 < |z_{r+1}| \leq \dots \leq |z_{r+s}|.$$

Así

$$b(t) = b_s(-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{z_j}{t}\right) \prod_{j=r+1}^{r+s} \left(1 - \frac{t}{z_j}\right).$$

Por lo tanto la siguiente función es un logaritmo de  $b$ :

$$h(t) = \log \left( b_s(-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j \right) + \sum_{j=1}^r \log_1 \left( 1 - \frac{z_j}{t} \right) + \sum_{j=r+1}^{r+s} \log_1 \left( 1 - \frac{t}{z_j} \right).$$

Aquí  $\log$  es algún logaritmo del número indicado (por ejemplo, el logaritmo principal), y  $\log_1$  es el logaritmo definido por la serie de Mercator. Entonces

$$h(t) = \log \left( b_s(-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r -\frac{z_j^k}{kt^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=r+1}^{r+s} -\frac{t^k}{kz_j^k}.$$

Ahora podemos calcular los coeficientes de Fourier de  $h$ :

$$h_0 = \log \left( b_s(-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j \right), \quad h_k = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{r+s} \frac{1}{z_j^k}, \quad h_{-k} = -\frac{1}{k} \sum_{j=1}^r z_j^k.$$

Por definición de  $G(b)$  y de  $E(b)$  obtenemos

$$\begin{aligned} G(b) &= \exp(h_0) = b_s(-1)^s \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j, \\ E(b) &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} k \left( -\frac{1}{k} \sum_{j=r+1}^{r+s} \frac{1}{z_j^k} \right) \left( -\frac{1}{k} \sum_{l=1}^r z_l^k \right) = \exp \left( \sum_{j=r+1}^{r+s} \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z_l}{z_j} \right)^k \right) \\ &= \exp \left( -\sum_{l=1}^r \sum_{j=r+1}^{r+s} \log \left( 1 - \frac{z_l}{z_j} \right) \right) = \prod_{j=r+1}^{r+s} \prod_{l=1}^r \frac{z_j}{z_j - z_l} = \prod_{j=r+1}^{r+s} z_j^r \prod_{j=r+1}^{r+s} \prod_{l=1}^r \frac{1}{z_j - z_l}, \end{aligned}$$

lo cual coincide con (2.16) y (2.15).  $\square$

**98 Lema** (Sobre el comportamiento asintótico de una suma de progresiones geométricas). Sean  $d_1, \dots, d_m$  y  $c_1, \dots, c_m$  algunos números complejos. Consideremos la sucesión  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  definida mediante la regla

$$X_n = \sum_{j=1}^m c_j d_j^n.$$

Supongamos que  $|d_1| > |d_j|$  para cada  $j$  en  $\{2, \dots, m\}$  y que  $c_1 \neq 0$ . Entonces

$$X_n = c_1 d_1^n (1 + O(q^n)),$$

donde

$$q = \frac{1}{|d_1|} \max_{2 \leq j \leq m} |d_j|.$$

*Demostración.* Factoricemos a  $X_n$  como

$$X_n = c_1 d_1^n (1 + Y_n),$$

donde

$$Y_n = \sum_{j=2}^m \frac{c_j}{c_1} \left( \frac{d_j}{d_1} \right)^n.$$

Acotemos a  $|Y_n|$  superiormente:

$$|Y_n| \leq \frac{1}{|c_1|} \sum_{j=2}^m |c_j| \left| \frac{d_j}{d_1} \right|^n \leq \frac{q^n}{|c_1|} \sum_{j=2}^m |c_j|.$$

De la última expresión se ve que  $Y_n = O(q^n)$ . □

**99 Teorema** (Teorema fuerte de Szegő sobre el comportamiento asintótico de los determinantes de matrices de Toeplitz). *Sea  $b$  un polinomio de Laurent*

$$b(t) = \sum_{j=-r}^s b_j t^j, \quad t \in \mathbb{T},$$

tal que  $b$  tiene  $r + s$  raíces diferentes,

$$0 \notin b(\mathbb{T}) \quad \text{y} \quad \text{wind}(b) = 0.$$

Entonces existe  $q \in (0, 1)$  tal que

$$D_n(b) = (G(b))^n E(b) (1 + O(q^n)), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

*Demostración.* Como ya vimos en el Lema 97, el polinomio de Laurent  $b$  puede ser escrito como

$$b(t) = b_s t^{-r} \prod_{j=1}^{r+s} (t - z_j), \quad t \in \mathbb{T},$$

donde las normas de las raíces son ordenadas de la siguiente manera:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| < 1 < |z_{r+1}| \leq \dots \leq |z_{r+s}|.$$

Denotemos por  $q$  al cociente

$$q \doteq \frac{|z_r|}{|z_{r+1}|}$$

y definamos al conjunto  $M_0$  como

$$M_0 \doteq \{r+1, \dots, r+s\}.$$

Ahora, para cada subconjunto  $M \subset \{1, 2, \dots, r+s\}$  con  $|M| = s$  y  $M \neq M_0$  escribamos sus elementos  $j_1, j_2, \dots, j_s$  de forma creciente, entonces

$$j_s \leq r+s, \quad j_{s-1} \leq r+s-1, \quad \dots \quad j_2 \leq r+1, \quad j_1 \leq r+1.$$

Como  $M \neq M_0$ , existe una desigualdad estricta, por lo tanto  $j_1 < r+1$ , es decir  $j_1 \leq r$ . Así para  $M \subset \{1, 2, \dots, r+s\}$  y las condiciones anteriores se tiene

$$\frac{|w_M|}{|w_{M_0}|} = \frac{|z_{j_1}| |z_{j_2}| \dots |z_{j_s}|}{|z_{r+1}| |z_{r+2}| \dots |z_{r+s}|} = \frac{|z_{j_1}|}{|z_{r+1}|} \frac{|z_{j_2}| \dots |z_{j_s}|}{|z_{r+2}| \dots |z_{r+s}|} \leq \frac{|z_{j_1}|}{|z_{r+1}|} \leq \frac{|z_r|}{|z_{r+1}|} = q.$$

Por otro lado del teorema de Widom, factorizamos al sumando que contiene a  $M_0$ . Luego del Lema 98 (del comportamiento asintótico de una suma de progresiones geométricas) se obtiene

$$D_n(b) = w_{M_0}^n C_{M_0} (1 + O(q^n)).$$

Comparando lo anterior con (2.15) y (2.16):

$$w_{M_0} = b_s (-1)^s \prod_{j \in M_0} z_j = G(b),$$

$$C_{M_0} = \prod_{j \in M_0} z_j^r \prod_{\substack{j \in M_0 \\ k \in M}} (z_j - z_k)^{-1} = E(b).$$

Finalmente se obtiene (2.17). □

**100 Corolario.** *Sea  $b$  un polinomio de Laurent*

$$b(t) = \sum_{j=-r}^s b_j t^j, \quad t \in \mathbb{T},$$

tal que

$$0 \notin b(\mathbb{T}) \quad \text{y} \quad \text{wind}(b) = 0.$$

Además supongamos que  $b$  tiene  $r+s$  raíces diferentes. Entonces existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq k$  la matriz  $T_n(b)$  es invertible.



# Capítulo 3

## Determinantes de matrices de Toeplitz de banda reales simétricas

Consideremos matrices de Toeplitz generadas por un polinomio de Laurent simétrico con coeficientes reales:

$$b(t) = \sum_{k=-r}^r b_k t^k, \quad b_j = b_{-j} \in \mathbb{R}.$$

Además suponemos que la ecuación  $b(z) = 0$  tiene  $2r$  raíces diferentes a pares. En este caso Elouafi [10] expresó  $D_n(b)$  a través de polinomios de Chebyshev (de primer, segundo, tercer y cuarto tipo) evaluados en las raíces de cierto polinomio de grado  $r$ . Este capítulo contiene una demostración detallada la fórmula de Elouafi. Además se agregan algunas herramientas auxiliares y un ejemplo.

### 3.1. Polinomios de Chebyshev de cuatro tipos

Esta sección contiene la información necesaria sobre los polinomios de Chebyshev (también se escribe como Tschebyshev, Tschebyscheff, etc.) de cuatro tipos. Partiendo de la definición recursiva, veremos su relación con funciones trigonométricas e hiperbólicas.

**101 Definición** (Polinomios de Chebyshev). Las sucesiones de *polinomios de Chebyshev* de primer, segundo, tercer y cuarto tipo se denotan por  $(\mathcal{T}_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $(\mathcal{U}_n)_{n=0}^{\infty}$ ,  $(\mathcal{V}_n)_{n=0}^{\infty}$  y  $(\mathcal{W}_n)_{n=0}^{\infty}$  respectivamente, y se definen por medio de las siguientes fórmulas recursivas y

condiciones iniciales:

$$\mathcal{T}_n(x) = 2x\mathcal{T}_{n-1}(x) - \mathcal{T}_{n-2}(x),$$

$$\mathcal{T}_0(x) = 1, \quad \mathcal{T}_1(x) = x,$$

$$\mathcal{U}_n(x) = 2x\mathcal{U}_{n-1}(x) - \mathcal{U}_{n-2}(x),$$

$$\mathcal{U}_0(x) = 1, \quad \mathcal{U}_1(x) = 2x,$$

$$\mathcal{V}_n(x) = 2x\mathcal{V}_{n-1}(x) - \mathcal{V}_{n-2}(x),$$

$$\mathcal{V}_0(x) = 1, \quad \mathcal{V}_1(x) = 2x - 1,$$

$$\mathcal{W}_n(x) = 2x\mathcal{W}_{n-1}(x) - \mathcal{W}_{n-2}(x),$$

$$\mathcal{W}_0(x) = 1, \quad \mathcal{W}_1(x) = 2x + 1.$$

Note que los cuatro tipos de polinomios se definen con la misma fórmula recursiva, y la única diferencia consiste en las condiciones iniciales.

**102 Proposición** (Expresión de polinomios de Chebyshev a través de funciones trigonométricas). *Para todo  $\theta \in \mathbb{C}$  y con  $x = \cos(\theta)$ ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(x) &= \cos(n\theta), & \mathcal{U}_n(x) &= \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} \\ \mathcal{V}_n(x) &= \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos(\frac{\theta}{2})}, & \mathcal{W}_n(x) &= \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

*Demostración.* Empecemos con la fórmula para  $\mathcal{T}_n$ . Fijemos  $\theta \in \mathbb{R}$ , y procederemos por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  y  $n = 1$  la fórmula es clara. La demostraremos para  $n + 1$  suponiendo que se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n+1}(\cos \theta) &= 2x\mathcal{T}_n(\cos \theta) - \mathcal{T}_{n-1}(\cos \theta) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\cos \theta \cos n\theta - \cos(n-1)\theta \\ &\stackrel{(**)}{=} \cos(\theta + n\theta) + \cos(\theta - n\theta) - \cos(n-1)\theta = \cos(n+1)\theta. \end{aligned}$$

En la igualdad (\*) se usa la hipótesis inductiva y en la igualdad (\*\*) usamos la identidad trigonométrica (B.3). Ahora demostremos de manera análoga el paso inductivo para el polinomio de segundo tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{n+1}(\cos \theta) &= 2x\mathcal{U}_n(\cos \theta) - \mathcal{U}_{n-1}(\cos \theta) \\ &= 2\cos \theta \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen} \theta} - \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{2\operatorname{sen}(n+1)\theta \cos \theta - \operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(n\theta + 2\theta) + \operatorname{sen}(n\theta) - \operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen}(n+2)\theta}{\operatorname{sen} \theta}. \end{aligned}$$

Para los polinomios de tercer tipo se usa la identidad (B.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n+1}(\cos \theta) &= 2x \mathcal{V}_n(\cos \theta) - \mathcal{V}_{n-1}(\cos \theta) = \frac{2 \cos \theta \cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\cos(n - \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\cos(n + \frac{3}{2})\theta + \cos(n - \frac{1}{2})\theta - \cos(n - \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(n + \frac{3}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Finalmente para el polinomio de cuarto tipo, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{n+1}(\cos \theta) &= 2x \mathcal{W}_n(\cos \theta) - \mathcal{W}_{n-1}(\cos \theta) \\ &= \frac{2 \cos \theta \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} - \frac{\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{3}{2})\theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.\end{aligned}\quad \square$$

Cuando los argumentos de los polinomios de Chebyshev son números reales con módulos mayores que 1, es útil el cambio de variable hiperbólico.

