Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

Diagonalización de operadores invariantes bajo traslaciones horizontales en espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Tesis que presenta

Christian Rene Leal Pacheco

para obtener el grado de
Maestro en Ciencias Fisicomatemáticas

Directores de tesis:

Dr. Egor Maximenko
Dr. Crispin Herrera Yañez

Ciudad de México
Diciembre, 2018

SIP-13-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REGISTRO DE TEMA DE TESIS
Y DESIGNACIÓN DE DIRECTORES DE TESIS

México, D.F. a **22** de **Noviembre** del **2018**

El Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de **ESFM** en su sesión **Ordinaria** No **06** celebrada el día **25** del mes de **Abril de 2018** conoció la solicitud presentada por el(la) alumno(a):

Leal	**Pacheco**	**Christian Rene**
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre (s)

Con registro: | A | 1 | 6 | 0 | 3 | 4 | 8 |

Aspirante de: **Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas**

1.- Se designa al aspirante el tema de tesis titulado:

Diagonalización de operadores invariantes bajo traslaciones horizontales en espacios de Hilbert con núcleo reproductor

De manera general el tema abarcará los siguientes aspectos:

(Ver Anexo)

2.- Se designan como Directores de Tesis a los Profesores:

Dr. Egor Maximenko y el Dr. Crispin Herrera Yañez

3.- El trabajo de investigación base para el desarrollo de la tesis será elaborado por el alumno en:

Las Instalaciones de la Escuela Superior de Física y Matemáticas

que cuenta con los recursos e infraestructura necesarios.

4.- El interesado deberá asistir a los seminarios desarrollados en el área de adscripción del trabajo desde la fecha en que se suscribe la presente hasta la aceptación de la tesis por la Comisión Revisora correspondiente:

Directores de Tesis

[redacted]
Dr. Egor Maximenko

[redacted]
Dr. Crispin Herrera Yañez

Aspirante

[redacted]
Leal Pacheco Christian Rene

Presidente del Colegio

[redacted]
Dra. Concepción Mejia García

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE
OSGRADO E INVESTIGACIÓN
IPN

SIP-14-BIS

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de **México** siendo las **13:00** horas del día **29** del mes de **Noviembre** del **2018** se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de **ESFM** para examinar la tesis titulada:

Diagonalización de operadores invariantes bajo traslaciones horizontales en espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Presentada por el alumno:

Leal	Pacheco	Christian Rene
Apellido paterno	Apellido materno	Nombre(s)

Con registro: | B | 1 | 6 | 0 | 3 | 4 | 8 |

aspirante de:

Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***APROBAR LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Directores de tesis

[redacted]

Dr. Egor Maximenko

[redacted]

Dr. Crispin Herrera Yañez

[redacted]

Dra. Maribel Loaiza Leyva

[redacted]

Dr. Luis Manuel Tovar Sánchez

[redacted]

Dr. Valeri Kucherenko

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

SEP

[redacted]

Dra. Concepción Mejía García

POSGRADO E INVESTIGACIÓN

IPN

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA DE CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México, el día **22** del mes de **noviembre** del año **2018**, el que suscribe, **Christian Rene Leal Pacheco**, alumno del programa de **Maestría en Ciencias Fisicomatemáticas**, con número de registro **B160348**, adscrito a **la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Física y Matemáticas**, manifiesta que es el autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de los **Dres. Egor Maximenko y Crispin Herrera Yañez** y cede los derechos del trabajo titulado **Diagonalización de operadores invariantes bajo traslaciones horizontales en espacios de Hilbert con núcleo reproductor**, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a las siguientes direcciones **emaximenko@ipn.mx**, **cherreray@ipn.mx**, **chlealmath@gmail.com**. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

[redacted]

Christian Rene Leal Pacheco

Abstract

Suppose that $\mathcal{H}$ is a reproducing kernel Hilbert space of functions defined on the upper half-plane $\Pi \subset \mathbb{C}$. Let $\mathcal{V}$ be the algebra of translation-invariant bounded linear operators acting on $\mathcal{H}$ that commute with all translation operators. We determine when the algebra $\mathcal{V}$ is commutative.

In the commutative case, we construct a unitary operator R that "diagonalizes" the elements of $\mathcal{V}$, i.e. RSR^* converts into a multiplication operator for any S in $\mathcal{V}$.

This work generalizes many results previously found by Vasilevski, Grudsky, Karapetyants, Hutník, Hutníková, Loaiza, Lozano, Ramírez–Ortega, and Sánchez- Nungaray.

Resumen

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor de funciones definidas sobre el semiplano superior $\Pi \subset \mathbb{C}$. Denotemos por $\mathcal{V}$ al álgebra de todos los operadores lineales acotados invariantes bajo traslaciones horizontales que actúan en $\mathcal{H}$ y que conmutan con todos los operadores de traslación. En este trabajo determinamos cuándo el álgebra $\mathcal{V}$ es conmutativa.

En el caso conmutativo, se construye un operador unitario R que “diagonaliza” a los elementos de $\mathcal{V}$, esto es, RSR^* se convierte en operador de multiplicación, para cualquier S en $\mathcal{V}$.

Este trabajo generaliza algunos resultados previamente obtenidos por Vasilevski, Grudsky, Karapetyants, Hutník, Hutníková, Loaiza, Lozano, Ramírez–Ortega y Sánchez–Nungaray.

A mis padres, Cristina y Alfonso.
A mi hermano Oscar.

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mi familia por su apoyo incondicional e inconmensurable amor. Y de manera muy especial al Dr. Egor Maximenko por su infinita paciencia, y por compartirme de sus conocimientos. También al Dr. Crispin Herrera Yañez.

Este trabajo de tesis fue auspiciado por la Beca CONACyT, por la Beca Institucional Tesis Maestría (IPN) y por el proyecto de investigación IPN–SIP 20180070.

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudia el álgebra de operadores lineales acotados invariantes bajo traslaciones horizontales que actúan en $\mathcal{H}$ y que conmutan con todos los operadores de traslación, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor de funciones definidas en el semiplano superior $\Pi \subset \mathbb{C}$; a saber, se determina cuándo dicha álgebra es conmutativa.

El estudio de la teoría de operadores en espacios de Bergman y otros dominios, de manera intensa en años recientes (véase p. ej. [29, 30]), revela la relación estrecha que existe entre esta y otras áreas como la teoría de aproximación o la mecánica cuántica (véase p. ej. [15]), por mencionar algunas. En general, las propiedades de estos operadores suelen ser bastante complicadas. No obstante, es posible estudiar esta clase de operadores mediante algunas subclases "especiales", por ejemplo, operadores invariantes bajo ciertas simetrías. Tal es el caso, por ejemplo, estudiado por Dawson, Ólafsson y Quiroga-Barranco (2015, [5]), el cual se aborda con dominios y grupos de transformaciones mucho más generales pero solamente con espacios de Bergman de funciones analíticas.

Se sabe y es fácil ver que los operadores de Toeplitz radiales en el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ son diagonales con respecto a la base de monomios y generan un álgebra C* conmutativa. En 1999, Vasilevski [26] encontró otra álgebra C* de operadores conmutativa no trivial en el espacio de Bergman. A saber, él consideró operadores de Toeplitz invariantes bajo traslaciones horizontales en el semiplano superior Π, y construyó un operador $\widetilde{R}\colon \mathcal{A}^2(\Pi) \to L^2(\mathbb{R}_+)$ que "diagonaliza" tales operadores, es decir, los convierte en operadores de multiplicación. Posteriormente, Vasilevski y otros matemáticos han obtenido resultados similares para otras clases de operadores, otros espacios de funciones, y otros dominios [7, 12, 18, 20]. En ese sentido resulta pues, el esquema propuesto en este trabajo, exitoso, ya que generaliza algunos de estos resultados.

En el Capítulo 1 se introduce el concepto de espacio de Hilbert con núcleo reproductor y se estudian algunas de las propiedades principales, tales como la existencia y unicidad. A través de una base ortonormal se calcula el núcleo reproductor y se introducen algunos ejemplos que nos serán útiles para nuestra tesis, tales como los espacios de Bergman sobre distintos dominios, entre otros.

En el Capítulo 2 se estudian los operadores de multiplicación en $L^2(X, \mu)$, donde

(X, μ) es un espacio de medida, con símbolo generador en $L^\infty(X, \mu)$. Se demuestra que un operador es de multiplicación si y solo si conmuta con todos los operadores de multiplicación por caracteres. Como una herramienta se utiliza la topología débil-* y se muestra que el conjunto de caracteres del grupo $\mathbb{R}$ es denso en $L^\infty(\mathbb{R})$ con dicha topología. Asimismo se introduce la transformada de Fourier y se describe la relación de ésta con el proceso de diagonalización.

En el Capítulo 3, se estudia el álgebra $\mathcal{V}$ de los operadores lineales acotados invariantes bajo traslaciones horizontales y que conmutan con los operadores de traslación. Debido a que los elementos de esta álgebra actúan en espacios de funciones definidas sobre el semiplano superior $\Pi := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, se estudia la transformada de Fourier del núcleo reproductor sobre la primera coordenada. Se demuestra el resultado principal, Teorema 3.4.2, el cual es un criterio de conmutatividad del álgebra $\mathcal{V}$.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan algunos ejemplos en los cuales es posible aplicar el esquema desarrollado en el Capítulo 3, y que han sido ya objeto de estudio de varios autores: Vasilevski, Grudsky, Karapetyants, Hutník, Hutníková, Loaiza, Lozano, Sánchez-Nungaray y Ramírez Ortega.

Esta tesis está basada fundamentalmente en las ideas de Egor Maximenko, Crispin Herrera Yañez y Gerardo Ramos Vázquez; sin embargo y a pesar de que su trabajo aún no ha sido publicado, los resultados principales fueron expuestos en el Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana 2018. Nuestra labor ha consistido principalmente en la verificación de tales resultados, así como la revisión de otros auxiliares, y la escritura.

Capítulo 1

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

En este capítulo nos introduciremos a la teoría elemental de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor (EHNR).

En la Sección 1.1 revisaremos algunos conceptos y resultados auxiliares de los espacios de Hilbert. Posteriormente, Sección 1.2 y Sección 1.3, estudiaremos algunas propiedades del núcleo reproductor, y la construcción de este a partir de una base ortonormal, respectivamente. Veremos también algunos ejemplos en distintos espacios de funciones, Sección 1.4, en los cuales se calcula el núcleo reproductor de manera explícita. Finalmente, en la Sección 1.5, mencionaremos algunos conceptos básicos sobre álgebras de operadores.

1.1. Sobre espacios de Hilbert

Definición 1.1.1. Un *producto pre-interno* sobre un espacio vectorial complejo X es una forma sesquilineal hermitiana semidefinida positiva $\langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{C}$, esto es, para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

(i) $\langle x + y\,, z \rangle = \langle x\,, z \rangle + \langle y\,, z \rangle$,

(ii) $\langle \alpha x\,, y \rangle = \alpha \langle x\,, y \rangle$,

(iii) $\langle x\,, y \rangle = \overline{\langle y\,, x \rangle}$,

(iv) $\langle x\,, x \rangle \geq 0$.

Un *producto interno* es un producto pre-interno definido positivo, es decir, si $x \neq 0$, entonces $\langle x\,, x \rangle > 0$.

Definición 1.1.2. Una *seminorma* en un espacio vectorial es una función $\| \cdot \| : X \times X \to \mathbb{C}$, tal que para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$,

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un producto pre-interno en un espacio vectorial induce una seminorma dada por

$$\|x\| = \sqrt{\langle\, x\,,\, x\,\rangle}.$$

Si además, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ es un producto interno definido positivo, entonces $\|\cdot\|$ es una *norma.*

Definición 1.1.3. Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno el cual es completo con respecto a la norma inducida.

Ejemplo 1.1.4. El ejemplo estándar de espacio de Hilbert, y que estaremos usando a lo largo de este trabajo, es $\mathcal{H} = L^2(X,\mu)$, el espacio de funciones cuadrado integrables en el espacio de medida (X,μ) (o, más precísamente, las clases de equivalencia de funciones cuadrado integrables, identificadas c.t.p.), con el producto interno dado por

$$\langle\, f\,,\, g\,\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu.$$

Ejemplo 1.1.5. Para un conjunto S, sea μ la medida de conteo en S. Denotaremos a $L^2(S,\mu)$ por $\ell^2(S)$, así, $\ell^2(\mathbb{N})$ es el espacio de sucesiones cuadrado sumables.

De aquí en adelante, denotaremos a los elementos de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ por $f, g, h, \ldots$; esto debido a que trabajaremos principalmente con espacios de funciones.

Definición 1.1.6. Diremos que dos elementos f, g en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ son *ortogonales* si $\langle\, f\,,\, g\,\rangle = 0$, lo cual denotaremos por $f \perp g$. Si A es un subconjunto de $\mathcal{H}$, sea

$$A^\perp = \{f \in \mathcal{H} \colon \langle\, f\,,\, g\,\rangle = 0 \quad \forall\, g \in A\}.$$

Llamaremos a $A^\perp$ el *complemento ortogonal* de A.

Notemos que $A^\perp$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, lo cual se sigue de la continuidad del producto interno.

Se sabe que en un espacio con producto interno X se satisface la *desigualdad de Schwarz*, esto es, para cualesquiera $x, y \in X$,

$$|\langle\, x\,,\, y\,\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|\,.$$

Proposición 1.1.7 (Criterio de dependencia lineal)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio con producto interno y $f, g \in \mathcal{H}$. Entonces, f y g son linealmente dependientes si y solo si*

$$|\langle\, f\,,\, g\,\rangle| = \|f\|\,\|g\|\,. \tag{1.1}$$

Demostración. 1. Supongamos primero que f, g son linealmente dependientes.
Si $f = 0$, entonces (1.1) se satisface trivialmente. Si $f \neq 0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tal que $g = \alpha f$, luego,

$$|\langle\, f\,,\, g\,\rangle| = |\langle\, f\,,\, \alpha f\,\rangle| = |\alpha|\,\|f\|^2 = \|f\|\,\|\alpha f\| = \|f\|\,\|g\|\,.$$

2. Supongamos ahora que se cumple (1.1).
Si $f = 0$, es evidente que f, g son linealmente dependientes. Consideremos pues, el caso $f \neq 0$. Sea $h = \dfrac{\langle\, g \,,\, f \,\rangle}{\|f\|^2} f$, entonces

$$\|g - h\|^2 = \|g\|^2 - 2\frac{|\langle\, f \,,\, g \,\rangle|^2}{\|f\|^2} + \frac{|\langle\, f \,,\, g \,\rangle|^2}{\|f\|^4}\langle\, f \,,\, f \,\rangle = \|g\|^2 - 2\,\|g\|^2 + \|g\|^2 = 0,$$

así que $g - h = 0$. Luego,

$$g = \frac{\langle\, g \,,\, f \,\rangle}{\|f\|^2} f. \qquad \square$$

Definición 1.1.8. Diremos que la familia $(\varphi_i)_{i\in I}$ es *ortogonal* si $\varphi_i \perp \varphi_j$ para cualesquiera $i, j \in I$, con $i \neq j$. Diremos además que tal familia es *ortonormal* si es ortogonal y todos los φ_i tienen norma 1, i.e. para cualesquiera $i, j \in I$, $\langle\, \varphi_i \,,\, \varphi_j \,\rangle = \delta_{i,j}$. Se dice que una familia ortonormal maximal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una *base ortonormal.*

Definición 1.1.9. Diremos que un subconjunto A de un espacio con producto interno $\mathcal{H}$ es *total* si

$$\overline{\operatorname{span}(A)} = \mathcal{H}.$$

Proposición 1.1.10 (Criterio de totalidad)**.** *Sea A un subconjunto de un espacio con producto interno X. Entonces:*

(i) *Si A es total en X, entonces no existe elemento no nulo $f \in X$ tal que sea ortogonal a todo elemento de A, esto es, $f \in A^{\perp}$ implica que $f = 0$.*

(ii) *Si X es completo, la condición anterior es suficiente para la totalidad de A en X.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [15, Teorema 3.6-2].