**103 Lema** (Relación de funciones hiperbólicas y polinomios de Chebyshev). *Sea  $\xi \in \mathbb{C}$ , entonces se tienen las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n(\cosh \xi) &= \cosh(n\xi), & \mathcal{U}_n(\cosh \xi) &= \frac{\operatorname{senh}(n+1)\xi}{\operatorname{senh}(\xi)} \\ \mathcal{V}_n(\cosh \xi) &= \frac{\cosh(n + \frac{1}{2})\xi}{\cosh(\frac{\xi}{2})}, & \mathcal{W}_n(\cosh \xi) &= \frac{\operatorname{senh}(n + \frac{1}{2})\xi}{\operatorname{senh}(\frac{\xi}{2})}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

*Demostración.* Demostremos las fórmulas por inducción, usando la definición recursiva de los polinomios de Chebyshev. Dado  $\xi \in \mathbb{C}$ , para  $n = 1$  es claro, veamos que pasa en el siguiente paso, es decir para  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n+1}(\cosh \xi) &= 2 \cosh(\xi) \mathcal{T}_n(\cosh n\xi) - \mathcal{T}_{n-1}(\cosh \xi) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2 \cosh(\xi) \cosh(n\xi) - \cosh((n-1)\xi) \\ &\stackrel{(**)}{=} \cosh(\xi + n\xi) + \cosh(\xi - n\xi) - \cosh((n-1)\xi) \\ &= \cosh((n+1)\xi).\end{aligned}$$

En la igualdad (\*) se utiliza la hipótesis inductiva y en la igualdad (\*\*) se usan identidades

de la Proposición 127.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{n+1}(\cosh \xi) &= 2 \cosh(\xi) \mathcal{U}_n(\cosh n\xi) - \mathcal{U}_{n-1}(\cosh \xi) \\
 &\stackrel{(*)}{=} 2 \cosh(\xi) \frac{\sinh(n+1)\xi}{\sinh(\xi)} - \frac{\sinh(n\xi)}{\sinh(\xi)} \\
 &= \frac{\sinh(\xi + (n+1)\xi) - \sinh(\xi - (n+1)\xi) - \sinh(n\xi)}{\sinh \xi} \\
 &= \frac{\sinh(n+2)\xi}{\sinh(\xi)}.
 \end{aligned}$$

También, en el paso (\*) se usa la hipótesis inductiva. Para los polinomios de tercer y cuarto tipo, la demostración del paso inductivo es análoga:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{n+1}(\cosh \xi) &= 2 \cosh(\xi) \mathcal{V}_n(\cosh \xi) - \mathcal{V}_{n-1}(\cosh \xi) \\
 &= 2 \cosh(\xi) \frac{\cosh(n + \frac{1}{2})\xi}{\cosh \frac{\xi}{2}} - \frac{\cosh(n - \frac{1}{2})\xi}{\cosh \frac{\xi}{2}} \\
 &= \frac{\cosh(n + \frac{3}{2})\xi + \cosh(n - \frac{1}{2})\xi - \cosh(n - \frac{1}{2})\xi}{\cosh \frac{\xi}{2}} \\
 &= \frac{\cosh(n + \frac{3}{2})\xi}{\cosh \frac{\xi}{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{n+1}(\sinh \xi) &= 2 \sinh(\xi) \mathcal{W}_n(\sinh \xi) - \mathcal{W}_{n-1}(\sinh \xi) \\
 &= 2 \sinh(\xi) \frac{\sinh(n + \frac{1}{2})\xi}{\sinh \frac{\xi}{2}} - \frac{\sinh(n - \frac{1}{2})\xi}{\sinh \frac{\xi}{2}} \\
 &= \frac{\sinh(n + \frac{3}{2})\xi + \sinh(n - \frac{1}{2})\xi - \sinh(n - \frac{1}{2})\xi}{\sinh \frac{\xi}{2}} \\
 &= \frac{\sinh(n + \frac{3}{2})\xi}{\sinh \frac{\xi}{2}}.
 \end{aligned}$$

□

### 3.2. Coeficientes de la función recíproca en el caso real simétrico

En esta sección se muestra que si  $b$  es un polinomio de Laurent real simétrico, entonces los coeficientes de la expansión de Taylor de la función  $1/b$  se pueden expresar por medio de los polinomios de Chebyshev.

**104 Observación.** Note que  $b(z) = b(1/z)$ , y si  $\zeta$  es una raíz de  $b$ , entonces también lo es  $1/\zeta$ .

Así las raíces de  $b$  son  $\zeta_j, \frac{1}{\zeta_j}, j = 1, \dots, r$ . Recordando (3.1) se sigue que

$$\mathcal{U}_n \left( \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right) = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{-n-1}}{\zeta - \zeta^{-1}}, \quad \mathcal{T}_n \left( \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \zeta^n + \frac{1}{\zeta^n} \right).$$

**105 Lema.** Si  $g(z) = z^r b(z)$ , entonces en alguna vecindad del origen  $1/g(z)$  se puede desarrollar en serie de potencias:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

donde

$$c_n = \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_{n+r-1}(y_k),$$

con  $y_j = \frac{1}{2} \left( \zeta_j + \frac{1}{\zeta_j} \right)$  y

$$\lambda_j = \left( \zeta_j - \frac{1}{\zeta_j} \right) \frac{\zeta_j^{r-1}}{g'(\zeta_j)},$$

más aún,

$$\text{para todo } j \in \{-1, 0, \dots, r-2\}, \quad \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_j(y_k) = 0.$$

*Demostración.* Como los polos  $\zeta_l$  y  $1/\zeta_l, l \in \{1, 2, \dots, r\}$  de la función racional  $\frac{1}{g(z)}$  son simples, la expansión en fracciones parciales de esta función es

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{l=1}^r \left( \frac{\gamma_l}{z - \zeta_l} + \frac{\eta_l}{z - \zeta_l^{-1}} \right),$$

donde  $\gamma_l$  y  $\eta_l$  están dados por las fórmulas

$$\gamma_l = \frac{1}{g'(\zeta_l)}, \quad \eta_l = \frac{1}{g'(\zeta_l^{-1})}.$$

Por otro lado, de la relación  $g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^r}b\left(\frac{1}{z}\right)$  se tiene  $g(z) = z^{2r}g\left(\frac{1}{z}\right)$ , así

$$g'(z) = 2rz^{2r-1}g\left(\frac{1}{z}\right) - z^{2r-2}g'\left(\frac{1}{z}\right),$$

por lo tanto  $\eta_l = -\frac{\zeta_l^{2r-2}}{g'(\zeta_l)}$ . Ahora si denotamos a

$$c_n \doteq \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_{n+r-1}(y_k),$$

y usando la relación

$$\mathcal{U}_k\left(\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right) = \frac{\zeta^{k+1} - \zeta^{-k-1}}{\zeta - \zeta^{-1}}, \quad \text{para } k \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\},$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n &= \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n+r-1}(y_k) z^n \right) = \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k}{\zeta_k - \zeta_k^{-1}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_k^{n+r} z^n - \zeta_k^{-n-r} z^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{\zeta_k^{r-1}}{g'(\zeta_k)} \left( \frac{\zeta_k^r}{1 - \zeta_k z} - \frac{\zeta_k^{-r}}{1 - \zeta_k^{-1} z} \right) = \sum_{k=1}^r \left( \frac{\zeta_k^{2r-2}}{g'(\zeta_k) \zeta_k^{-1} - z} - \frac{1}{g'(\zeta_k) \zeta_k - z} \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \left( \frac{\gamma_k}{z - \zeta_k} - \frac{\eta}{z - \zeta_k^{-1}} \right) = \frac{1}{g(z)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $-1 \leq j \leq r-1$ , la expansión en fracciones parciales de la función racional  $\frac{z^{r+j}}{g(z)}$  es

$$\frac{z^{r+j}}{g(z)} = \sum_{l=1}^r \left( \frac{\zeta_l^{r+j}}{g'(\zeta_k)} \frac{1}{z - \zeta_l} + \frac{\zeta_l^{-r-j}}{g'(\zeta_k^{-1})} \frac{1}{z - \zeta_l^{-1}} \right) = \sum_{l=1}^r \left( \frac{\zeta_l^{r+j}}{g'(\zeta_k)} \frac{1}{z - \zeta_l} - \frac{\zeta_l^{r-j-2}}{g'(\zeta_k)} \frac{1}{z - \zeta_l^{-1}} \right),$$

se sigue que

$$\frac{z^{r+j+1}}{g(z)} = \sum_{l=1}^r \left( \frac{\zeta_l^{r+j}}{g'(\zeta_k)} \frac{z}{z - \zeta_l} - \frac{\zeta_l^{r-j-2}}{g'(\zeta_k)} \frac{z}{z - \zeta_l^{-1}} \right),$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Como el grado de  $g$  es  $2r > r + j + 1$  entonces  $\frac{z^{r+j+1}}{g(z)}$  tiende a cero cuando  $z$  tiende a infinito, así se deduce que

$$\sum_{l=1}^r \left( \frac{\zeta_l^{r+j}}{g'(\zeta_k)} - \frac{\zeta_l^{r-j-2}}{g'(\zeta_k)} \right) = 0.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_j(y_k) &= \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_k}{\zeta_k - \zeta_k^{-1}} (\zeta_k^{j+1} - \zeta_k^{-j-1}) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{\zeta_k^{r-1}}{g'(\zeta_k)} (\zeta_k^{j+1} - \zeta_k^{-j-1}) = \sum_{k=1}^r \left( \frac{\zeta_k^{r+j}}{g'(\zeta_k)} - \frac{\zeta_k^{r-j-2}}{g'(\zeta_k)} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.3. Fórmula de Elouafi

En esta sección se demuestra la fórmula de Elouafi para determinantes de matrices de Toeplitz generadas por polinomios de Laurent reales simétricos

$$b(z) = \sum_{k=-r}^r b_k z^k.$$

**106 Lema.** *Supongamos que el polinomio  $g(z) = z^r b(z)$  tiene  $2r$  raíces diferentes a pares. Entonces sus raíces se pueden escribir como  $\zeta_j, \frac{1}{\zeta_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, r\}$ , y los números  $y_k = \frac{1}{2} \left( \zeta_k + \frac{1}{\zeta_k} \right)$  son los ceros del polinomio*

$$q(x) \doteq b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k(x). \quad (3.3)$$

*Demostración.* De la Observación 104, obtenemos la relación:

$$\mathcal{T}_k \left( \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right),$$

deducimos que

$$b(\zeta) = b_0 + \sum_{k=1}^r b_k \left( \zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k \left( \frac{1}{2} \left( \zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) \right), \quad (3.4)$$

y así

$$b(\zeta_j) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k(y_j) = 0.$$

Es decir, los  $y_j$  son los ceros del polinomio  $q(x)$ . □

**107 Teorema** (Elouafi). *Supongamos que el polinomio  $g(z) = z^r b(z)$  tiene  $2r$  raíces diferentes, y definimos  $y_k$ ,  $k \in \{1, \dots, r\}$  como en el lema anterior. Entonces para cada  $p \geq 1$ ,*

$$D_{2p+1}(b) = \frac{(-1)^r b_r^{2p+1}}{2^{r(r-2)}} \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{U}_p(y_1) & \cdots & \mathcal{U}_p(y_r) \\ \mathcal{U}_{p+1}(y_1) & \cdots & \mathcal{U}_{p+1}(y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_{p+r-1}(y_1) & \cdots & \mathcal{U}_{p+r-1}(y_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{T}_{p+1}(y_1) & \cdots & \mathcal{T}_p(y_r) \\ \mathcal{T}_{p+2}(y_1) & \cdots & \mathcal{T}_{p+2}(y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{T}_{p+r}(y_1) & \cdots & \mathcal{T}_{p+r}(y_r) \end{vmatrix}}{\Lambda(y_1, \dots, y_r)^2},$$

y

$$D_{2p}(b) = \frac{b_r^{2p}}{2^{r(r-1)}} \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{V}_p(y_1) & \cdots & \mathcal{V}_p(y_r) \\ \mathcal{V}_{p+1}(y_1) & \cdots & \mathcal{V}_{p+1}(y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{V}_{p+r-1}(y_1) & \cdots & \mathcal{V}_{p+r-1}(y_r) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{W}_p(y_1) & \cdots & \mathcal{W}_p(y_r) \\ \mathcal{W}_{p+1}(y_1) & \cdots & \mathcal{W}_{p+1}(y_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{W}_{p+r-1}(y_1) & \cdots & \mathcal{W}_{p+r-1}(y_r) \end{vmatrix}}{\Lambda(y_1, \dots, y_r)^2},$$

donde  $\Lambda(y_1, \dots, y_r)$  es el determinante de Vandermonde.

Dividiremos la prueba del Teorema 107 en varios lemas.

**108 Lema.** *Sean  $j, k \in \mathbb{N}$ . Entonces*

$$\mathcal{U}_j(x) \mathcal{T}_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j+k}(x) + \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j-k}(x), & \text{si } k \leq j+1, \\ \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j+k}(x) - \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j-k-2}(x), & \text{si } j+1 < k; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{V}_j(x) \mathcal{W}_k(x) = \begin{cases} \mathcal{U}_{j+k}(x) + \mathcal{U}_{j-k-1}(x), & \text{si } k \leq j, \\ \mathcal{U}_{j+k}(x) - \mathcal{U}_{k-j-1}(x), & \text{si } j < k. \end{cases} \quad (3.6)$$

*Demostración.* Sean  $j, k \in \mathbb{N}$ . Demostremos (3.5). Si  $k \leq j+1$ , entonces para todo  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j+k}(\cos \theta) + \frac{1}{2} \mathcal{U}_{j-k}(\cos \theta) &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \theta} (\operatorname{sen}(j+k+1)\theta + \operatorname{sen}(j-k+1)\theta) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(j+1)\theta \cos(k\theta)}{\operatorname{sen} \theta} = \mathcal{U}_j(\cos \theta) \mathcal{T}_k(\cos \theta). \end{aligned}$$

En otro caso, si  $j + 1 < k$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{U}_{j+k}(\cos \theta) + \frac{1}{2}\mathcal{U}_{j-k-2}(\cos \theta) &= \frac{1}{2\operatorname{sen} \theta}(\operatorname{sen}(j+k+1)\theta + \operatorname{sen}(j-k-1)\theta) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(j+1)\theta \cos(k\theta)}{\operatorname{sen} \theta} = \mathcal{U}_j(\cos \theta) \mathcal{T}_k(\cos \theta). \end{aligned}$$

Demostremos (3.6). Si  $k \leq j$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{j+k}(\cos \theta) + \mathcal{U}_{j-k-1}(\cos \theta) &= \frac{\operatorname{sen}(j+k+1)\theta + \operatorname{sen}(j-k)\theta}{\operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{2j+1}{2}\right)\theta \cos\left(\frac{2k+1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen}(j+\frac{1}{2})\theta \cos(k+\frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \mathcal{V}_j(\cos \theta) \mathcal{W}_k(\cos \theta). \end{aligned}$$

Ahora si  $j < k$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{j+k}(\cos \theta) - \mathcal{U}_{k-j-1}(\cos \theta) &= \frac{\operatorname{sen}(j+k+1)\theta - \operatorname{sen}(j-k)\theta}{\operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta \operatorname{sen}\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \mathcal{V}_j(\cos \theta) \mathcal{W}_k(\cos \theta). \quad \square \end{aligned}$$

**109 Lema.** En la situación del Lema 106 pongamos  $\lambda_j \doteq (\zeta_j - \zeta_j^{-1}) \frac{\zeta_j^{r-1}}{g'(\zeta_j)}$  con  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Entonces

$$\prod_{j=1}^r \lambda_j = \frac{(-1)^{r(r-1)/2}}{2^{r(r-1)} b_r^r \prod_{1 \leq l < j \leq r} (y_j - y_l)^2}.$$

*Demostración.* Primero, tenemos la descomposición del polinomio  $q(x) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k(x)$ :

$$q(x) = 2^r b_r \prod_{j=1}^r (x - \alpha_j).$$

Así

$$\prod_{j=1}^r q'(y_j) = (-1)^{r(r-1)/2} 2^{r^2} b_r^r \prod_{1 \leq l < j \leq r} (y_j - y_l)^2,$$

por otro lado, de la relación

$$\mathcal{T}_k\left(\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\zeta^k + \frac{1}{\zeta^k}\right),$$

deducimos que

$$b(\zeta) = b_0 + \sum_{k=1}^r b_k \left( \zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k \left( \frac{1}{2} \left( \zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) \right) \quad (3.7)$$

y así

$$b(\zeta_j) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}_k(y_j) = 0,$$

Es decir, los  $y_j$  son los ceros del polinomio  $q(x)$ , por otro lado derivando (3.7) con respecto a  $\zeta$  y poniendo  $\zeta = \zeta_j$ , obtenemos:

$$b'(\zeta_j) = \left( 1 - \frac{1}{\zeta_j^2} \right) \sum_{k=1}^r b_k \mathcal{T}'_k(y_j) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\zeta_j^2} \right) q'(y_j).$$

Con  $g'(\zeta_j) = \zeta_j^r b'(\zeta_j)$ , finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^r \lambda_j &= \prod_{j=1}^r \left( \zeta_j - \frac{1}{\zeta_j} \right) \frac{\zeta_j^{r-1}}{g'(\zeta_j)} = \prod_{j=1}^r \left( 1 - \frac{1}{\zeta_j^2} \right) \frac{\zeta_j^r}{g'(\zeta_j)} \\ &= \prod_{j=1}^r \left( 1 - \frac{1}{\zeta_j^2} \right) \frac{1}{b'(\zeta_j)} = \prod_{j=1}^r \frac{2}{q'(y_j)} = \frac{2^r}{\prod_{j=1}^r q'(y_j)}. \quad \square \end{aligned}$$

*Demostración del teorema de Elouafi.* Hay dos casos: cuando el tamaño del determinante es par y cuando es impar.