Recordemos que si un elemento f en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es tal que $\langle\, f \,,\, f \,\rangle = 0$, entonces $f = 0$.

Proposición 1.1.11. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Si $f \in \mathcal{H}$ es tal que $\langle\, f \,,\, g \,\rangle = 0$ para toda $g \in \mathcal{H}$, entonces $f = 0$.*

Demostración. Si $\langle\, f \,,\, g \,\rangle = 0$ para toda $g \in \mathcal{H}$, basta con tomar $g = f$, es decir, $\langle\, f \,,\, f \,\rangle = 0$, luego, $f = 0$. $\square$

Proposición 1.1.12. *Sean $f, g \in \mathcal{H}$. Si $\langle\, f \,,\, h \,\rangle = \langle\, g \,,\, h \,\rangle$ para toda $h \in \mathcal{H}$, entonces $f = g$.*

Demostración. Si $\langle\, f \,,\, h \,\rangle = \langle\, g \,,\, h \,\rangle$, entonces, por la linealidad del producto interno se tiene que $\langle\, f - g \,,\, h \,\rangle = 0$ para toda $h \in \mathcal{H}$, luego, por la proposición anterior, $f - g = 0$. $\square$

Para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, denotemos por $\mathcal{H}^*$ al *espacio dual* de $\mathcal{H}$, el cual está conformado por todos los funcionales lineales acotados de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{C}$.

Dentro de la teoría de espacios de Hilbert, es posible describir a los elementos del espacio dual mediante el resultado siguiente:

Teorema 1.1.13 (de representación de Riesz-Fréchet)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y ϕ un elemento de $\mathcal{H}^*$. Entonces, existe una única $g \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\phi(f) = \langle\, f\,,\, g\,\rangle, \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

Más aún, $\|g\| = \|\phi\|$.

La demostración de este resultado puede hallarse en libros de análisis funcional, tales como [4, Teorema 3.4] y [15, Teorema 3.8-1].

Sobre isometrías lineales en espacios de Hilbert

A continuación consideraremos dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ con sus respectivos productos internos $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}_1}$ y $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}_2}$. A su vez, tales productos internos inducen las respectivas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_2}$.

Denotaremos por $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ al conjunto de operadores lineales acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$. Si $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$, tal conjunto será denotado únicamente por $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$.

Definición 1.1.14 (Isometría lineal)**.** Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert. Diremos que un operador $W\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es una *isometría lineal* si preserva el producto interno, esto es,

$$\langle\, Wf\,,\, Wg\,\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\, f\,,\, g\,\rangle_{\mathcal{H}_1}, \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{H}_1.$$

Es inmediato que si W es una isometría lineal, entonces $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. En efecto,

$$\|Wf\|^2_{\mathcal{H}_2} = \langle\, Wf\,,\, Wf\,\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\, f\,,\, f\,\rangle_{\mathcal{H}_1} = \|f\|^2_{\mathcal{H}_1}.$$

Proposición 1.1.15. *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert, y $S, T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ operadores tales que para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $g \in \mathcal{H}_2$ se tiene que $\langle\, Sf\,,\, g\,\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\, Tf\,,\, g\,\rangle_{\mathcal{H}_2}$, entonces $S = T$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 1.1.12, para cada $f \in \mathcal{H}_1$ se tiene que $Sf = Tf$, luego, $S = T$. □

Proposición 1.1.16. *Sea $S\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal. Entonces existe un único operador lineal $T\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $g \in \mathcal{H}_2$, se tiene que*

$$\langle\, Sf\,,\, g\,\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\, f\,,\, Tg\,\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Demostración. Consecuencia inmediata del Teorema 1.1.13 y de la Proposición 1.1.15. □

Definición 1.1.17 (Operador adjunto)**.** Sea $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ un operador lineal. Definimos el *operador adjunto* de T como el operador $T^*\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ tal que, para todo $f \in \mathcal{H}_1$ y $g \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle\, Tf\,,\, g\,\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle\, f\,,\, T^*g\,\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Observación 1.1.18. Recordemos que el operador adjunto tiene las siguientes propiedades. Para cualesquiera operadores lineales $S, T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $(S + T)^* = S^* + T^*$,

(ii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}\, T^*$,

(iii) $(T^*)^* = T$,

(iv) $\|T^*\| = \|T\|$,

(v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Proposición 1.1.19. *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert, $W\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ una isometría lineal, y W^* su operador adjunto. Entonces*

(i) *W^*W es el operador identidad $I_{\mathcal{H}_1}$.*

(ii) *El operador $P \coloneqq WW^*$ es la* **proyección ortogonal** *en $W(\mathcal{H}_1) \subseteq \mathcal{H}_2$, esto es,*

  a) *P es* **idempotente***: $P^2 = P$,*
  b) *P es* **autoadjunto***: $P^* = P$.*

(iii) *La imagen de W coincide con la imagen de P y en consecuencia puede ser descrita como el conjunto de puntos fijos de P, i.e*

$$W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2) = \{g \in \mathcal{H}_2 \colon Pg = g\}.$$

(iv) *El operador $W^*|_{P(\mathcal{H}_2)}$ es un isomorfismo isométrico de $P(\mathcal{H}_2)$ en $\mathcal{H}_1$.*

Demostración.

(i) Sean $f, g \in \mathcal{H}_1$, entonces de 1.1.14 y 1.1.17 se sigue que

$$\langle W^*Wf\,,\, g\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Wf\,,\, Wg\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f\,,\, g\rangle.$$

En virtud de la Proposición 1.1.15, se concluye que $W^*W = I_{\mathcal{H}_1}$.

(ii) *a*) $P^2 = (WW^*)(WW^*) = W(W^*W)W^* = WW^* = P$,
  b) $P^* = (WW^*)^* = (W^*)^*W^* = WW^* = P$.

(iii) Mostremos primero que $P(\mathcal{H}_2) = \{g \in \mathcal{H}_2 \colon Pg = g\}$.

  $\subseteq$) Sea $g \in P(\mathcal{H}_2)$, entonces existe $f \in \mathcal{H}_2$ tal que $Pf = g$, luego

$$Pg = P(Pf) = P^2 f = Pf = g.$$

  $\supseteq$) Si $g \in \mathcal{H}_2$ cumple que $g = Pg$, entonces $g \in P(\mathcal{H}_2)$.

Mostremos ahora que $W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2)$.

  $\subseteq$) Sea $g \in W(\mathcal{H}_1)$, entonces existe $f \in \mathcal{H}_1$ tal que $Wf = g$, de tal manera que

$$Pg = P(Wf) = (WW^*)Wf = W(W^*W)f = Wf = g,$$

  es decir, $g \in P(\mathcal{H}_2)$.

  $\supseteq$) Si $g \in P(\mathcal{H}_2)$, existe $h \in \mathcal{H}_2$ tal que $g = Ph = (WW^*)h = W(W^*h)$, pero $W^*h \in \mathcal{H}_1$, luego $g \in W(\mathcal{H}_1)$.

(iv) Ya sabemos que W es una isometría. Pongamos $S = W^*|_{P(\mathcal{H}_2)}$, y mostremos que $S^{-1} = W$. Sea $f \in \mathcal{H}_1$, entonces

$$SWf = S(Wf) = W^*(Wf) = W^*Wf = f,$$

y por otra parte, si $g \in W(\mathcal{H}_1) = P(\mathcal{H}_2)$, entonces

$$WSg = W(W^*g) = (WW^*)g = Pg = g,$$

pues P deja fijos los puntos de su imagen. □

1.2. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto X. Una familia $(K_x)_{x\in X} \in \mathcal{H}^X$ se llama *núcleo reproductor (NR)* de $\mathcal{H}$ si cumple la *propiedad de reproducción*, esto es, para cualesquiera $x \in X$ y $f \in \mathcal{H}$,

$$f(x) = \langle\, f\,,\, K_x\,\rangle. \tag{1.2}$$

Proposición 1.2.2 (Propiedades del núcleo reproductor)**.** *La familia de funciones $(K_x)_{x\in X}$ tiene las siguientes propiedades:*

(i) $K_y(x) = \langle\, K_y\,,\, K_x\,\rangle$ *para cada* $x, y \in X$,

(ii) $K_y(x) = \overline{K_x(y)}$ *para cada* $x, y \in X$,

(iii) $\|K_x\| = \sqrt{K_x(x)}$ *para cada* $x \in X$.

Demostración. Sean $x, y \in X$, entonces

(i) Basta con tomar $f = K_y$ en (1.2),

(ii) Aplicando la propiedad hermítica y el inciso anterior, se tiene

$$K_y(x) = \langle\, K_y\,,\, K_x\,\rangle = \overline{\langle\, K_x\,,\, K_y\,\rangle} = \overline{K_x(y)}.$$

(iii) Aplicando nuevamente el inciso (i),

$$\|K_x\| = \sqrt{\langle\, K_x\,,\, K_x\,\rangle} = \sqrt{K_x(x)}.$$

□

Proposición 1.2.3. *Si un núcleo reproductor $(K_x)_{x\in X}$ en $\mathcal{H}$ existe, es único.*

Demostración. Supongamos la existencia de otro nucleo reproductor $(K'_x)_{x\in X}$ para $\mathcal{H}$. Luego, para cualesquiera $x, y \in X$,

$$K'_x(y) = \langle\, K'_x\,,\, K_y\,\rangle = \overline{\langle\, K_y\,,\, K'_x\,\rangle} = \overline{K_y(x)} = K_x(y),$$

pues K_x y K'_x satisfacen (1.2). □

Definición 1.2.4. Sean X un conjunto y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre X. Dado x en X, definimos el *funcional evaluación* $E_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ por

$$E_x(f) := f(x), \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

A partir de aquí, en algunas partes de este trabajo denotaremos al núcleo reproductor como NR.

Teorema 1.2.5 (Existencia del NR). *El núcleo reproductor $(K_x)_{x\in X}$ existe si y solo si el funcional evaluación E_x es acotado para cada $x \in X$.*

Demostración. Supongamos primero que el NR existe y veamos que el funcional evaluación es acotado. En efecto,

$$|E_x(f)| = |f(x)| = |\langle f\, ,\, K_x \rangle| \leq \|f\|\, \|K_x\|\, ,$$

luego,

$$\|E_x\| \leq \|K_x\|\, .$$

Más aún, si tomamos $f = K_x$, el inciso (iii) de la Proposición 1.2.2 implica que

$$\|E_x\| \geq \frac{|E_x(K_x)|}{\|K_x\|} = \frac{|K_x(x)|}{\|K_x\|} = \|K_x\|\, .$$

Por lo tanto

$$\|E_x\| = \|K_x\|\, .$$

Por otra parte, por el Teorema de representación de Riesz-Fréchet 1.1.13, existe una única $g \in \mathcal{H}$ tal que para toda $f \in \mathcal{H}$

$$E_x(f) = \langle f\, ,\, g \rangle.$$

Luego, basta tomar $K_x = g$. □

Corolario 1.2.6. *Si $\mathcal{H}$ posee NR, toda sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge en norma a $f \in \mathcal{H}$, converge también puntualmente, es decir, para cada $x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Demostración. Supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f, i.e. $\|f_n - f\| \to 0$ si $n \to \infty$. Luego, por el Teorema 1.2.5, para cada $x \in X$, E_x es continuo, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

□

Proposición 1.2.7. *La familia $(K_x)_{x\in X}$ es un sistema total.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}$ tal que $\langle f\, ,\, K_x \rangle = 0$. Como $(K_x)_{x\in X}$ satisface (1.2), para cada $x \in X$ se tiene que

$$0 = \langle f\, ,\, K_x \rangle = f(x),$$

así que $f = 0$. Luego, en virtud de la Proposición 1.1.10, $(K_x)_{x\in X}$ es un sistema total. □

1.3. Construcción del NR a partir de una base ortonormal

Lema 1.3.1. *Sea* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ *de funciones sobre un conjunto* X*, con núcleo reproductor* $(K_y)_{y\in X}$*. Entonces*

$$K_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(y)}\,\varphi_n(x). \tag{1.3}$$

Demostración. Como $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}$, cada elemento $f \in \mathcal{H}$ tiene una única expansión convergente con respecto a la norma de $\mathcal{H}$. De hecho,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\, f \,,\, \varphi_n \,\rangle\, \varphi_n.$$

Luego, por el Corolario 1.2.6, para cada $x \in X$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\, f \,,\, \varphi_n \,\rangle\, \varphi_n(x). \tag{1.4}$$

Tomando $f = K_y$ en (1.4),

$$K_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\, K_y \,,\, \varphi_n \,\rangle\, \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle\, \varphi_n \,,\, K_y \,\rangle}\, \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(y)}\,\varphi_n(x). \qquad \square$$

De ahora en adelante se utilizará la notación EHNR como abreviación de espacio de Hilbert con núcleo reproductor.

Proposición 1.3.2. *Sea* $\mathcal{H}$ *un EHNR separable, encajado en* $L^2(X,\mu)$*. Sea* $(K_x)_{x\in X}$ *el NR de* $\mathcal{H}$*. Entonces*

$$\int_X K_x(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} \dim(\mathcal{H}), & \text{si } \mathcal{H} \text{ es de dimensión finita,} \\ +\infty, & \text{si } \mathcal{H} \text{ es de dimensión infinita.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $(\varphi_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, en virtud de (1.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X K_x(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \sum_{j\in\mathcal{J}} \overline{\varphi_j(x)}\,\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \int_X |\varphi_j(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} 1 = \begin{cases} \#(\mathcal{J}), & \text{si } \mathcal{J} \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } \mathcal{J} \text{ es infinito.} \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

1.4. Ejemplos de EHNR

Espacio de Bergman en el disco

Denotaremos por $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ al *espacio de Bergman sobre el disco unitario*, el cual consiste de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$, pertenecientes a $L^2(\mathbb{D})$ con la medida usual de Lebesgue $\mathrm{d}A(z) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $z = x+iy$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario en $\mathbb{C}$ [27,29].

Teorema 1.4.1. *Para cada $z \in \mathbb{D}$, el funcional evaluación E_z es acotado en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.*

Demostración. Sean $z \in \mathbb{D}$ fijo y $D_{z,r} := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$. Denotemos a la función indicadora de un conjunto A por $\mathbf{1}_A$. Por el teorema del valor medio [16, Sección VIII] se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{\mu(D_{z,r})} \int_{D_{z,r}} f(w) \ \mathrm{d}A(w),$$

de donde

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{\pi(1-|z|)^2} \int_{\mathbb{D}} |\mathbf{1}_{D_{z,r}}(w) \ f(w)| \, \mathrm{d}A(w) \\
&\leq \frac{1}{\pi(1-|z|)^2} \left(\int_{\mathbb{D}} \mathbf{1}^2_{D_{z,r}} \, \mathrm{d}A(w) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A(w) \right)^{1/2} \\
&= \frac{\pi^{-1/2}}{(1-|z|)} \|f\|_2 \\
&= C_r \|f\|_2 \,,
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que E_z es acotado. □

Teorema 1.4.2. *El espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es completo.*

Demostración. Sean $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $R \in (0,1)$. Por el Teorema 1.4.1, para todo $z \in D_{0,R}$

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C_R \|f_j - f_k\|_2 \,,$$

lo cual implica convergencia uniforme en $\overline{D_{0,R}}$. Así, existe $h \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ tal que para cada $R \in (0,1)$, $f_n|_{D_{0,R}}$ converge uniformemente a $h|_{D_{0,R}}$, cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\left\| f_n|_{D_{0,R}} - h|_{D_{0,R}} \right\|_2 \to 0$.