Caso 1.  $n = 2p + 1$ . Por el Lema 108:

$$\mathcal{U}_{n+r-1+l-j}(x) = \begin{cases} 2\mathcal{U}_{p+l-1}(x) \mathcal{T}_{p+r-j+1}(x) - \mathcal{U}_{l+j-r-2}(x) & \text{si } r - j + 1 \leq l, \\ 2\mathcal{U}_{p+l-1}(x) \mathcal{T}_{p+r-j+1}(x) + \mathcal{U}_{r-l-j}(x) & \text{si } l < r - j + 1. \end{cases}$$

Si  $r - j + 1 \leq l$  entonces  $-1 \leq l + j - r - 2 \leq r - 2$  y por el Lema 105:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_{l+j-r-2}(y_k) = 0$$

Por lo tanto

$$c_{n+l-j} = 2 \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_{p+l-1}(y_k) \mathcal{T}_{p+r-j+1}(y_k).$$

Análogamente si  $l < r - j + 1$  entonces  $-1 < r - l - j \leq r - 2$ , por lo tanto

$$c_{n+l-j} = 2 \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{U}_{p+l-1}(y_k) \mathcal{T}_{p+r-j+1}(y_k).$$

Ahora, note que la matrix  $(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r$  puede ser descompuesta como producto de 2 matrices, es decir:

$$(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r = 2(\mathcal{U}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times (\lambda_k \mathcal{T}_{p+r-j+1}(y_k))_{k,j=1}^r,$$

$$\begin{aligned} \det(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r &= 2^r \det(\mathcal{U}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times \det(\lambda_k \mathcal{T}_{p+r-j+1}(y_k))_{k,j=1}^r \\ &= (-1)^{r(r-1)/2} 2^r \prod_{k=1}^r \lambda_k \det(\mathcal{U}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times \det(\mathcal{T}_{p+j}(y_k))_{k,j=1}^r. \end{aligned}$$

Así por el Lema 86 y el Lema 109, se concluye un caso del teorema.

Caso 2. Tenemos ahora que  $n = 2p$ , luego por el Lema 108:

$$\mathcal{U}_{n+r-1+l-j}(x) = \begin{cases} \mathcal{W}_{p+r-j}(x) \mathcal{V}_{p+l-1}(x) - \mathcal{U}_{r-i-j}(x) & \text{si } l-1 \leq r-j, \\ \mathcal{W}_{p+r-j}(x) \mathcal{V}_{p+l-1}(x) + \mathcal{U}_{l+j-r-2}(x) & \text{si } r-j < l-1. \end{cases}$$

Análogamente como en el primer caso:

$$c_{n+l-j} = \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathcal{V}_{p+l-1}(y_k) \mathcal{W}_{p+r-j}(y_k).$$

Concluyendo y descomponiendo la matriz  $(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r$  en esta forma

$$(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r = (\mathcal{V}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times (\lambda_k \mathcal{W}_{p+r-j}(y_k))_{k,j=1}^r.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \det(c_{n+l-j})_{l,j=1}^r &= \det(\mathcal{V}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times \det(\lambda_k \mathcal{W}_{p+r-j}(y_k))_{k,j=1}^r \\ &= (-1)^{r(r-1)/2} \prod_{k=1}^r \lambda_k \det(\mathcal{V}_{p+l-1}(y_k))_{l,k=1}^r \times \det(\lambda_k \mathcal{W}_{p+r-j}(y_k))_{k,j=1}^r. \end{aligned}$$

Por los Lemas 86 y 109, se concluye la última parte del teorema de Elouafi.  $\square$

### 3.4. Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta/2)$

En la Sección 2.5 vimos que en este ejemplo la función  $a$  es

$$a(t) = -\frac{t^{-1}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{t}{4}, \quad t \in \mathbb{T},$$

y los polinomios característicos de  $T_n(a)$  se pueden calcular por la fórmula de Widom. En esta sección vamos a reproducir los mismos resultados con la fórmula de Elouafi.

La fórmula (3.3) nos da el polinomio

$$q(x) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \lambda - \frac{1}{2} + \frac{x}{2},$$

ver Lema 106. La única raíz de  $q$  es  $x = 1 - 2\lambda$ . Aplicando las fórmulas de Elouafi (Teorema 107) al símbolo generador  $b \doteq \lambda - a$ , obtenemos

$$D_n(\lambda - a) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((2p+1)\theta_\lambda)}{4^{2p} \text{sen}(\theta_\lambda)}, & \text{si } n = 2p, \\ -\frac{\text{sen}((2p+2)\theta_\lambda)}{4^{2p+1} \text{sen}(\theta_\lambda)}, & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Se ve que los dos casos se pueden juntar y escribir en la forma (2.11).

# Capítulo 4

## Polinomios característicos de matrices pentadiagonales de Toeplitz

En este capítulo aplicamos las fórmulas de Widom y de Elouafi al caso de matrices de Toeplitz pentadiagonales reales simétricas. Para varios ejemplos calculamos sus polinomios característicos y comprobamos las fórmulas deducidas con experimentos numéricos en GNU Octave. Con ellas calcularemos el determinante de ejemplos particulares, matrices cuyo símbolo generador es un polinomio de Laurent, con  $r = s = 2$ . Podremos saber de alguna manera como se comportan los valores propios de algunos ejemplos.

### 4.1. Fórmula de Widom para el caso pentadiagonal

En esta parte usaremos la formula de Widom para calcular determinantes de matrices de Toeplitz pentadiagonales, es decir, generadas por polinomios de la forma

$$b(t) = \sum_{j=-2}^2 b_j t^j = b_{-2} t^{-2} + b_{-1} t^{-1} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2. \quad (4.1)$$

Por ejemplo, para  $n = 7$ , la matriz correspondiente es

$$T_7(b) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

**110 Proposición.** Sea  $b$  un polinomio de Laurent de la forma (4.1). Supongamos que sus raíces son distintas a pares y las denotemos por  $z_1, z_2, z_3, z_4$ :

$$b(t) = b_2 t^{-2} (t - z_1)(t - z_2)(t - z_3)(t - z_4),$$

además sea  $\Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4)$  el determinante de Vandermonde (Proposición 123). Entonces

$$D_n(b) = \frac{b_2^n}{\Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4)} (M_{1,2} + M_{1,3} + M_{1,4} + M_{2,3} + M_{2,4} + M_{3,4}), \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= (z_1 z_2)^{n+2} (z_1 - z_2)(z_3 - z_4); \\ M_{1,3} &= -(z_1 z_3)^{n+2} (z_1 - z_3)(z_2 - z_4); \\ M_{1,4} &= (z_1 z_4)^{n+2} (z_1 - z_4)(z_2 - z_3); \\ M_{2,3} &= (z_2 z_3)^{n+2} (z_2 - z_3)(z_1 - z_4); \\ M_{2,4} &= -(z_2 z_4)^{n+2} (z_2 - z_4)(z_1 - z_3); \\ M_{3,4} &= (z_3 z_4)^{n+2} (z_3 - z_4)(z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

*Demostración.* En la fórmula de Widom (2.7), tomamos el caso  $r = 2, s = 2$ . El conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  tiene  $\binom{4}{2} = 6$  subconjuntos de tamaño dos. Calculemos las expresiones necesarias para la fórmula de Widom, esto es,

$$w_M \doteq b_2 \prod_{j \in M} z_j, \quad C_M \doteq \prod_{j \in M} z_j^r \prod_{\substack{j \in M \\ k \in \bar{M}}} (z_j - z_k)^{-1},$$

para cada uno de estos seis subconjuntos:

$$\begin{aligned} w_{\{1,2\}} &= b_2 z_1 z_2, & C_{\{1,2\}} &= \frac{(z_1 z_2)^2}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)}. \\ w_{\{1,3\}} &= b_2 z_1 z_3, & C_{\{1,3\}} &= \frac{(z_1 z_3)^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)(z_3 - z_4)}. \\ w_{\{1,4\}} &= b_2 z_1 z_4, & C_{\{1,4\}} &= \frac{(z_1 z_4)^2}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)(z_4 - z_3)}. \\ w_{\{2,3\}} &= b_2 z_2 z_3, & C_{\{2,3\}} &= \frac{(z_2 z_3)^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_4)(z_3 - z_1)(z_3 - z_4)}. \\ w_{\{2,4\}} &= b_2 z_2 z_4, & C_{\{2,4\}} &= \frac{(z_2 z_4)^2}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)(z_4 - z_3)}. \\ w_{\{3,4\}} &= b_2 z_3 z_4, & C_{\{3,4\}} &= \frac{(z_3 z_4)^2}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_4 - z_2)(z_4 - z_1)}. \end{aligned}$$

Llevando las fracciones al mismo denominador  $\Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , obtenemos (4.3).  $\square$

El siguiente programa calcula el valor del determinante de la matriz de Toeplitz pentadiagonal mediante la fórmula (4.3). Los argumentos de la función son la lista de los coeficientes del polinomio de Laurent (dados en el orden  $a_2, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}$ ) y el orden  $n$  de la matriz.

```

1 function D = detwidompenta(coefs, n)
   zs = roots(coefs);
3   z1 = zs(1); z2 = zs(2); z3 = zs(3); z4 = zs(4);
   M1 = (z1 * z2) ^ (n + 2) * (z1 - z2) * (z3 - z4);
5   M2 = - (z1 * z3) ^ (n + 2) * (z1 - z3) * (z2 - z4);
   M3 = (z1 * z4) ^ (n + 2) * (z1 - z4) * (z2 - z3);
7   M4 = (z2 * z3) ^ (n + 2) * (z2 - z3) * (z1 - z4);
   M5 = - (z2 * z4) ^ (n + 2) * (z2 - z4) * (z1 - z3);
9   M6 = (z3 * z4) ^ (n + 2) * (z3 - z4) * (z1 - z2);
   num = M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6;
11  den = (z4 - z3) * (z4 - z2) * (z4 - z1);
   den = den * (z3 - z2) * (z3 - z1) * (z2 - z1);
13  D = (coefs(1) ^ n) * num / den;
endfunction

```

En dos ejemplos de este Capítulo (Secciones 4.4 y 4.5) tenemos la situación cuando el polinomio de Laurent tiene dos raíces reales y dos complejas. Para este caso demos-tremos la siguiente Proposición.

**111 Proposición.** *Sea  $b$  un polinomio de Laurent (4.1), que tiene dos raíces complejas mutuamente conjugadas en la circunferencia unitaria y dos raíces reales mutuamente recíprocas. Escribamos sus raíces de la siguiente manera:*

$$z_1 = e^{i\alpha}, \quad z_2 = e^{-i\alpha}, \quad z_3 = e^\beta, \quad z_4 = e^{-\beta},$$

donde  $\alpha, \beta > 0$ . Entonces

$$D_n(b) = \frac{b_2^n e^{(n+1)\beta}}{2 \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{senh}(\beta) P} \left( \operatorname{sen}((n+1)\alpha - 2\gamma) + \frac{2}{P} e^{-(n+2)\beta} (1 - e^{-2\beta}) \operatorname{sen}(\alpha) - e^{-(2n+4)\beta} \operatorname{sen}((n+3)\alpha + 2\gamma) \right). \quad (4.5)$$

donde

$$P := |1 - e^{-\beta - i\alpha}|^2 = 1 - 2e^{-\beta} \cos \alpha + e^{-2\beta}$$

y

$$\gamma := \arg(1 - e^{-\beta - i\alpha}) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{e^\beta - \cos(\alpha)}.$$

*Demostración.* Calculemos todas las diferencias de las raíces  $z_1, z_2, z_3, z_4$ :

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 2i \operatorname{sen}(\alpha), \\ z_1 - z_3 &= e^{i\alpha} - e^\beta = -e^{\beta\lambda}(1 - e^{-\beta+i\alpha}) = -e^\beta \sqrt{P} e^{-i\gamma}; \\ z_1 - z_4 &= e^{i\alpha} - e^{-\beta} = e^{i\alpha}(1 - e^{-\beta\lambda-i\alpha}) = e^{i\alpha\lambda} \sqrt{P} e^{i\gamma}, \\ z_2 - z_3 &= e^{-i\alpha} - e^\beta = -e^{\beta\lambda}(1 - e^{-\beta-i\alpha}) = -e^\beta \sqrt{P} e^{i\gamma}; \\ z_2 - z_4 &= e^{-i\alpha} - e^{-\beta} = e^{-i\alpha}(1 - e^{-\beta+i\alpha}) = e^{-i\alpha\lambda} \sqrt{P} e^{-i\gamma}; \\ z_3 - z_4 &= e^\beta - e^{-\beta} = e^\beta(1 - e^{-2\beta}). \end{aligned}$$

Con esto podemos escribir los sumandos (4.4):

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= (z_1 z_2)^{n+2} (z_1 - z_2)(z_3 - z_4) = 2i \operatorname{sen}(\alpha) e^\beta (1 - e^{-2\beta}); \\ M_{1,3} &= -(z_1 z_3)^{n+2} (z_1 - z_3)(z_2 - z_4) = P e^{(n+3)\beta+(n+1)i\alpha-2i\gamma}; \\ M_{1,4} &= (z_1 z_4)^{n+2} (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = -P e^{-(n+1)\beta+(n+3)i\alpha+2i\gamma}; \\ M_{2,3} &= (z_2 z_3)^{n+2} (z_2 - z_3)(z_1 - z_4) = -P e^{(n+3)\beta-(n+1)i\alpha+2i\gamma}; \\ M_{2,4} &= -(z_2 z_4)^{n+2} (z_2 - z_4)(z_1 - z_3) = P e^{-(n+1)\beta-(n+3)i\alpha-2i\gamma}; \\ M_{3,4} &= (z_3 z_4)^{n+2} (z_3 - z_4)(z_1 - z_2) = 2i \operatorname{sen}(\alpha) e^\beta (1 - e^{-2\beta}). \end{aligned}$$

El determinante de Vandermonde toma la forma

$$\Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = 4i \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{senh}(\beta) e^{2\beta} P^2.$$

Sustituyendo estas expresiones en (4.3) obtenemos (4.5). □

## 4.2. Fórmula de Elouafi para el caso pentadiagonal real simétrico

Ahora usaremos la otra herramienta para los determinantes de matrices de Toeplitz pentadiagonales simétricas, la fórmula de Elouafi. Luego por la fórmula (3.3), para el polinomio  $q$  del caso pentadiagonal, se tendrá:

$$q(x) = b_0 + 2b_1 \mathcal{T}_1(x) + 2b_2 \mathcal{T}_2(x). \quad (4.6)$$

Con el cambio de variable  $x = \cos \theta$  se tiene:

$$q(\cos \theta) = b_0 + 2b_1 \cos \theta + 2b_2 \cos 2\theta = 4b_2 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta + (b_0 - 2b_2). \quad (4.7)$$

Las raíces del polinomio  $q$  son

$$y_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - 2b_2)}}{4b_2}, \quad y_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - 2b_2)}}{4b_2}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Elouafi 107:

$$D_{2p+1}(b) = b_2^{2p+1} \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{U}_p(y_1) & \mathcal{U}_p(y_2) \\ \mathcal{U}_{p+1}(y_1) & \mathcal{U}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{T}_{p+1}(y_1) & \mathcal{T}_{p+1}(y_2) \\ \mathcal{T}_{p+2}(y_1) & \mathcal{T}_{p+2}(y_2) \end{vmatrix}}{(y_2 - y_1)^2}$$

y

$$D_{2p}(b) = \frac{b_2^{2p}}{4} \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{V}_p(y_1) & \mathcal{V}_p(y_2) \\ \mathcal{V}_{p+1}(y_1) & \mathcal{V}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{W}_p(y_1) & \mathcal{W}_p(y_2) \\ \mathcal{W}_{p+1}(y_1) & \mathcal{W}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix}}{(y_2 - y_1)^2}.$$

**112 Notación.** Para mayor comodidad, usemos las notaciones  $U^{(p)}(y_1, y_2)$ ,  $T^{(p)}(y_1, y_2)$ ,  $V^{(p)}(y_1, y_2)$  y  $W^{(p)}(y_1, y_2)$  para los determinantes:

$$U^{(p)}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathcal{U}_p(y_1) & \mathcal{U}_p(y_2) \\ \mathcal{U}_{p+1}(y_1) & \mathcal{U}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix}, \quad T^{(p)}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathcal{T}_p(y_1) & \mathcal{T}_{p+1}(y_2) \\ \mathcal{T}_{p+2}(y_1) & \mathcal{T}_{p+2}(y_2) \end{vmatrix},$$

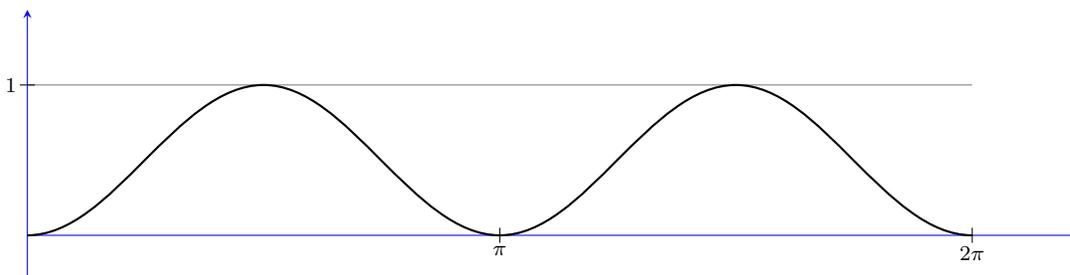
$$V^{(p)}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathcal{V}_p(y_1) & \mathcal{V}_{p+1}(y_2) \\ \mathcal{V}_{p+1}(y_1) & \mathcal{V}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix}, \quad W^{(p)}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathcal{W}_p(y_1) & \mathcal{W}_{p+1}(y_2) \\ \mathcal{W}_{p+1}(y_1) & \mathcal{W}_{p+1}(y_2) \end{vmatrix}.$$

### 4.3. Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^2(\theta)$

Nuestro primer ejemplo serán las matrices pentadiagonales de banda las que genera el símbolo  $g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 1]$ , definido

$$g(\theta) = \text{sen}^2(\theta).$$

La gráfica de  $g$  es:



Por las fórmulas de Euler (125),

$$g(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = -\frac{e^{-2i\theta}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{2i\theta}}{4} = a(e^{i\theta}).$$

Con el cambio de variable  $t = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  se tiene que

$$a(t) = -\frac{t^{-2}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4}.$$

Este ejemplo pentadiagonal tiene la particularidad de que la diagonal por encima y por debajo de la diagonal principal es cero, es decir  $a_1 = a_{-1} = 0$ .

**113 Ejemplo.** Si  $n = 6$ , entonces la matriz de Toeplitz que se considerara es

$$T_6(a) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

**114 Observación.** Note que  $g([0, 2\pi]) = [0, 1]$ , entonces por la Proposición 80 se tiene

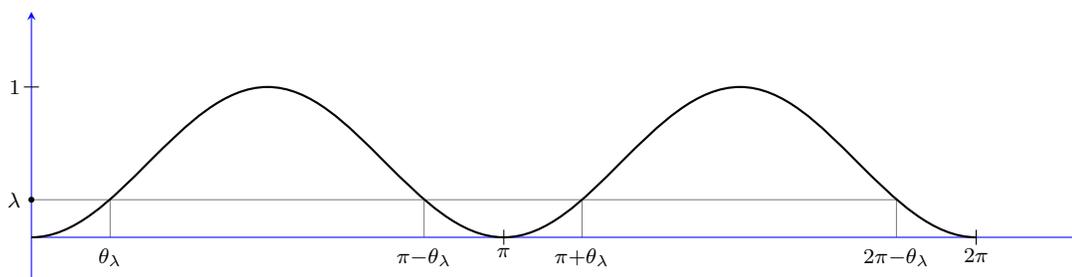
$$\text{sp}(T_n(a)) \subset (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

### Polinomio característico usando la fórmula de Widom

Para calcular el polinomio característico de la matriz de este ejemplo, el primer camino será por medio de la fórmula (4.3). Primero calculemos algunas expresiones que participan en esta fórmula. Para cada  $\lambda \in (0, 1)$ , la ecuación  $g(\theta) = \lambda$  tiene cuatro raíces reales:

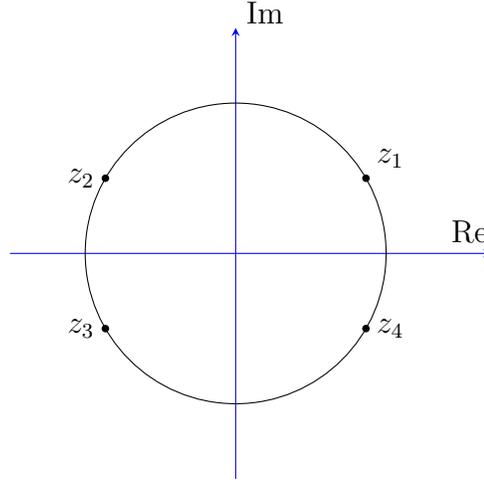
$$\theta_\lambda, \quad \pi - \theta_\lambda, \quad \pi + \theta_\lambda, \quad 2\pi - \theta_\lambda,$$

donde  $\theta_\lambda = \arcsin \sqrt{\lambda}$ .



Por lo tanto para cada  $\lambda \in (0, 1)$ , la ecuación  $a(z) = \lambda$  tiene cuatro raíces en la circunferencia unitaria:

$$z_1 = e^{i\theta_\lambda}, \quad z_2 = -e^{-i\theta_\lambda}, \quad z_3 = -e^{i\theta_\lambda}, \quad z_4 = e^{-i\theta_\lambda}.$$



Recordando la fórmula de Widom para el caso pentadiagonal (4.3) se tienen los siguientes sumandos:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= (-1)^{n+1} 4 \cos^2(\theta_\lambda); & M_{1,3} &= (-1)^n 4 e^{2i\theta_\lambda(n+2)}; \\ M_{1,4} &= -4 \text{sen}^2(\theta_\lambda); & M_{2,3} &= -4 \text{sen}^2(\theta_\lambda); \\ M_{2,4} &= (-1)^n 4 e^{-2i\theta_\lambda(n+2)}; & M_{3,4} &= (-1)^{n+1} 4 \cos^2(\theta_\lambda). \end{aligned}$$

Al sustituirlos en (4.4) y simplificar se tiene

$$D_n(\lambda - a) = \frac{-(-1)^n 8 \cos^2(\theta_\lambda) - 8 \text{sen}^2(\theta_\lambda) + (-1)^n 8 \cos(2(n+2)\theta_\lambda)}{2^{2n} \Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4)}. \quad (4.8)$$

Además calculamos el polinomio de Vandermonde de las raíces anteriores:

$$\Lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = -64 \cos^2(\theta_\lambda) \text{sen}^2(\theta_\lambda).$$

Por lo tanto

$$D_n(\lambda - a) = \begin{cases} \frac{\text{sen}^2((2p+2)\theta)}{4^{2p+1} \text{sen}^2(2\theta)}, & \text{si } n = 2p, \\ -\frac{\text{sen}((2p+2)\theta) \text{sen}((2p+4)\theta)}{4^{2p} \text{sen}^2(2\theta)}, & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

## Polinomio característico usando la fórmula de Elouafi

Aplicamos la fórmula de Elouafi separando los casos de la paridad del tamaño de la matriz. En el caso pentadiagonal el polinomio auxiliar es (4.7),

$$q(x) = b_0 + 2b_2 \mathcal{T}_2(x) = \lambda - 1 + x^2 = x^2 - \cos^2(\theta),$$

donde usamos el cambio de variable  $\lambda = g(\theta)$  con  $\theta \in (0, \pi/2)$ , las raíces de  $q$  son

$$y_1 = \cos(\theta), \quad y_2 = -\cos(\theta).$$

Calculemos los polinomios de Chebyshev correspondientes a las raíces  $y_1$  y  $y_2$ , primero los de primer y segundo tipo, usando las identidades trigonométricas del Lema 128:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_p(y_2) &= \mathcal{U}_p(-\cos \theta) = \mathcal{U}_p(\cos(\pi - \theta)) = \frac{(-1)^{p+1} \operatorname{sen}(p\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = (-1)^{p+1} \mathcal{U}_p(y_1), \\ \mathcal{T}_{p+1}(y_2) &= \cos((p+1)(\pi - \theta)) = (-1)^{p+1} \cos((p+1)\theta) \\ &= (-1)^{p+1} \mathcal{T}_{p+1}(\cos(\theta)) = (-1)^{p+1} \mathcal{T}_{p+1}(y_1). \end{aligned}$$

Y finalmente los de tercer y cuarto tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p(y_2) &= \mathcal{V}_p(\cos(\pi - \theta)) = \frac{\cos((2p+1)(\frac{\pi-\theta}{2}))}{\cos(\frac{\pi-\theta}{2})} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + p\pi - (2p+1)\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left((2p+1)\theta/2 - p\pi\right) = (-1)^p \frac{\operatorname{sen}((p+1/2)\theta)}{\operatorname{sen}(\theta/2)} = (-1)^p \mathcal{W}_p(y_1), \\ \mathcal{W}_p(y_2) &= \frac{\operatorname{sen}((p+\frac{1}{2})(\pi - \theta))}{\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2})} = \cos((2p+1)\theta/2 - p\pi) = (-1)^p \frac{\cos((p+\frac{1}{2})\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})} \\ &= (-1)^p \mathcal{V}_p(y_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los determinantes correspondientes son

$$\begin{aligned} U^{(p)}(y_1, y_2) &= 2(-1)^p \mathcal{U}_p(y_1) \mathcal{U}_{p+1}(y_1) = 2(-1)^p \frac{\operatorname{sen}((p+1)\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{\operatorname{sen}((p+2)\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}, \\ T^{(p)}(y_1, y_2) &= 2(-1)^p \mathcal{T}_p(y_1) \mathcal{T}_{p+1}(y_1) = 2(-1)^p \cos((p+1)\theta) \cos((p+2)\theta). \end{aligned}$$

Usando además las identidades de la fórmulas de Lema 128 y (B.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
V^{(p)}(y_1, y_2) &= (-1)^{p+1} \mathcal{V}_p(y_1) \mathcal{W}_{p+1}(y_1) + (-1)^{p+1} \mathcal{W}_p(y_1) \mathcal{V}_{p+1}(y_1) \\
&= \frac{(-1)^{p+1} [\cos((p + \frac{1}{2})\theta) \text{sen}((p + \frac{3}{2})\theta) + \text{sen}((p + \frac{1}{2})\theta) \cos((p + \frac{3}{2})\theta)]}{\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})} \\
&= 2(-1)^{p+1} \frac{\text{sen}(2p + 2)\theta}{\text{sen}(\theta)}, \\
W^{(p)}(y_1, y_2) &= (-1)^{p+1} \mathcal{W}_p(y_1) \mathcal{V}_{p+1}(y_1) + (-1)^{p+1} \mathcal{W}_{p+1}(y_1) \mathcal{V}_p(y_1) \\
&= \frac{(-1)^{p+1} [\cos((p + \frac{3}{2})\theta) \text{sen}((p + \frac{1}{2})\theta) + \text{sen}((p + \frac{3}{2})\theta) \cos((p + \frac{1}{2})\theta)]}{\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})} \\
&= 2(-1)^{p+1} \frac{\text{sen}(2p + 2)\theta}{\text{sen}(\theta)}.
\end{aligned}$$

Trabajemos el caso impar,  $D_{2p+1}(\lambda - a)$ ; el caso par es análogo.

$$\begin{aligned}
D_{2p+1}(\lambda - a) &= \frac{[(-1)^{p2} \mathcal{U}_p(y_1) \mathcal{U}_{p+1}(y_1)] \cdot [(-1)^{p2} \mathcal{T}_{p+1}(y_1) \mathcal{T}_{p+2}(y_1)]}{4^{2p+1} (y_2 - y_1)^2} \\
&= \frac{[\text{sen}((p + 1)\theta) \text{sen}((p + 2)\theta)] \cdot [\cos((p + 1)\theta) \cos((p + 2)\theta)]}{4^{2p-1} \text{sen}^2(2\theta)}.
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$D_n(\lambda - a) = \begin{cases} \frac{\text{sen}((2p + 2)\theta) \text{sen}((2p + 4)\theta)}{4^{2p} \text{sen}^2(2\theta)}, & \text{si } n = 2p + 1, \\ \frac{\text{sen}^2((2p + 2)\theta)}{4^{2p+1} \text{sen}^2(2\theta)}, & \text{si } n = 2p. \end{cases} \quad (4.10)$$

Note que coincide con la fórmula (4.9) deducida de la fórmula de Widom.