Por otra parte, $g := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \ \in L^2(\mathbb{D})$, es decir,

$$\|f_n - g\|_2 \to 0 \qquad \text{y} \qquad \left\| f_n|_{D_{0,R}} - g|_{D_{0,R}} \right\|_\infty \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Por lo tanto,

$$\|f_n - g\|_2 \to 0 \qquad \text{y} \qquad \left\| f_n|_{D_{0,R}} - g|_{D_{0,R}} \right\|_2 \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Finalmente, haciendo $R \to 1$ y aplicando la desigualdad de Minkowski, se tiene que

$$\|g - h\|_2 \leq \|g - f_n\|_2 + \|f_n - h\|_2 \to 0,$$

cuando $n \to \infty$; es decir, $g = h$ c.t.p. Esto demuestra que $h \in L^2(\mathbb{D})$, luego $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es completo. □

Corolario 1.4.3. *El espacio $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es un EHNR.*

Proposición 1.4.4. *El sistema de funciones*

$$\varphi_k(z) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} z^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

forma una base ortonormal en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Veamos primero que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ es una familia ortonormal. En efecto, tomemos $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, así

$$\begin{aligned}
\langle\, \varphi_j \,,\, \varphi_k \,\rangle &= \frac{\sqrt{jk}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} z^{j-1}\, \overline{z^{k-1}}\; \mathrm{d}A(z) \\
&= \frac{\sqrt{jk}}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{j-1}\, \mathrm{e}^{(j-1)\,\mathrm{i}\,\theta}\, r^{k-1}\, \mathrm{e}^{-(k-1)\,\mathrm{i}\,\theta}\; r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sqrt{jk}}{\pi} \frac{1}{j+k} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{(j-k)\,\mathrm{i}\,\theta}\; \mathrm{d}\theta \\
&= 2\frac{\sqrt{jk}}{j+k}\, \delta_{j,k}.
\end{aligned}$$

Sean ahora $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ y $k \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$\langle\, f \,,\, \varphi_k \,\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\, \overline{\varphi_k(z)}\; \mathrm{d}A(z).$$

Como la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$, digamos $K = \overline{D_{0,R}}$, donde $R \in (0,1)$, se tiene que

$$\int_K f(z)\overline{\varphi_k(z)}\; \mathrm{d}A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_K z^n\, \overline{\varphi_k(z)}\; \mathrm{d}A(z).$$

De nuevo, tomando $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ y $R \to 1$, se sigue que

$$\langle\, f \,,\, \varphi_k \,\rangle = a_{k-1} \int_{\mathbb{D}} z^{k-1}\, \overline{\varphi_k(z)}\; \mathrm{d}A(z).$$

Por lo tanto, si $\langle\, f \,,\, \varphi_k \,\rangle = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}_+$, entonces $a_{k-1} = 0$ para toda $k \in \mathbb{Z}_+$, es decir, $f = 0$. Luego, en virtud de la Proposición 1.1.10, la familia $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ es un sistema total en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. $\square$

Corolario 1.4.5. *El núcleo reproductor en* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ *está dado por*

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(1-w\overline{z})^2}, \qquad w, z \in \mathbb{D}. \tag{1.5}$$

Demostración. En virtud de (1.3), y de la Proposición 1.4.4, se tiene que

$$\begin{aligned} K_z(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\varphi_n(z)}\varphi_n(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1}} \sqrt{\frac{n}{\pi}} w^{n-1} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n(\overline{z}w)^{n-1} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\overline{z}w)^n = \frac{1}{\pi(1-w\overline{z})^2}. \end{aligned}$$

□

Espacio de Bergman en el semiplano superior

Denotaremos por $\mathcal{A}^2(\Pi)$ al *espacio de Bergman sobre el semiplano superior*, el cual consiste de todas las funciones analíticas en el semiplano superior $\Pi \subset \mathbb{C}$ y cuadrado integrables, con la medida usual de Lebesgue.

Sean D y G dominios simplemente conexos en el plano complejo $\mathbb{C}$ cada uno con una frontera suave.

Lema 1.4.6. *Sea $\omega = \alpha(w)$ un biholomorfismo del dominio D sobre el dominio G. Entonces*

$$K_z^D(w) = K_\zeta^G(\omega) \cdot \alpha'(w) \cdot \overline{\alpha'(z)},$$

donde K_z^D y K_ζ^G denotan los núcleos reproductores de $\mathcal{A}^2(D)$ y $\mathcal{A}^2(G)$, respectivamente.

Demostración. Supongamos que el sistema $(\varphi_k(z))_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para el espacio $\mathcal{A}^2(G)$. Utilizando un cambio de variable, podemos escribir

$$\delta_{j,k} = \int_G \varphi_j(\omega)\, \overline{\varphi_k(\omega)}\ \mathrm{d}A(\omega) = \int_D \varphi_j(\alpha(w))\, \overline{\varphi_k(\alpha(w))}\, \alpha'(w)\, \overline{\alpha'(w)}\ \mathrm{d}A(w).$$

Esto es $(\varphi_n(\alpha(w))\alpha'(w))_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $\mathcal{A}^2(D)$. Usamos esta base ortonormal para escribir al núcleo reproductor

$$\begin{aligned} K_z^D(w) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha(w))\, \alpha'(w)\, \overline{\varphi_k(\alpha(z))\, \alpha'(z)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\alpha(w))\, \overline{\varphi_k(\alpha(z))}\, \alpha'(w)\, \overline{\alpha'(z)} \\ &= K_\zeta^G(\omega) \cdot \alpha'(w) \cdot \overline{\alpha'(z)}. \end{aligned}$$

□

Consideremos ahora la siguiente transformación de Möbius $\alpha : \Pi \to \mathbb{D}$, tal que

$$\alpha(w) = \frac{w - \mathrm{i}}{w + \mathrm{i}}, \tag{1.6}$$

el cual es un biholomorfismo del semiplano superior Π sobre el disco $\mathbb{D}$. Pongamos $\zeta = \alpha(z)$ y $\omega = \alpha(w)$. Entonces, en virtud del Lema 1.4.6, el núcleo reproductor para el semiplano superior tiene la forma

$$\begin{aligned} K_z^{\Pi}(w) &= K_\zeta^{\mathbb{D}}(\omega) \cdot \alpha'(w) \cdot \overline{\alpha'(z)} \\ &= \frac{1}{\pi\left(1 - \frac{w-\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}}\frac{\overline{z}+\mathrm{i}}{\overline{z}-\mathrm{i}}\right)^2} \cdot \frac{2\,\mathrm{i}}{(w+\mathrm{i})^2} \cdot \frac{-2\,\mathrm{i}}{(\overline{z}-\mathrm{i})^2} \\ &= -\frac{1}{\pi(w-\overline{z})^2}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Espacio de Bergman ponderado en el disco

Sean $-1 < \lambda < +\infty$, y

$$\mathrm{d}A_\lambda(z) = (\lambda+1)\left(1-|z|^2\right)^\lambda \,\mathrm{d}A(z),$$

donde $\mathrm{d}A(z) = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

Denotaremos por $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ al *espacio de Bergman ponderado en el disco*, el cual consiste de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y cuadrado integrables con respecto a la medida $\mathrm{d}A_\lambda(z)$.

Lema 1.4.7. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{\pi}{1+\lambda} = \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\lambda \,\mathrm{d}A(z) < \infty$$

si y solo si $\lambda > -1$. Luego,

$$\int_{\mathbb{D}} \mathrm{d}A_\lambda(z) = \pi.$$

Demostración. Tomando coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\lambda \,\mathrm{d}A(z) &= \int_0^1 \left(1-r^2\right)^\lambda \,r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^1 \left(1-r^2\right)^\lambda r\,\mathrm{d}r \\ &= \pi \int_0^1 (1-r)^\lambda \,\mathrm{d}r = -\pi \left[\frac{(1-r)^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right]_0^1 \\ &= \begin{cases} +\infty, & \lambda \leq -1, \\ \pi(\lambda+1)^{-1}, & \lambda > -1. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Proposición 1.4.8. *Para $\lambda > -1$ el espacio $\mathcal{A}_\lambda^2(\mathbb{D})$ es cerrado en $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A_\lambda)$.*