## Valores propios

Es fácil resolver la ecuación  $D_n(\lambda - a) = 0$  en este ejemplo. Tendremos los siguientes casos:

1. El primer caso será cuando  $n$  es par, es decir resolvamos la ecuación  $D_{2p}(b) = 0$ . De la fórmula (4.8), se tendrá

$$\cos(2(n + 2)\theta_\lambda) = 1.$$

Note además que  $\theta_\lambda$  y  $\pi - \theta_\lambda$  toman el mismo valor en la solución de la ecuación anterior, por lo tanto tendremos raíces dobles, por lo tanto  $\theta_\lambda = \frac{k\pi}{n+2}$  y tomando en

cuenta que  $0 < \theta_\lambda < \frac{\pi}{2}$ , se sigue que  $k = 1, \dots, p = n/2$ . Así, los valores propios para este caso serán

$$\lambda_{2k}^{(n)} = \lambda_{2k-1}^{(n)} = \text{sen}^2 \left( \frac{k\pi}{n+2} \right).$$

2. Ahora, consideremos el caso cuando  $n$  es impar, es decir  $D_{2p+1}(b) = 0$  y con la identidad trigonométrica de la resta de cosenos Identidad (B.4)

$$\cos(2(n+2)\theta_\lambda) - \cos(\theta_\lambda) = \text{sen}((n+3)\theta_\lambda) \text{sen}((n+1)\theta_\lambda) = 0.$$

De aquí resultan dos subcasos:

- $(n+3)\theta_\lambda = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , como  $\theta_\lambda \in (0, \pi/2)$  se tiene,

$$0 < \frac{k}{n+3} < \frac{1}{2}, \quad 0 < k < p+2.$$

Así  $k = 1, \dots, p+1$ .

- Por otro lado,  $(n+1)\theta_\lambda = k\pi$

$$0 < k < \frac{n+1}{2}, \quad 0 < k < p+1.$$

Así  $k = 1, \dots, p$ .

Finalmente, para  $n = 2p+1$  los valores propios serán

$$\lambda_{2k-1}^{(n)} = \text{sen}^2 \left( \frac{k\pi}{n+3} \right), \quad k = 1, \dots, p+1.$$

$$\lambda_{2k}^{(n)} = \text{sen}^2 \left( \frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, p.$$

## Comprobaciones numéricas

En esta sección se muestran programas escritos en el lenguaje GNU Octave que comprueban las fórmulas de esta sección. Compararemos el determinante como lo hace la computadora con la función `det` y con la fórmula de Widom que se obtuvo en cada caso. También hay un programa para el cálculo de valores propios.

El primer programa, contiene a las funciones ya definidas en GNU Octave. El polinomio característico depende del tamaño de la matriz  $n$  y de  $\lambda \in (0, 1)$ .

```
function D = charpolsen(n, lambda)
2   c = zeros(n, 1);
   c(1) = lambda - 1 / 2;
4   c(3) = 1 / 4;
   A = toeplitz(c);
6   D = det(A);
endfunction
```

Ahora, otro programa que calcula el polinomio característico, pero usando la fórmula de Widom. Como en la función anterior, los argumentos de la función son el tamaño de la matriz  $n$  y  $\lambda \in (0, 1)$ .

```
1 function D = charpolsen2Widom(n, lambda)
   theta = asin(sqrt(lambda));
3   num = (-1)^(n + 1) * cos(theta) .^ 2;
   num = num + (-1)^(n + 1) * sin(theta) .^ 2;
5   num = num + cos(2 * (n+2) * theta);
   den = -2^(2*n+3) * (sin(2*theta)/2) .^ 2;
7   D = num ./ den;
endfunction
```

Ahora el programa que calcula los valores propios:

```
function evals = eigsen2m(n)
2  evals = zeros(n, 1);
   if mod(n, 2) == 0,
4     p = n / 2;
     ind = (1 : p)';
6     evals(2 * ind - 1) = sin(ind * pi / (n + 2)) .^ 2;
     evals(2 * ind) = evals(2 * ind - 1);
8   else
     p = (n - 1) / 2;
10    ind = (1 : p + 1)';
     evals(2 * ind - 1) = sin(ind*pi/(n+3)) .^ 2;
12    ind = (1 : p)';
     evals(2 * ind) = sin(ind*pi/(n+1)) .^ 2;
14  endif
endfunction
```

#### 4.4. Ejemplo $g(\theta) = 4 \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 16 \operatorname{sen}^4(\theta/2)$

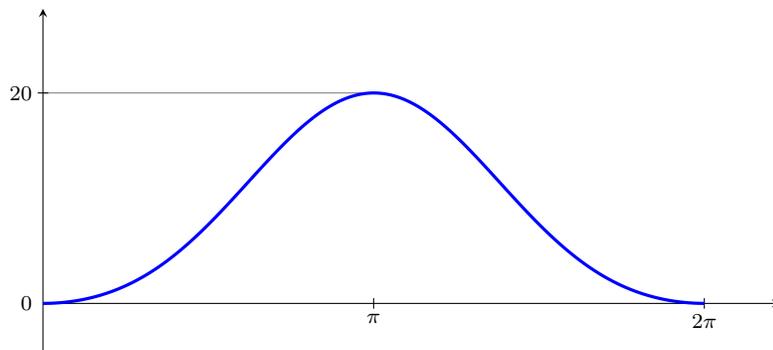
En esta sección se considera el segundo ejemplo pentadiagonal real y simétrico. Será la función generadora  $g : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 20]$ . Definida mediante la regla

$$g(\theta) \doteq 4 \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 16 \operatorname{sen}^4(\theta/2).$$

Usando el cambio de variable  $g(\theta) = a(e^{i\theta})$ , con  $t = e^{i\theta}$ , se escribe el símbolo generador como

$$a(t) = t^{-2} - 5t^{-1} + 8 - 5t + t^2.$$

La gráfica de  $g$  es:



**115 Observación.** Puesto que  $a(\mathbb{T}) = [0, 20]$ , la Proposición 80 afirma la siguiente contención propia:

$$\operatorname{sp}(T_n(a)) \subset (0, 20), \quad n \in \mathbb{N}.$$

La siguiente función calcula el polinomio característico usando por las funciones propias de GNU Octave.

```

1 function D = polcarsimpleloop(n, lambda)
   c = zeros(n, 1);
3   c(1) = lambda - 8 ;
   c(2) = 5;
5   c(3) = -1;
   A = toeplitz(c);
7   D = det(A);
endfunction

```

## Polinomio característico usando la fórmula de Widom

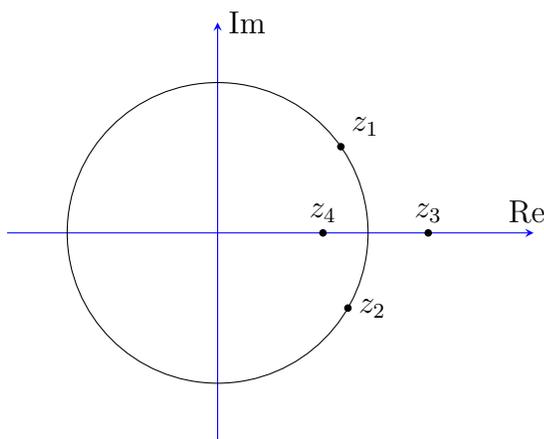
En esta sección, usaremos la fórmula de Widom para calcular el polinomio característico de este ejemplo, es decir, calcularemos el determinante a la matriz de Toeplitz que genera el símbolo  $b \doteq \lambda - a$ . Las raíces de  $\lambda - a$  son:

$$z_1 = e^{i\alpha_\lambda}, \quad z_2 = e^{-i\alpha_\lambda}, \quad z_3 = e^{\beta_\lambda}, \quad z_4 = e^{-\beta_\lambda}.$$

donde

$$\alpha_\lambda = 2 \arcsin \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\lambda}-1}}{2\sqrt{2}},$$

$$\beta_\lambda = \log \left( \frac{5 + \sqrt{1+4\lambda}}{4} + \frac{\sqrt{5+2\lambda+5\sqrt{1+4\lambda}}}{2\sqrt{2}} \right).$$



Así, su polinomio característico según (4.5) es:

$$D_n(\lambda - a) = \frac{(-1)^n e^{(n+1)\beta_\lambda}}{2 \operatorname{sen}(\alpha_\lambda) \operatorname{senh}(\beta_\lambda) P_\lambda} \left( \operatorname{sen}((n+1)\alpha_\lambda - 2\gamma_\lambda) + \frac{2}{P_\lambda} e^{-(n+2)\beta_\lambda} (1 - e^{-2\beta_\lambda}) \operatorname{sen}(\alpha_\lambda) - e^{-(2n+4)\beta_\lambda} \operatorname{sen}((n+3)\alpha_\lambda + 2\gamma_\lambda) \right), \quad (4.11)$$

con

$$P_\lambda = 1 - 2e^{-\beta_\lambda} \cos(\alpha_\lambda) + e^{-2\beta_\lambda}$$

y

$$\gamma_\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_\lambda)}{e^{\beta_\lambda} - \cos(\alpha_\lambda)}.$$

**116 Ejemplo.** Si  $n = 6$ , el determinante tendría la forma,

$$D_6(\lambda - a) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \lambda - 8 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & \lambda - 8 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & \lambda - 8 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & \lambda - 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & \lambda - 8 \end{vmatrix}.$$

## Comprobaciones numéricas

Hagamos comprobaciones numéricas de las fórmulas de la subsección anterior. Primero el programa que calcula  $\alpha_\lambda$ :

```
function result = alpha(lambda)
2   result = 2 * asin(sqrt(sqrt(1+4*lambda) - 1) / (2*sqrt(2)));
endfunction
```

Luego, tenemos el programa que calcula  $\beta_\lambda$ :

```
1 function result = betal(la)
   r = sqrt(1 + 4*la);
3   result = log(5/4 + r/4 + sqrt(5+2*la+5*r) / (2*sqrt(2)));
endfunction
```

Este programa realiza los cálculos, sin simplificar las raíces, de la fórmula de Widom para el caso cuando hay dos raíces reales y dos complejas.

```
function D = polcarWidomz(n, lambda)
2   z1 = exp(i * alpha(lambda));
   z2 = exp(-i * alpha(lambda));
4   z3 = exp(betal(lambda));
   z4 = exp(-betal(lambda));
6   M1 = (z1*z2)^(n+2) * (z1-z2) * (z3-z4);
   M2 = -(z1*z3)^(n+2) * (z1-z3) * (z2-z4);
8   M3 = (z1*z4)^(n+2) * (z1-z4) * (z2-z3);
   M4 = (z2*z3)^(n+2) * (z2-z3) * (z1-z4);
10  M5 = -(z2*z4)^(n+2) * (z2-z4) * (z1-z3);
   M6 = (z3*z4)^(n+2) * (z3-z4) * (z1-z2);
12  num = M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6;
   den = (z4-z3) * (z4-z2) * (z4-z1);
14  den = den * (z3-z2) * (z3-z1) * (z2-z1);
```

```

16 D = (-1)^n * num / den;
endfunction

```

Ahora, calculemos el polinomio característico usando Widom, con las funciones definidas anteriormente.

```

function D = polcarWidom1(n, la)
2  P = 1- 2 *cos(alpha(la))*exp(-betal(la))+exp(-2 * betal(la));
  s1 = sin((n+1) * alpha(la) - 2 * gamma01(la));
4  s2 = 2*exp(-(n+2)*betal(la))*(1-exp(-2*betal(la)))*sin(alpha
  (la))/P;
  s3 = exp(-(2*n+4)*betal(la))*sin((n+3)*alpha(la)+2*gamma01
  (la));
6  num = s1 + s2- s3;
  den = sinh(betal(la))*P*sin(alpha(la))*2;
8  D = exp((n+1)*betal(la))*num/den;
endfunction

```

## Solución aproximada de la ecuación característica usando el método del punto fijo

Al querer resolver la ecuación  $D_n(\lambda - a) = 0$  surgen problemas, ya que se tienen varios sumandos en (4.11). Vamos a mostrar que algunos de estos sumandos son pequeños y se pueden despreciar. Note que para todo  $\lambda \in (0, 20)$  se tiene

$$\beta_\lambda > \log\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.9642,$$

por lo tanto los sumandos

$$\frac{2}{P_\lambda} e^{-(n+2)\beta_\lambda} (1 - e^{-2\beta_\lambda}) \text{sen}(\alpha_\lambda) \quad \text{y} \quad e^{-(2n+4)\beta_\lambda} \text{sen}((n+3)\alpha_\lambda + 2\gamma_\lambda),$$

tienden exponencialmente a cero (de manera uniforme), por eso los vamos a despreciar. Luego resolveremos la ecuación

$$\text{sen}((n+1)\alpha_\lambda - 2\gamma_\lambda) = 0,$$

es decir

$$(n+1)\alpha_\lambda - 2\gamma_\lambda = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

Hagamos el cambio de variable:  $x = \alpha_\lambda$ . En términos de la variable nueva tenemos

$$e^{\beta_{g(x)}} = \frac{5 - 2 \cos(x) + \sqrt{21 - 20 \cos(x) + 4 \cos^2(x)}}{2}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(x) &= \gamma_{g(x)} = \arctan \left( \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^{\beta_{g(x)}} - \cos(x)} \right) \\ &= \arctan \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{5 - 4 \cos(x) + \sqrt{21 - 20 \cos(x) + 4 \cos^2(x)}}. \end{aligned}$$

Reescribimos la ecuación (4.12) con  $x$  como nueva variable:

$$(n+1)x - 2\tilde{\gamma}(x) = k\pi. \quad (4.13)$$

Otra forma de la misma ecuación:

$$x = f_{n,k}(x),$$

donde

$$f_{n,k}(x) = \frac{k\pi + 2\tilde{\gamma}(x)}{n+1}.$$

Como  $\tilde{\gamma}(x)$  es una función suave de  $x$ , en particular su derivada es acotada, entonces la derivada de  $\tilde{\gamma}(x)$  será pequeña para valores grandes de  $n$ . Se puede demostrar que  $f_{n,k}$  es contractiva en el intervalo cerrado  $[0, \pi]$  para  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , así que se puede aplicar el teorema del punto fijo. Denotemos por  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) al punto fijo de  $f_{n,k-1}$ , y por  $\tilde{\lambda}_k^{(n)}$  a la aproximación correspondiente al valor propio:

$$\tilde{\lambda}_k^{(n)} = g(x_k^{(n)}).$$

Luego denotemos por  $\varepsilon^{(n)}$  al valor del error máximo, es decir

$$\varepsilon^{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \lambda_k^{(n)} - \tilde{\lambda}_k^{(n)} \right|,$$

donde  $\lambda_k^{(n)}$  es el valor propio real.

En el artículo [4] se puede encontrar una justificación más completa de los razonamientos escritos arriba y una demostración que  $\varepsilon^{(n)}$  decae exponencialmente cuando  $n$  crece. Lo hemos comprobado con experimentos numéricos:

$n$	5	10	15	20	25
$\varepsilon^{(n)}$	$3.03 \cdot 10^{-4}$	$7.88 \cdot 10^{-7}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$1.58 \cdot 10^{-11}$	$8.69 \cdot 10^{-14}$

Para valores más grandes de  $n$ , los errores  $\varepsilon^{(n)}$  son más pequeños que los errores de redondeo en la aritmética con precisión doble (la cual se utiliza en GNU Octave).

## Código que calcula los valores propios resolviendo la ecuación aproximada con el método del punto fijo

La función  $f_{n,k}$  cumple con las condiciones del método del punto fijo, podemos programar el método, y calcular de manera aproximada los valores propios. Primero, definimos a la función  $g$ :

```

1 function result = g(x),
   result = 4 * sin(x / 2) .^ 2 + 16 * sin(x / 2) .^ 4;
3 endfunction

```

Luego, tenemos el programa que calcula  $\tilde{\gamma}$ :

```

1 function result = gammatilde(x)
   numer = 2 * sin(x);
3   denom = 5 - 4*cos(x) + sqrt(21-20*cos(x)+4*(cos(x).^2));
   result = atan(numer ./ denom);
5 endfunction

```

Y finalmente el programa que calcula los valores propios aproximados:

```

1 function lambdas = eigvalsaprox1(n)
   js = (1 : n)';
3   x = js * pi / (n + 1);
   for s = 1 : 20,
5     x = (js * pi + 2 * gammatilde(x)) / (n + 1);
   endfor
7   lambdas = g(x);
endfunction

```

## Polinomio característico usando la fórmula de Elouafi

Por el teorema de Elouafi, de la matriz pentadiagonal simétrica se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$q(x) = 4x^2 - 10x + 6 - \lambda.$$

Las raíces de  $q(x)$  son:

$$y_1 = \frac{5 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{8}, \quad y_2 = \frac{5 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{8}.$$

Notamos que  $y_1 \in (-1, 1)$  y  $y_2 > 1$ . Introducimos dos variables auxiliares,  $\varphi \in (0, \pi)$  y  $\nu > 0$  mediante las reglas:

$$y_1 = \cos(\varphi), \quad y_2 = \cosh(\nu).$$

De las fórmulas de Elouafi:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(p)}(y_1, y_2) &= \cos((p+1)\varphi) \cosh((p+2)\nu) - \cos((p+2)\varphi) \cosh((p+1)\nu) \\ &= \frac{1}{2} e^{(p+2)\nu} \left( \cos((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \cos((p+2)\varphi) \right) \\ &\quad + e^{-2(p+2)\nu} \cos((p+1)\varphi) - e^{-(2p+3)\nu} \cos((p+2)\varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\operatorname{sen}((p+1)\varphi) \operatorname{senh}((p+2)\nu)}{\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{senh}(\nu)} - \frac{\operatorname{sen}((p+2)\varphi) \operatorname{senh}((p+1)\nu)}{\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{senh}(\nu)} \\ &= \frac{2 e^{(p+2)\nu}}{\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{senh}(\nu)} \left( \operatorname{sen}((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \operatorname{sen}((p+2)\varphi) \right) \\ &\quad - e^{-(2p+3)\nu} \operatorname{sen}((p+2)\varphi) - e^{-2(p+2)\nu} \operatorname{sen}((p+1)\varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\cos((p+1/2)\varphi) \cosh(p+3/2)\nu}{\cos(\varphi) \cosh(\nu)} - \frac{\cos((p+3/2)\varphi) \cosh((p+1/2)\nu)}{\cos(\varphi) \cosh(\nu)} \\ &= \frac{2 e^{(p+2)\nu}}{\cos(\varphi) \cosh(\nu)} \left( \cos((p+1)\varphi) + e^{-2(p+2)\nu} \cos((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \cos((p+2)\varphi) \right) \\ &\quad - e^{-(2p+3)\nu} \cos((p+2)\varphi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\operatorname{sen}((p+1/2)\varphi) \operatorname{senh}(p+3/2)\nu}{\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{senh}(\nu)} - \frac{\operatorname{sen}((p+3/2)\varphi) \operatorname{senh}((p+1/2)\nu)}{\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{senh}(\nu)} \\ &= \frac{2 e^{(p+3/2)\nu}}{\operatorname{sen}(\varphi/2) \operatorname{senh}(\nu/2)} \left( \operatorname{sen}((p+1/2)\varphi) - e^{-2(p+3/2)\nu} \operatorname{sen}((p+1/2)\varphi) \right) \\ &\quad - e^{-\nu} \operatorname{sen}((p+3/2)\varphi) + e^{-(2p+2)\nu} \operatorname{sen}((p+3/2)\varphi). \end{aligned}$$

Estas últimas relaciones se obtuvieron usando los polinomios de Chebyshov y el Lema 3.2.

Luego, aplicando la fórmulas de Elouafi a los determinantes de las matrices de Toeplitz que genera el símbolo  $b = \lambda - a$ , se obtienen dos casos:

1. Tamaño par,  $D_{2p}(\lambda - a)$ :

$$D_{2p}(\lambda - a) = \frac{\mathcal{V}^{(p)}(y_1, y_2) \mathcal{W}^{(p)}(y_1, y_2)}{4(\cosh(\nu) - \cos(\varphi))^2},$$

2. Y de tamaño impar, es decir  $D_{2p+1}(\lambda - a)$ :

$$D_{2p+1}(\lambda - a) = -\frac{\mathcal{U}^{(p)}(y_1, y_2) \mathcal{T}^{(p)}(y_1, y_2)}{(\cosh(\nu) - \cos(\varphi))^2}.$$

## 4.5. Ejemplo $g(\theta) = \text{sen}^4(\theta/2)$

En nuestro último ejemplo la siguiente función trigonométrica  $g: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$ , definida

$$g(\theta) \doteq \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Note que  $g(\theta) = a(e^{i\theta})$ , donde

$$a(t) = \frac{(t-1)^4}{16t^2}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

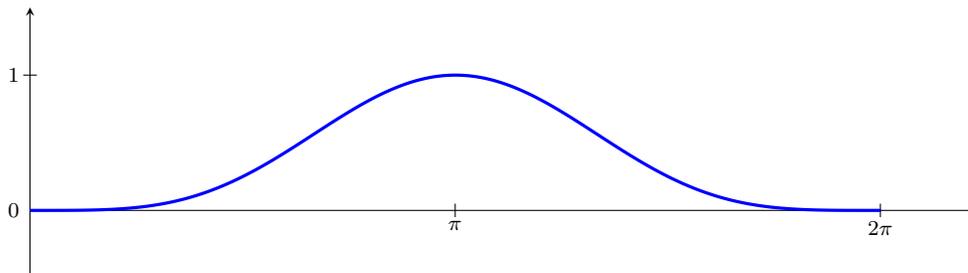
Luego

$$g(\theta) = \frac{e^{-2i\theta}}{16} - \frac{e^{-i\theta}}{4} + \frac{3}{8} - \frac{e^{i\theta}}{4} + \frac{e^{2i\theta}}{16}.$$

Note además que

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0, \quad g^{(4)}(0) > 0.$$

La gráfica de  $g$  es:



**117 Observación.** Sabemos que la imagen de  $g$  es  $[0, 1]$ , por lo tanto, por la Proposición 80

$$\text{sp}(T_n(a)) \subset (0, 1) \quad \text{para todo } n.$$

## Polinomio característico usando la fórmula de Widom

Ahora, sea  $\lambda \in (0, 1)$ , resolvamos la ecuación  $a(t) = \lambda$ :

$$\begin{aligned} a(t) - \lambda &= \frac{1}{16t^2} \left( (t-1)^4 - 16\lambda t^2 \right) = \\ &= \left( t^2 - 2(1 - 2\sqrt{\lambda})t + 1 \right) \left( t^2 - 2(1 + 2\sqrt{\lambda})t + 1 \right). \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio  $(t^2 - 2(1 - 2\sqrt{\lambda})t + 1)$  son complejas, pueden ser escritas en términos de  $e^{i\alpha_\lambda}$  y  $e^{-i\alpha_\lambda}$ , donde

$$\alpha_\lambda := 2 \arcsen \sqrt[4]{\lambda}.$$

En efecto, estos números satisfacen las fórmulas de Viete:

$$e^{i\alpha_\lambda} e^{-i\alpha_\lambda} = 1, \quad e^{i\alpha_\lambda} + e^{-i\alpha_\lambda} = 2 \cos(\alpha_\lambda) = 2(1 - 2 \sin^2(\alpha_\lambda/2)) = 2(1 - 2\sqrt{\lambda}).$$

Ahora las raíces del polinomio  $(t^2 - 2(1 + 2\sqrt{\lambda})t + 1)$  son  $e^{\beta_\lambda}$  y  $e^{-\beta_\lambda}$ , donde

$$\beta_\lambda := 2 \operatorname{arcsenh} \sqrt[4]{\lambda}.$$

ya que su producto es 1 y su suma da:

$$e^{\beta_\lambda} + e^{-\beta_\lambda} = 2 \cosh(\beta_\lambda) = 2(1 + 2 \sinh^2(\alpha_\lambda/2)) = 2(1 + 2\sqrt{\lambda}).$$

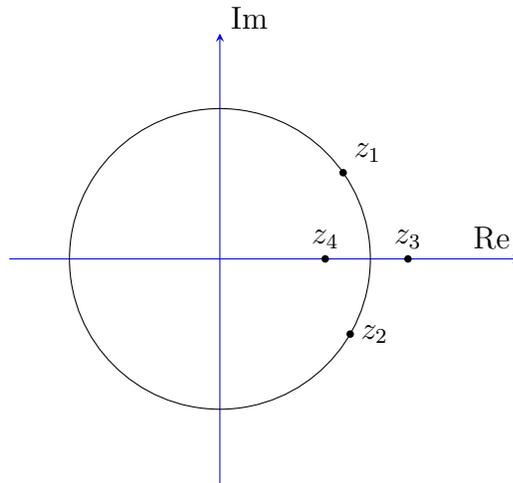
Llegamos a la siguiente descomposición  $b(t) - \lambda$ :

$$b(t) - \lambda = \frac{1}{16t^2} (t - e^{i\alpha_\lambda})(t - e^{-i\alpha_\lambda})(t - e^{\beta_\lambda})(t - e^{-\beta_\lambda}).$$

si definimos a las raíces de  $b$  como  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , entonces

$$z_1 = e^{i\alpha_\lambda}, \quad z_2 = e^{-i\alpha_\lambda}, \quad z_3 = e^{\beta_\lambda}, \quad z_4 = e^{-\beta_\lambda}$$

Aquí la localización de estas raíces:



Utilizando la fórmula de Widom 4.5 calculemos  $D_n(b)$ , con  $b = \lambda - a$ :

$$D_n(\lambda - a) = \frac{e^{(n+1)\beta_\lambda}}{2^{4n+1} \operatorname{sen}(\alpha_\lambda) \operatorname{senh}(\beta_\lambda) P_\lambda} \left( \operatorname{sen}((n+1)\alpha_\lambda - 2\gamma) + \frac{2}{P_\lambda} e^{-(n+2)\beta_\lambda} (1 - e^{-2\beta_\lambda}) \operatorname{sen}(\alpha_\lambda) - e^{-(2n+4)\beta_\lambda} \operatorname{sen}((n+3)\alpha_\lambda) + 2\gamma_\lambda \right).$$

donde

$$P_\lambda = 1 - 2e^{-\beta_\lambda} \cos(\alpha_\lambda) + e^{-2\beta_\lambda}$$

y

$$\gamma_\lambda = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_\lambda)}{e^{\beta_\lambda} - \cos(\alpha_\lambda)}.$$

**118 Ejemplo.** Así las matrices de Toeplitz generadas por son pentadiagonales. Para  $n = 6$  el determinante para el símbolo definido  $b = \lambda - a$  es:

$$D_6(b) = \begin{vmatrix} \lambda - 3/8 & 1/4 & -1/16 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & \lambda - 3/8 & 1/4 & -1/16 & 0 & 0 \\ -1/16 & 1/4 & \lambda - 3/8 & 1/4 & -1/16 & 0 \\ 0 & -1/16 & 1/4 & \lambda - 3/8 & 1/4 & -1/16 \\ 0 & 0 & -1/16 & 1/4 & \lambda - 3/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/16 & 1/4 & \lambda - 3/8 \end{vmatrix}.$$