Demostración. Veamos primero que para λ en $\mathbb{R}$, y $R \in (0,1)$, existe una constante C_R positiva tal que

$$|f(z)| \leq C_R \|f\|_{2,\lambda}, \tag{1.8}$$

para toda f analítica en $\mathbb{D}$ y para todo $z \in \mathbb{D}$. En efecto, sean $z \in \mathbb{D}$ y $R \leq 1 - |z|$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{1}{\pi(1-|z|)^2} \int_{D_{z,R}} |f(w)| \, \mathrm{d}A(w) \\
&= \frac{1}{\pi(1-|z|)^2} \int_{D_{z,R}} |f(w)|(1-|w|^2)^{\frac{\lambda}{2}} (1-|w|^2)^{\frac{-\lambda}{2}} \, \mathrm{d}A(w) \\
&\leq \frac{1}{\pi(1-|z|)^2} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 (1-|w|^2)^{\lambda} \, \mathrm{d}A(w) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{-\lambda} \, \mathrm{d}A(w) \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Así, tomando en particular $R = \frac{1-|z|}{2}$ se tiene que $\left(1-|w|^2\right)^{-1} \leq \left(1 - \frac{(1+|z|)^2}{4}\right)^{-1}$. De tal manera que

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \frac{(\lambda+1)^{-1}}{\pi(1-|z|)^2} \left(1 - \frac{(1+|z|)^2}{4}\right)^{-\lambda} \left(\int_{\mathbb{D}} \mathrm{d}A(w) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 \, \mathrm{d}A_{\lambda}(w) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_R \, \|f\|_{2,\lambda} .
\end{aligned}$$

Sea entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión fundamental en $\mathcal{A}^2_{\lambda}(\mathbb{D})$. Por lo anterior, se tiene que para todo $z \in D_{0,R}$

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C_R \, \|f_j - f_k\|_{2,\lambda} ,$$

lo cual implica convergencia uniforme en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Luego, el resultado se sigue al aplicar un procedimiento análogo al del Teorema 1.4.2. $\square$

Proposición 1.4.9. *El sistema de funciones* $\varphi_k(z) := \sqrt{\dfrac{\Gamma(k+2+\lambda)}{\pi \, k! \, \Gamma(2+\lambda)}} z^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ *es una base ortonormal en* $\mathcal{A}^2_{\lambda}(\mathbb{D})$.

Demostración. Por medio de coordenadas polares, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \, z^n \, , \, z^m \, \rangle &= \int_0^1 (\lambda+1) \left(1-r^2\right)^{\lambda} r^{n+m+1} \, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \pi \dfrac{n! \, \Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(n+\lambda+2)}, & \text{si } n = m. \end{cases}
\end{aligned}$$

La propiedad total se demuestra de manera similar a la 1.4.4. $\square$

Lema 1.4.10. *Sea* $p > 0$ *y* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| < 1$. *Entonces*

$$(1+z)^{-p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+k)}{k! \, \Gamma(p)} \, z^k.$$

Por lo tanto, por (1.3) y en virtud del Lema 1.4.10, el núcleo reproductor en $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ está dado por

$$\begin{aligned} K_z^{\mathbb{D}_\lambda}(w) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{n!\,\Gamma(\lambda+2)}\, w^k\,\overline{z^k} \\ &= \frac{1}{\pi}\,(1-w\overline{z})^{-\lambda-2} \\ &= \frac{1}{\pi\,(1-w\overline{z})^{\lambda+2}}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Espacio de Bergman ponderado en el semiplano superior

Para $\lambda > -1$, sea

$$\mathrm{d}A_\lambda(z) = 2^\lambda\,(\,\mathrm{Im}(z))^\lambda\,\mathrm{d}A(z).$$

Denotemos por $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$ al *espacio de Bergman ponderado en el semiplano superior*, el cual consiste de todas las funciones analíticas en Π y cuadrado integrables con la medida $\mathrm{d}A_\lambda$.

Proposición 1.4.11. *Sean D y E conjuntos no vacíos, $\mathcal{H}_1$ un EHNR sobre E, con núcleo reproductor $(K_z^{\mathcal{H}_1})_{z\in E}$ y $\mathcal{H}_2$ un espacio pre-Hilbert de funciones sobre D. Supongamos que A es un operador unitario de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ tal que*

$$(Af)(z) \coloneqq p(z)f(\varphi(z)) \qquad (z\in D,\ f\in\mathcal{H}_1),$$

donde $\varphi\colon D\to E$ y $p\colon D\to\mathbb{C}$. Entonces, $\mathcal{H}\coloneqq A(\mathcal{H}_1)$ es un EHNR, y el núcleo reproductor en $\mathcal{H}$ está dado por

$$K_z(w) = \overline{p(z)}K^{\mathcal{H}_1}_{\varphi(z)}(\varphi(w))p(w). \tag{1.10}$$

Demostración. Debido a que A es un operador unitario y que $\mathcal{H}_1$ es un espacio de Hilbert, entonces $A(\mathcal{H}_1)$ es también un espacio de Hilbert. Afirmamos pues, que la familia $(K_z)_{z\in D}$ es un núcleo reproductor de $\mathcal{H}$. En efecto, nótese que $K_z = \overline{p(z)}AK^{\mathcal{H}_1}_{\varphi(z)}$ es un elemento de $\mathcal{H}$, pues $\overline{p(z)}\in\mathbb{C}$. Sean ahora $f\in\mathcal{H}$ arbitraria, entonces existe $g\in\mathcal{H}_1$ tal que $f=Ag$. Luego, para $z\in D$,

$$f(z) = p(z)g(\varphi(z)) = p(z)\langle\, g\,,\, K^{\mathcal{H}_1}_{\varphi(z)}\,\rangle_{\mathcal{H}_1} = p(z)\langle\, Ag\,,\, AK^{\mathcal{H}_1}_{\varphi(z)}\,\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\, f\,,\, K_z\,\rangle_{\mathcal{H}}. \quad \square$$

Consideremos la transformación de Möbius $\alpha:\Pi\to\mathbb{D}$ dada en (1.6). Apliquemos la Proposición 1.4.11, con $p(w) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{w+\mathrm{i}}\right)^{\lambda+2}$. Luego, el núcleo reproductor en $\mathcal{A}^2_\lambda(\Pi)$ está dado por

$$\begin{aligned} K_z^{\Pi_\lambda}(w) &= p(w)\,K^{\mathbb{D}_\lambda}_{\alpha(z)}(\alpha(w))\,\overline{p(z)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{w+\mathrm{i}}\right)^{\lambda+2}\left(\frac{(w+\mathrm{i})(\overline{z}-\mathrm{i})}{2\,\mathrm{i}(\overline{z}-w)}\right)^{\lambda+2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\overline{z}-\mathrm{i}}\right)^{\lambda+2} \\ &= \frac{\mathrm{i}^{\lambda+2}}{(w-\overline{z})^{\lambda+2}}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Espacio de Fock

Denotaremos por $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ al *espacio de Fock*, que consiste de todas las funciones enteras y cuadrado integrables con la medida gaussiana

$$\mathrm{d}\mu(z) = \mathrm{e}^{-|z|^2}\ \mathrm{d}A(z).$$

Proposición 1.4.12. *El espacio $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\mu)$.*

Demostración. Sea $R > 0$. De las propiedades de las funciones analíticas se tiene que para todo $z \in D_{0,R}$

$$f(z) = \int_{D_{0,R}} f(w)\,\mathrm{d}A(w).$$

Debido a que $\mathrm{d}\mu$ es una medida de probabilidad, lo anterior implica que

$$|f(z)| \leq C_R \left\|f\right\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C})}, \qquad \forall\, z \in D_{0,R}.$$

Sea entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$. En particular, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, y por lo anterior, se tiene que

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leq C_R \left\|f_j - f_k\right\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C})}, \qquad \forall\, z \in D_{0,R}.$$

Luego, la sucesión $(f_n(z))_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en $D_{0,R}$. Así,

$$\|f - g\|_{L^2(\mathbb{C},\, \mathrm{d}\mu)} \to 0,$$

para alguna $g \in L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\mu)$, y por otra parte, $\|f - h\| \to 0$ en subconjuntos compactos para alguna h analítica en $\mathbb{C}$. Finalmente, si K es un compacto en $\mathbb{C}$, entonces

$$\|g|_K - h|_K\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C})} \leq \|g|_K - f_n|_K\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C})} + \|f_n|_K - h|_K\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C})} \to 0,$$

es decir, $g = h$ ctp. Por lo tanto, $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ es cerrado. □