Escribimos el programa que calcula GNU Octave para el polinomio característico generado por  $g(\theta) = \operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , es decir es el programa de GNU Octave para realizar el cálculo de  $D_n(\lambda - a)$ .

```

function D = polcarsen4(n, lambda)
2   c = zeros(n, 1);
   c(1) = lambda - 3 / 8;
4   c(2) = 1 / 4;
   c(3) = - 1 / 16;
6   A = toeplitz(c);
   D = det(A);
8 endfunction

```

## Comprobaciones numéricas

Este código calcula el valor del determinante dado el tamaño de la matriz  $n$  y dado  $\lambda \in (0, 1)$ . Primero, se definen las raíces de  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , sin simplificar.

```

function D = polcarWidomz2(n, lambda)
2   z1 = exp(i * alpha(lambda));
   z2 = exp(-i * alpha(lambda));
4   z3 = exp(beta(lambda));
   z4 = exp(-beta(lambda));
6   M1 = ((z1 * z2)^(n+2)) * (z1-z2) * (z3-z4);
   M2 = -((z1 * z3)^(n+2)) * (z1-z3) * (z2-z4);
8   M3 = ((z1 * z4)^(n+2)) * (z1-z4) * (z2-z3);
   M4 = ((z2 * z3)^(n+2)) * (z2-z3) * (z1-z4);
10  M5 = -((z2 * z4)^(n+2)) * (z2-z4) * (z1-z3);
   M6 = ((z3 * z4)^(n+2)) * (z3-z4) * (z1-z2);
12  num = M1 + M2 + M3 + M4 + M5 + M6;
   den = 16^(n) * (z4-z3) * (z4-z2) * (z4-z1);
14  den =den * (z3-z2) * (z3-z1) * (z2-z1);
   D = ((-1)^(n)) * num/den;
16 endfunction

```

Luego, tenemos el programa que calcula  $\alpha_\lambda$ ,  $\beta_\lambda$  y  $\gamma_\lambda$ .

```

function result = alpha(lambda)
2   result = 2*asin((lambda)^(1/4));
endfunction

```

```

1 function result = beta(lambda)
   result = 2 * asinh((lambda)^(1/4));
3 endfunction

```

```

1 function resultat = gamma01(lambda)
   num = sin(alpha(lambda));
3   den = exp(beta(lambda)) - cos(alpha(lambda));
   resultat = atan(num/den);
5 endfunction

```

Y ahora finalmente tenemos el programa para la fórmula de Widom con las raíces desarrolladas:

```

1 function D = polcarWidom2(n, lambda)
   P = 1 - 2 * cos(alpha(lambda)) * exp(-beta(lambda)) + exp(-2 *
   beta(lambda));
3   s1 = sin((n+1) * alpha(lambda) - 2 * gamma01(lambda));

```

```

s2 = 2*exp(-(n+2)*beta(lambda))*(1-exp(-2*beta(lambda)))*sin
(alpha(lambda))/P;
5 s3 = exp(-(2*n+4)*beta(lambda))*sin((n+3)*alpha(lambda)+2*
gamma01(lambda))
num = s1 + s2 - s3;
7 den = sinh(beta(lambda))*P*sin(alpha(lambda))*2.^(4*n+1);
coef = exp((n+1)*beta(lambda))*num/den;
9 D = coef;
endfunction

```

## Polinomio característico usando la fórmula de Elouafi

Usando en este ejemplo la fórmula de Elouafi, y la ecuación (4.6), se obtiene:

$$q(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \lambda - \frac{1}{4}.$$

Las raíces de  $q(x)$  son:

$$y_1 = -1 + 2\sqrt{\lambda}, \quad y_2 = -1 - 2\sqrt{\lambda}.$$

Notamos que  $y_1 \in (-1, 1)$  y que  $y_2 < -1$ . De manera análoga introduciremos dos variables auxiliares,  $\varphi \in (0, \pi)$  y  $\nu < 0$  mediante las reglas:

$$y_1 = \cos(\varphi), \quad y_2 = \cosh(\nu).$$

De las fórmulas de Elouafi:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{(p)}(y_1, y_2) &= \cos((p+1)\varphi) \cosh((p+2)\nu) - \cos((p+2)\varphi) \cosh((p+1)\nu) \\ &= 2e^{(p+2)\nu} \left( \cos((p+1)\varphi) + e^{-2(p+2)\nu} \cos((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \cos((p+2)\varphi) \right. \\ &\quad \left. - e^{-(2p+3)\nu} \cos((p+2)\varphi) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\sin((p+1)\varphi) \sinh((p+2)\nu) - \sin((p+2)\varphi) \sinh((p+1)\nu)}{\sin(\varphi) \sinh(\nu)} \\ &= \frac{2e^{(p+2)\nu}}{\sin(\varphi) \sinh(\nu)} \left( \sin((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \sin((p+2)\varphi) \right. \\ &\quad \left. - e^{-(2p+3)\nu} \sin((p+2)\varphi) - e^{-2(p+2)\nu} \sin((p+1)\varphi) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\cos((p+1/2)\varphi) \cosh(p+3/2)\nu - \cos((p+3/2)\varphi) \cosh((p+1/2)\nu)}{\cos(\varphi) \cosh(\nu)} \\ &= \frac{2e^{(p+2)\nu}}{\cos(\varphi) \cosh(\nu)} (\cos((p+1)\varphi) + e^{-2(p+2)\nu} \cos((p+1)\varphi) - e^{-\nu} \cos((p+2)\varphi) \\ &\quad - e^{-(2p+3)\nu} \cos((p+2)\varphi)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{(p)}(y_1, y_2) &= \frac{\text{sen}((p+1/2)\varphi) \sinh(p+3/2)\nu - \text{sen}((p+3/2)\varphi) \sinh((p+1/2)\nu)}{\text{sen}(\varphi) \sinh(\nu)} \\ &= \frac{2e^{(p+3/2)\nu}}{\text{sen}(\varphi/2) \sinh(\nu/2)} (\text{sen}((p+1/2)\varphi) - e^{-2(p+3/2)\nu} \text{sen}((p+1/2)\varphi) \\ &\quad - e^{-\nu} \text{sen}((p+3/2)\varphi) + e^{-(2p+2)\nu} \text{sen}((p+3/2)\varphi)).\end{aligned}$$

Éstas últimas relaciones se obtuvieron usando los polinomios de Chebyshov y el Lema 3.2

Luego, aplicando la fórmulas de Elouafi a los determinantes de las matrices de Toeplitz que genera el símbolo  $b = \lambda - a$ , se obtienen los dos casos:

1. Tamaño par,  $D_{2p}(\lambda - a)$ :

$$D_{2p}(\lambda - a) = \frac{\mathcal{V}^{(p)}(y_1, y_2) \mathcal{W}^{(p)}(y_1, y_2)}{4(\cosh(\nu) - \cos(\varphi))^2},$$

2. Y de tamaño impar, es decir  $D_{2p+1}(\lambda - a)$ :

$$D_{2p+1}(\lambda - a) = -\frac{\mathcal{U}^{(p)}(y_1, y_2) \mathcal{T}^{(p)}(y_1, y_2)}{(\cosh(\nu) - \cos(\varphi))^2}$$

# Apéndice A

## Algunas propiedades de los determinantes

**119 Definición** (Determinante de una matriz). Sea  $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ , es decir  $A$  es una matriz  $n \times n$  con entradas en  $\mathbb{C}$ . El determinante de  $A$  se puede definir de la siguiente manera:

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} \text{sgn}(\varphi) A_{1,\varphi(1)} \cdots A_{n,\varphi(n)}, \quad (\text{A.1})$$

la suma es sobre todas las permutaciones del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  y por consecuencia contiene  $n!$  sumandos.

**120 Definición** (Menor de una matriz). Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq m$ ,  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$ , el menor de rango  $r$  de la matriz  $A$ , correspondiente a las filas  $i_1, i_2, \dots, i_r$  y las columnas  $j_1, j_2, \dots, j_r$ , se define el determinante el determinante de la submatriz  $A_{\{i_1, \dots, i_r\}, \{j_1, j_2, \dots, j_r\}}$  y se denota por

$$M_A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix}.$$

**121 Definición** (Cofactor). Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ ,  $p, q \in \{1, 2, \dots, n\}$ . El cofactor del elemento  $(p, q)$  de la matriz  $A$  denotado por  $\hat{A}_{p,q}$ , se define como el menor correspondiente a las filas  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{p\}$  y las columnas  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{q\}$ , multiplicado por  $(-1)^{p+q}$ :

$$\hat{A}_{p,q} := (-1)^{p+q} M_A \begin{pmatrix} 1 & \dots & p-1 & p+1, & \dots & n \\ 1 & \dots & q-1 & q+1, & \dots & n \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Notemos que  $M_A \begin{pmatrix} 1 & \dots & p-1 & p+1, & \dots & n \\ 1 & \dots & q-1 & q+1, & \dots & n \end{pmatrix}$  es el determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila  $p$  y la columna  $q$  de  $A$ .

Los siguientes dos resultados son conocidos y se pueden encontrar por ejemplo en el libro [12].

**122 Proposición** (Fórmula de Cauchy–Binet). *Sea  $A \in M_{m,n}(C)$   $B \in M_{n,q}(C)$ , y  $p \leq \min\{m, q\}$ , entonces cualquier menor de orden  $p$  del producto de la matriz  $AB$  puede ser representado por la Fórmula de Cauchy–Binet:*

$$\det((AB)_{\alpha\gamma}) = \sum_{\beta} \det A_{\alpha\beta} \det B_{\beta\gamma},$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ , con  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$  con  $1 \leq \gamma_1 < \dots < \gamma_p \leq q$  y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$  con  $1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_p \leq n$ .

**123 Proposición** (Determinante de Vandermonde). *Un determinante de orden  $n$  del tipo*

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

donde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son elementos de un campo, se llama determinante de Vandermonde. Para cada  $n \geq 2$  se tiene que

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

# Apéndice B

## Identidades trigonométricas e hiperbólicas

Las funciones trigonométricas se pueden definir de varias maneras equivalentes, una de ellas es a través de la función exponencial.

**124 Definición.** Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \text{sen}(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \\ \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \text{senh}(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}.\end{aligned}$$

**125 Corolario** (Fórmula de Euler). Dado  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta).$$

Se darán algunas identidades trigonométricas e hiperbólicas conocidas.

**126 Lema.** Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se tienen las siguientes relaciones trigonométricas

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \text{sen}(\beta), \quad (\text{B.1})$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \pm \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta), \quad (\text{B.2})$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \quad (\text{B.3})$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \text{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (\text{B.4})$$

**127 Lema.** Para todo  $a, b \in \mathbb{C}$ ,

$$2 \cosh(a) \cosh(b) = \cosh(a + b) + \cosh(a - b),$$

$$2 \cosh(a) \text{senh}(b) = \text{senh}(a + b) - \text{senh}(a - b).$$

**128 Lema.** Para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y  $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha),$$

$$\cos(k\pi + \alpha) = (-1)^k \cos(\alpha),$$

$$\operatorname{sen}(k\pi + \alpha) = (-1)^k \operatorname{sen}(\alpha).$$

# Apéndice C

## Logaritmos de números complejos

En esta sección del apéndice recordemos algunas de las propiedades de logaritmos de números complejos (sin demostraciones). Estas propiedades son esenciales para la definición del índice de una función.

Recordemos que la función exponencial  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se puede definir de varias maneras equivalentes, por ejemplo, mediante la serie

$$\exp(z) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La imagen del eje real  $\mathbb{R}$  bajo la función  $x \mapsto \exp(ix)$  es toda la circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$ . El mínimo número real positivo  $x$  tal que  $\exp(ix) = 1$  es  $2\pi$  (esta propiedad se puede aceptar como la definición analítica del número  $\pi$ ).

**129 Proposición.** *El conjunto solución de la ecuación  $\exp(w) = 1$  es  $2\pi i\mathbb{Z}$ .*

**130 Proposición.** *Para cada  $z$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  existe una infinidad de números  $w$  en  $\mathbb{C}$  tales que  $\exp(w) = z$ . Estos números se llaman logaritmos de  $z$ . Si  $\exp(w_1) = z$ , entonces para cada  $m$  en  $\mathbb{Z}$  tenemos  $\exp(w_1 + 2\pi m i) = z$ . Al revés, si  $\exp(w_1) = z$  y  $\exp(w_2) = z$ , entonces existe un  $m$  en  $\mathbb{Z}$  tal que*

$$z_1 - z_2 = 2\pi m i.$$

El problema del cálculo de logaritmos de un número complejo tiene una solución muy simple en el disco

$$1 + \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |1 - z| < 1\}$$

**131 Proposición** (La serie de Mercator). *Definimos la función  $\log_1: 1 + \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  como la siguiente serie de potencias:*

$$\log_1 z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}, \quad |z-1| < 1.$$

La serie converge absolutamente en  $1 + \mathbb{D}$ , y la función  $\log_1$  tiene las siguientes propiedades:

1.  $\log_1$  es analítica en  $1 + \mathbb{D}$ ; en particular, es continua en  $1 + \mathbb{D}$ .
2.  $\log_1 1 = 0$ .
3.  $e^{\log_1 z} = z$  para cada  $z \in 1 + \mathbb{D}$ .
4.  $-\pi < \text{Im}(\log_1 z) < \pi$  para cada  $z \in 1 + \mathbb{D}$ .

Sería cómodo tener una función que a cada número complejo no nulo  $z$  le asigne un número complejo  $w$  tal que  $\exp(w) = z$ . Se trata de elegir un número  $w$  entre muchos con esta propiedad, es decir, poner condiciones adicionales sobre  $w$ . En varios libros matemáticos y en la mayoría de los lenguajes de programación se usa el convenio que  $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ :

**132 Notación** (El valor principal del logaritmo de un número complejo no nulo). Para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existe un único número  $w$  en  $\mathbb{C}$  tal que  $\exp(w) = z$  y  $-\pi < \text{Im}(w) \leq \pi$ . Este número se llama el *valor principal del logaritmo* de  $z$  y se denota por  $\log z$ .

Con la notación  $\log$  el conjunto solución de la ecuación  $\exp(w) = z$  se escribe como

$$\log(z) + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Por la Proposición 131,  $\log(z) = \log_1(z)$  para cada  $z \in 1 + \mathbb{D}$ .

Del punto de vista constructivo, la función  $\log$  tiene un defecto muy serio porque no es continua en los puntos del semieje real negativo. En efecto, si  $x < 0$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(x + \frac{i}{n}\right) = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(x - \frac{i}{n}\right) = -\pi,$$

aunque ambas sucesiones  $\left(x + \frac{i}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$  y  $\left(x - \frac{i}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$  tienden a  $x$ .

De hecho, no se puede definir un logaritmo continuo en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**133 Proposición.** No existe ninguna función continua  $\ell: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\exp(\ell(z)) = z$  para cada  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

En estos apuntes evitamos la función  $\log$  y usamos las Proposiciones 130 y 131.

# Apéndice D

## Logaritmos continuos de funciones complejas

En esta parte vamos a demostrar que para cada función  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  existe un logaritmo continuo, además es único salvo sumandos múltiplos de  $2\pi i$ . Dado un número  $z \in \mathbb{C}$ , denotemos por  $\log(z)$  al logaritmo principal cuya parte imaginaria pertenece a  $(-\pi, \pi]$ . El siguiente ejemplo muestra que la composición  $\log \circ f$  no siempre es continua.

**134 Ejemplo.** Definimos  $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mediante la regla

$$f(x) = e^{ix}.$$

Entonces

$$\log f(x) = \begin{cases} ix, & \text{si } x \in [0, \pi]; \\ ix - 2\pi i, & \text{si } x \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Notemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \log f(x) = i\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \log f(x) = -i\pi,$$

así que la función  $\log \circ f$  no es continua. Por otro lado, la función

$$g(x) = ix$$

es un logaritmo continuo de la función  $f$ .

**135 Proposición** (Existencia de un logaritmo continuo de una función continua). *Sea  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Entonces existe  $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  tal que  $\exp \circ g = f$ .*

*Demostración.* Definamos al número  $M$  como:

$$M \doteq \sup_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x)|^{-1}.$$

Por ser  $f$  uniformemente continua, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x, y \in [\alpha, \beta]$  tal que  $|x - y| < \delta$  se cumple la desigualdad  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2M}$ .

Construyamos una partición finita del intervalo  $[\alpha, \beta]$  de la siguiente manera:

$$n \doteq \left\lceil \frac{\beta - \alpha}{\delta} \right\rceil, \quad x_j \doteq \alpha + j \frac{\beta - \alpha}{n} \quad (j = 0, \dots, n).$$

Entonces  $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$  y

$$\sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} |f(x) - f(x_{k-1})| \leq \frac{1}{2M}.$$

Por consecuencia, para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  y  $x \in [x_{k-1}, x_k]$ ,

$$\left| \frac{f(x)}{f(x_{k-1})} - 1 \right| = \frac{|f(x) - f(x_{k-1})|}{|f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{2M|f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$  definimos una función  $g_k: [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{C}$  mediante la regla

$$g_k(x) \doteq \log_1 \frac{f(x)}{f(x_{k-1})}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k,$$

donde  $\log_1$  es el logaritmo definido en la Proposición 131 a través de la serie de Mercator. Cada función  $g_k$  es continua, se anula en el punto  $x_{k-1}$  y satisface la siguiente identidad en  $[x_{k-1}, x_k]$ :

$$f(x) = f(x_{k-1}) e^{g_k(x)}.$$

Ahora elegimos un logaritmo  $w_0$  del número  $f(\alpha)$  y construimos una función continua  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  pegando de manera natural los “trozos”  $g_k$ :

$$g(x) \doteq \begin{cases} w_0 + g_1(x), & \text{si } \alpha \leq x \leq x_1, \\ w_0 + g_1(x_1) + g_2(x), & \text{si } x_1 < x \leq x_2, \\ \vdots & \\ w_0 + g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_k(x), & \text{si } x_{n-1} < x \leq \beta. \end{cases}$$

En pocas palabras,

$$g(x) \doteq w_0 + g_k(x) + \sum_{l=1}^{k-1} g_l(x_l), \quad \text{donde} \quad k = \left\lceil n \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \right\rceil. \quad (\text{D.1})$$

Como  $g_k$  es continua en  $[x_{k-1}, x_k]$ , entonces  $g$  es continua en  $(x_k, x_k)$ . Veamos qué ocurre en los puntos  $x_k$ , con  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_k^+} g(x) &= w_0 + g_{k+1}(x_k) + \sum_{l=1}^k g_l(x_l) = w_0 + \sum_{l=1}^k g_l(x_l), \\ \lim_{x \rightarrow x_k^-} g(x) &= w_0 + g_k(x_k) + \sum_{l=1}^{k-1} g_l(x_l) = w_0 + \sum_{l=1}^k g_l(x_l).\end{aligned}$$

Por lo tanto  $g \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ . Finalmente mostremos que  $\exp(g(x)) = f(x)$ . Sea  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ . Elegimos  $k$  tal que  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ , entonces

$$\begin{aligned}\exp(g(x)) &= \exp\left(w_0 + \log_1\left(\frac{f(x)}{f(x_{k-1})}\right) + \sum_{l=1}^{k-1} g_l(x_l)\right) \\ &= \exp(w_0) \exp\left(\log_1\left(\frac{f(x)}{f(x_{k-1})}\right)\right) \prod_{l=1}^{k-1} \exp g_l(x_l) \\ &= f(x_0) \frac{f(x)}{f(x_{k-1})} \frac{f(x_1)}{f(x_0)} \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \dots \frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-2})} = f(x),\end{aligned}$$

así  $e^{g(x)} = f(x)$  para todo  $x \in [\alpha, \beta]$ .  $\square$

En el caso de una función continuamente derivable a trozos, su logaritmo continuo se puede construir por medio de una forma más simple (véase construcciones similares en [14, Teorema 10.10]).

**136 Proposición.** Sea  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  una función continuamente derivable a trozos y sea  $w_0$  un logaritmo del número  $f(\alpha)$ . Definimos  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$g(x) \doteq w_0 + \int_{\alpha}^x \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Entonces  $g$  es un logaritmo continuo de  $f$ .

*Demostración.* La función  $g$  está definida como una constante más una integral con límite superior variable de la función  $f'/f$ , y la última función es continua, excepto un número finito  $E$  de puntos. Por eso  $g$  es continua en  $[\alpha, \beta]$  y continuamente derivable en  $[\alpha, \beta] \setminus E$ . Además, para cada  $x \in [\alpha, \beta] \setminus E$  tenemos  $g'(x) = f'(x)/f(x)$ .

Demostremos que  $\exp(g(x)) = f(x)$  para cada  $x \in [\alpha, \beta]$ . Formemos la función auxiliar

$$h(x) = \frac{\exp(g(x))}{f(x)}.$$

Entonces  $h$  es continua,  $h(\alpha) = 1$  y en cada  $x \in (\alpha, \beta) \setminus E$

$$h'(x) = \frac{\exp(g(x))g'(x)f(x) - f'(x)\exp(g(x))}{f^2(x)} = 0,$$

por lo tanto  $h$  es la constante 1 y  $\exp \circ g = f$ .  $\square$

Naturalmente si  $g$  es un logaritmo continuo de  $f$ , entonces para cada  $m$  entero, la función  $g + 2m\pi i$  también es un logaritmo continuo de  $f$ .

**137 Proposición.** *Sea  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C} \setminus \{0\})$  y sean  $g, h \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  tales que  $\exp \circ g = f$  y  $\exp \circ h = f$ . Entonces existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $g(x) - h(x) = 2m\pi i$  para cada  $x \in [\alpha, \beta]$ .*

*Demostración.* Para cada  $x$  en  $[\alpha, \beta]$  se cumple la igualdad

$$\exp g(x) = \exp h(x),$$

por eso  $g(x) - h(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Mas aún, definamos una función  $q: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{Z}$  de la siguiente manera:

$$q(x) \doteq \frac{g(x) - h(x)}{2\pi i}.$$

Como  $q$  es continua en  $[\alpha, \beta]$ , la imagen de  $q$  es un conjunto conexo. Pero la topología de  $\mathbb{Z}$  es discreta y los conjuntos conexos no vacíos son los unipuntuales. Por eso

$$q([\alpha, \beta]) = \{m\},$$

para algún  $m \in \mathbb{Z}$ . Esto significa que  $q(x) = m$  para cada  $x \in [\alpha, \beta]$ , esto es,  $g(x) - h(x) = 2m\pi i$  para cada  $x \in [\alpha, \beta]$ .  $\square$

# Bibliografía

- [1] BAXTER, GLEN; SCHMIDT, PALLE (1961): Determinants of a certain class of non-Hermitian Toeplitz matrices. *Math. Scand.*, 9, 122–128.  
<http://www.msccand.dk/article/viewFile/10630/8651>
- [2] BÖTTCHER, ALBRECHT; GRUDSKY, SERGEI M. (2005): *Spectral Properties of Banded Toeplitz Matrices*, SIAM. ISBN: 978-0-89871-599-6.  
doi: 10.1137/1.9780898717853
- [3] BÖTTCHER, ALBRECHT; SILBERMANN, BERNAD (1999): *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*, in Series: Universitext, Springer.  
ISBN: 978-1-4612-1426-7.
- [4] BÖTTCHER, ALBRECHT; GRUDSKY, SERGEI M.; MAKSIMENKO, EGOR A. (2010): Inside the eigenvalues of certain Hermitian Toeplitz band matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233:9, 2245–2264.  
doi: 10.1016/j.cam.2009.10.010
- [5] DEIFT, PERCY; ITS, ALEXANDER; KRASOVSKY IGOR (2013), Toeplitz Matrices and Toeplitz Determinants under the Impetus of the Ising Model: Some History and Some Recent Results, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 66:9, 1360–1438.  
doi: 10.1002/cpa.21467
- [6] GRAY, ROBERT M. (2006): *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, Foundations and Trends in Communications and Information Theory. ISBN: 978-1-933019-23-9.  
doi: 10.1561/01000000006
- [7] GRENDER, ULF; SZEGŐ, GABOR (1958): *Toeplitz Forms and their Applications*, University of California Press. ISBN: 0-8284-0321-X.
- [8] ELOUAFI, MOHAMED (2011): An eigenvalue localization theorem for pentadiagonal symmetric Toeplitz matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 435:11, 2986–2998.  
doi: 10.1016/j.laa.2011.05.025

- 
- [9] ELOUAFI, MOHAMED (2013): A note for an explicit formula for the determinant of pentadiagonal and heptadiagonal symmetric Toeplitz matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 219:9, 4789–4791.  
doi: 10.1016/j.amc.2012.10.104
- [10] ELOUAFI, MOHAMED (2014): On a relationship between Chebyshev polynomials and Toeplitz determinants. *Applied Mathematics and Computation*, 229:1, 27–33.  
doi: 10.1016/j.amc.2013.12.029
- [11] HANSEN, CHRISTINA P.; NAGY, JAMES G.; O’LEARY DIANNE (2006): *Deblurring Images, Matrices, Spectra and Filtering*, SIAM. ISBN: 978-0898716184.  
doi: 10.1137/1.9780898718874
- [12] HORN, ROGER A.; JOHNSON, CHARLES R. (2013): *Matrix Analysis*, Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-83940-2.
- [13] MASON, JOHN C.; HANDSCOMB, DAVID C. (2003): *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC. ISBN: 0-8493-0355-9.
- [14] RUDIN, WALTER (1986): *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill Company, Singapore. ISBN: 978-0070542341.
- [15] RUDIN, WALTER (1973): *Functional Analysis*, McGraw Hill Company, Singapore. ISBN: 978-0070542259.
- [16] ROCHA MARTÍNEZ, JOSÉ MARÍA (2013): *Un primer curso de integración de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$* , Instituto Politécnico Nacional, México. ISBN: 978-607-414-388-1.
- [17] SILVERMAN, RICHARD A. (1972): *Introductory Complex Analysis*, Dover Books on Mathematics, New York. ISBN: 978-0486646862.
- [18] VÁSQUEZ ROJAS, FIDEL (2014): Demostración del Teorema de Jacobi acerca de los menores de la matriz adjugada. Reporte de servicio social.  
[http://esfm.egormaximenko.com/students/Vasquez\\_Rojas\\_2014\\_social\\_service\\_es.pdf](http://esfm.egormaximenko.com/students/Vasquez_Rojas_2014_social_service_es.pdf)
- [19] WIDOM, HAROLD (1958): On the eigenvalues of certain Hermitian operators. *Trans. Amer. Math.*, 88, 491–522.  
doi: 10.1090/S0002-9947-1958-0098321-8

# Índice alfabético

- $D_n(a)$ , 36
- $\mathcal{T}_n$  (polinomios de Chebyshev del primer tipo), 53
- $\mathcal{U}_n$  (polinomios de Chebyshev del segundo tipo), 53
- $\mathcal{V}_n$  (polinomios de Chebyshev del tercer tipo), 53
- $\mathcal{W}_n$  (polinomios de Chebyshev del cuarto tipo), 53
- índice de una función, 10
- álgebra de Wiener, 15
- álgebra de funciones racionales, 19
  
- circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$ , 12
- comprobaciones numéricas de  $4 \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 16 \operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , 79
- comprobaciones numéricas de  $\operatorname{sen}^2(\theta)$ , 74
- comprobaciones numéricas de  $\operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , 87
- conjunto de elementos invertibles del álgebra  $G(C(\mathbb{T}))$ , 17
- criterio de invertibilidad del operador de Toeplitz, 29
  
- determinante de Vandermonde, 92
- disco unitario  $\mathbb{D}$ , 11
  
- ejemplo  $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta)$ , 69
- ejemplo  $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ , 46
- ejemplo  $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 4 \operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , 77
- ejemplo  $g(\theta) = \operatorname{sen}^4(\theta/2)$ , 85
- existencia de logaritmo continuo de una función, 97
  
- fórmula de Cauchy–Binet, 92
- fórmula de Elouafi, 60
- fórmula de Elouafi para matrices pentadiagonales, 68
- fórmula de Widom, 42
- forma cuadrática asociada a una matriz de Toeplitz, 34
  
- logaritmo continuo de una función continua, 9
  
- matriz de Toeplitz, 31
- menor de una matriz, 91
  
- operador de convolución sobre  $\mathbb{Z}$ , 23
- operador de desplazamiento, 25
- operador de multiplicación, 23
- operador de Toeplitz en el espacio  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ , 26
  
- polinomios de Chebyshev, 53
- polinomios de Laurent, 39
  
- rango esencial, 23
  
- serie de Mercator, 95
  
- teorema de Baxter–Schmidt, 37
- teorema de factorización de Wiener–Hopf, 22
- teorema de Jacobi, sobre menores de la matriz clásica, 36
- teorema de Wiener, 17
- teorema límite fuerte de Szegő, 50
- transformada de Fourier–Plancherel, 23