Afirmamos que el conjunto $\{1, z^2, z^3, ...\}$ es un conjunto ortogonal en $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$. En efecto, tomemos $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, así

$$\begin{aligned}\langle\, z^n\,,\, z^m\,\rangle &= \int_{\mathbb{C}} z^n\overline{z^m}\,\mathrm{d}\mu(z)\\ &= \int_0^{\infty} r^{n+m}\,\mathrm{e}\,{-r^2}r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{e}\,(n-m)\,\mathrm{i}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \pi\ \delta_{n,m} \int_0^{\infty} r^{n+m}\,\mathrm{e}^{-r^2}\,2r\,\mathrm{d}r\\ &= \pi\,\Gamma(\tfrac{n+m}{2}+1)\,\delta_{n,m}.\end{aligned}$$

Notemos que $\Gamma(n+1) = n!$, para $n \in \mathbb{Z}$. Luego, el sistema de funciones $\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, n!}}z^n$ es ortonormal, más aún, (φ_n) es una base para $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$. Así, en virtud de (1.3), el núcleo reproductor tiene la forma

$$K_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{(w\overline{z})^n}{n!} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{e}^{w\overline{z}}\,. \tag{1.12}$$

Espacio de ondículas

Sean $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y $(\lambda, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Denotemos por $\psi_{\lambda,a}$ a la función

$$\psi_{\lambda,a}(x) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Definición 1.4.13 (Condición de admisibilidad)**.** Diremos que una función $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es una *ondícula admisible* (o simplemente *ondícula*) si

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\widehat{\Psi}(\lambda a)|^2}{\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = 1, \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

donde $\widehat{\Psi}$ es la transformada de Fourier de la función Ψ.

Definición 1.4.14 (Transformada de ondícula continua)**.** Sea $\Psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Definimos la *transformada de ondícula continua asociada a la función* Ψ como el operador $\mathcal{W}_\Psi\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ tal que para cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$ y cada $(\lambda, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{W}_\Psi f)(\lambda, a) := \langle\, f\,,\, \Psi_{\lambda,a}\,\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\Psi_{\lambda,a}(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1.14}$$

donde $\Psi_{\lambda,a}$ denota la acción de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sobre Ψ descrita en (1.13).

Tomemos $\mathcal{H}_\Psi := \mathcal{W}_\Psi\left(L^2(\mathbb{R})\right)$. Sea la familia $\left(K_{(\lambda,a)}\right)_{(\lambda,a)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \in \mathcal{H}^{(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$ tal que para cada $(\mu, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,

$$K_{(\lambda,a)}(\mu, b) = \langle\, \Psi_{\lambda,a}\,,\, \Psi_{\mu,b}\,\rangle = \left(\mathcal{W}_\Psi \Psi_{\lambda,a}\right)(\mu, b). \tag{1.15}$$

Proposición 1.4.15. *La familia de funciones* $\left(K_{(\lambda,a)}\right)_{(\lambda,a)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}$ *es un núcleo reproductor en* $\mathcal{H}_\Psi$*.*

Demostración. Sea $g \in \mathcal{H}_\Psi$ arbitraria. Luego, $g = \mathcal{W}_\Psi f$ para alguna $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, para cualquier $(\lambda, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda, a) &= \left(\mathcal{W}_\Psi f\right)(\lambda, a) = \langle\, f\,,\, \Psi_{\lambda,a}\,\rangle \\ &= \langle\, \mathcal{W}_\Psi f\,,\, \mathcal{W}_\Psi \Psi_{\lambda,a}\,\rangle = \langle\, \mathcal{W}_\Psi f\,,\, K_{(\lambda,a)}\,\rangle \\ &= \langle\, g\,,\, K_{(\lambda,a)}\,\rangle. \qquad \square \end{aligned}$$

Espacio de Bergman armónico en el semiplano superior

Notemos que el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\Pi)$ puede ser descrito de manera alternativa como el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D})$ que consiste de todas las funciones que satisfacen la ecuación

$$2\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

Denotaremos por $\widehat{\mathcal{A}}^2(\Pi)$ al *espacio anti-Bergman sobre el semiplano superior*, el cual consiste de todas las funciones anti-analíticas en $L^2(\Pi)$, i.e, todas las funciones que satisfacen la ecuación

$$2\frac{\partial}{\partial z} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f = 0.$$

De lo anterior, denotaremos por $\mathrm{H}^2(\Pi)$ al *espacio de Bergman armónico en el semiplano superior*, esto es, el subespacio cerrado de $L^2(\Pi)$ que consiste de todas las funciones complejo-valuadas $f(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)$, con u y v funciones real-valuadas, tales que

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

donde $z = x + \mathrm{i}\, y$.

De lo anterior, se tiene que el espacio de Bergman armónico es la suma directa del espacio de Bergman y del espacio anti-Bergman, esto es,

$$\mathrm{H}^2(\Pi) = \mathcal{A}^2(\Pi) \oplus \widehat{\mathcal{A}}^2(\Pi).$$

Luego, el NR en $\mathrm{H}^2(\Pi)$ está dado por

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w-\bar{z})^2} - \frac{1}{\pi(\bar{w}-z)^2}. \tag{1.16}$$

Espacio de Bergman polianalítico en el semiplano superior

Denotaremos por $\mathcal{A}^2_n(\Pi)$ al *espacio de funciones n-analíticas*, esto es, funciones $f(x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^n f = 0, \tag{1.17}$$

con $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Consideremos ahora el espacio $\mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi)$ de funciones n-analíticas puras, es decir,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi) &\coloneqq \mathcal{A}^2_n(\Pi) \,\cap\, \left(\mathcal{A}^2_{n-1}(\Pi)\right)^{\perp} \\ &= \{f \in \mathcal{A}^2_n(\Pi) \colon f \perp \mathcal{A}^2_{n-1}(\Pi)\}.\end{aligned}$$

El espacio $\mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi)$ es un EHNR. Más aún, se sabe que el NR [27, Teorema 3.4.1] está dado por

$$K_z^{\Pi,(n)}(w) = K_z^{\Pi}(w) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{j,k}^{n-1} \left(\frac{w-\overline{w}}{w-\overline{z}}\right)^j \left(\frac{z-\overline{z}}{z-\overline{w}}\right)^k,$$

donde

$$\kappa_{j,k}^{n-1} \coloneqq (-1)^{j+k} \left(\frac{n!}{j!\,k!}\right) \frac{(j+k+1)!}{(n-j)!\,(n-k)!}.$$

Espacio de Bergman en el dominio de Siegel

Sea $\mathbb{B}^n \coloneqq \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |z|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$. Usaremos la notación $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$, de tal manera que $z = (z', z_n)$, donde $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $z_n \in \mathbb{C}$.

Denotemos por D_n al *dominio de Siegel* en $\mathbb{C}^n$ definido como

$$D_n \coloneqq \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

La transformada de Cayley $\zeta = \omega(z)$, dada por

$$\zeta_k = \mathrm{i}\,\frac{z_k}{1+z_n}, \qquad k = 1,\ldots,n-1,$$
$$\zeta_n = \mathrm{i}\,\frac{1-z_n}{1+z_n},$$

es un biholomorfismo de $\mathbb{B}^n$ en D_n. Su transformada inversa $z = \omega^{-1}(\zeta)$ está dada por

$$z_k = -\frac{2\,\mathrm{i}\,\zeta_k}{1-\mathrm{i}\,\zeta_n}, \qquad k = 1,\ldots,n-1,$$
$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}\,\zeta_n}{1-\mathrm{i}\,\zeta_n}.$$

Denotemos ahora por $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}^n)$ y por $\mathcal{A}^2(D_n)$ a los espacios de Bergman sobre $\mathbb{B}^n$ y D_n, respectivamente; esto es, las funciones analíticas y cuadrado integrables sobre $\mathbb{B}^n$ y D_n, respectivamente.

Se sabe que el núcleo reproductor en la bola unitaria [30] está dado por

$$K_\zeta^{\mathbb{B}^n}(z) = \frac{1}{(1-\langle\, z\,,\,\zeta\,\rangle)^{n+1}} = \frac{1}{(1-\sum_{k=1}^n z_k\overline{\zeta_k})^{n+1}}. \tag{1.18}$$

En virtud de la Proposición 1.4.11, es posible calcular el núcleo reproductor en el dominio de Siegel D_n, a través del núcleo reproductor en la bola unitaria, a saber, éste está dado por

$$K_u^{D_n}(v) = \overline{p(u)}\,K_{\varphi(u)}^{\mathbb{B}^n}(\varphi(v))\,p(v),$$

donde, en este caso, $u, v \in D_n$, $\varphi = \omega^{-1}$ es el biholomorfismo descrito arriba, y $p\colon D_n \to \mathbb{C}$ está dada por $p(u) = \left(\frac{2}{1-\mathrm{i}\,u_n}\right)^{n+1}$. Esto es

$$\begin{aligned}
K_u^{D_n}(v) &= \left(\frac{2}{1+\mathrm{i}\,\overline{u_n}}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{(1-\langle\,\varphi(v)\,,\,\varphi(u)\,\rangle)^{n+1}}\right)\left(\frac{2}{1-\mathrm{i}\,v_n}\right)^{n+1}\\
&= \left(\frac{4}{(1+\mathrm{i}\,\overline{u_n})(1-\mathrm{i}\,v_n)}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{4^{n+1}}\cdot\frac{(1+\mathrm{i}\,\overline{u_n})(1-\mathrm{i}\,v_n)}{\left(\frac{v_n-\overline{u_n}}{2\,\mathrm{i}}-\langle\,v'\,,\,u'\,\rangle\right)}\right)^{n+1}\\
&= \frac{1}{\left(\frac{v_n-\overline{u_n}}{2\,\mathrm{i}}-\langle\,v'\,,\,u'\,\rangle\right)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

1.5. Sobre álgebras de operadores

A continuación abordaremos algunos resultados elementales que usaremos en esta tesis sin hacer énfasis en las demostraciones debido a que no es el objetivo principal en este trabajo. No obstante, los detalles sobre tales resultados pueden hallarse en libros básicos de álgebras de operadores, tales como [3, 14, 28] y otros.

Definición 1.5.1. Un espacio vectorial normado $(A, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{C}$ es un *álgebra normada* si es un álgebra y la norma es submultiplicativa, esto es,

$$\|xy\| \le \|x\|\cdot\|y\|\,, \qquad \forall\, x, y \in A.$$

Diremos además que A es *unitaria* o que tiene identidad si existe $e \in A$ tal que $ex = x = xe$ para todo $x \in A$.

Asumiremos que A es asociativa y conmutativa.

Definición 1.5.2 (Álgebra de Banach)**.** Un álgebra normada es un *álgebra de Banach* si el espacio normado $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.5.3. El ejemplo más simple de álgebra de Banach es $A = \mathbb{C}$, con la norma $\|z\| = |z|$ (el módulo de z).

Ejemplo 1.5.4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de Banach con la norma de operadores, el producto dado por la composición de operadores y con el operador identidad I como unidad.

Notemos que si $\mathcal{H} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces se tiene el álgebra de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$, con el producto usual de matrices.

Definición 1.5.5 (Álgebra C*)**.** Un *álgebra C^** es un álgebra de Banach A con una operación $*\colon A \to A$, tal que satisface las propiedades siguientes para todo $x, y \in A$ y $a, b \in \mathbb{C}$:

(a) $(x^*)^* = x$,

(b) $(ax + by)^* = \overline{a}x^* + \overline{b}y^*$,

(c) $(xy)^* = y^*x^*$,

(d) $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Cualquier aplicación $x \mapsto x^*$ que satisface (a), (b) y (c) es llamada *involución.*

Ejemplo 1.5.6. $A = \mathbb{C}$ con $z^* = \overline{z}$ es el ejemplo más simple.

Ejemplo 1.5.7. $A = L^\infty(\mathbb{R})$ con $f^* = \overline{f}$ es un álgebra C* conmutativa.

Ejemplo 1.5.8. $A = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la operación adjunta usual como involución es un álgebra C*.

Teorema 1.5.9 (Gelfand-Neumark)**.** *Toda álgebra C^* es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.*

Definición 1.5.10. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y M un subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos el *conmutador* de M como

$$M' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon TS = ST \quad \forall\, S \in M\}.$$

Diremos que un subconjunto M de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es *autoadjunto* si para cualquier $T \in M$ se tiene que $T^* \in M$.

Definición 1.5.11 (Álgebra de von Neumann)**.** Un *álgebra de von Neumann* o *álgebra W^** es una subálgebra A autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A'' = A$.

Observación 1.5.12. Es posible caracterizar a las álgebras de von Neumann como aquellas subálgebras de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que son autoadjuntas y cerradas bajo la topología débil de operadores (TDO), la cual abordaremos en el siguiente capítulo. Además, a través de la construcción GNS se verifica que un álgebra C* es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que es autoadjunta y cerrada con la topología generada por la norma. Por lo tanto, se concluye que un álgebra C* contenida en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que es unitaria y además cerrada en la TDO es un álgebra de von Neumann [28, Sec. 14].

Capítulo 2

Caracterización de los operadores de multiplicación

En este capítulo estudiaremos el álgebra C* de operadores de multiplicación con símbolos acotados y la relación de éstos con la transformada de Fourier.

En la Sección 2.1 haremos énfasis en la propiedades de los operadores de multiplicación. En la Sección 2.2, revisamos algunos resultados elementales sobre espacios topológicos, principalmente bases topológicas, con las cuales, en la Sección 3.3 describiremos la topología débil-*, en $L^\infty(\mathbb{R})$, así como la convergencia a través de redes. A continuación, en las Secciones 2.3 y 2.4, nuestro objetivo será mostrar que el espacio generado por las combinaciones lineales de los caracteres del grupo $\mathbb{R}$ es denso en $L^\infty(\mathbb{R})$ con respecto a la topología antes mencionada. Posteriormente, en la Sección 2.5, veremos algunos criterios del operador de multiplicación, principalmente a través de la conmutatividad con multiplicadores por caracteres, con lo cual finalizamos en la Sección 2.6.

2.1. Operadores de multiplicación

Consideremos un conjunto X, $\mathscr{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X y una medida μ definida sobre $\mathscr{F}$. Denotaremos simplemente por (X, μ) al espacio de medida conformado por la terna $(X, \mathscr{F}, \mu)$.

Definición 2.1.1 (Operador de multiplicación en $L^2(X, \mu)$)**.** Dado $b \in L^\infty(X, \mu)$, definimos el *operador de multiplicación con símbolo* b como $M_b \colon L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(M_b f)(x) := b(x) f(x).$$

Notemos que si $b \in L^\infty(X, \mu)$ y $f \in L^2(X, \mu)$, entonces

$$\int_X |(M_b f)(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X |b(x) f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \|b\|_\infty^2 \int_X |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty,$$

luego,

$$\|M_b\| \leq \|b\|_\infty\,, \tag{2.1}$$

de tal manera que $M_b \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.

Proposición 2.1.2 (Aritmética de los operadores de multiplicación)**.** *Sean $a, b \in L^\infty(X,\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:*

(i) $M_{a+b} = M_a + M_b$,

(ii) $M_{\lambda a} = \lambda M_a$,

(iii) $M_a M_b = M_{ab}$,

(iv) $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

Demostración. Sean $a, b \in L^\infty(X,\mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in L^2(X,\mu)$.

(i) $M_{a+b} f = (a+b)f = af + bf = M_a f + M_b f = (M_a + M_b)f$.

(ii) $M_{\lambda a} f = (\lambda a) f = \lambda(af) = \lambda M_a f$.

(iii) $(M_a M_b) f = a(bf) = (ab)f = M_{ab} f$.

(iv) Notemos que

$$\begin{aligned}\langle\, M_a^* f \,,\, g \,\rangle = \langle\, f \,,\, M_a g \,\rangle = \int_X f(x)\overline{M_a g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\,\overline{a(x)}\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) \\ = \int_X \overline{a(x)}\,f(x)\,\overline{g(x)} = \int_X M_{\overline{a}} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\mu(x) = \langle\, M_{\overline{a} f} \,,\, g\,\rangle,\end{aligned}$$

para todo $f, g \in L^2(X,\mu)$, luego $M_a^* = M_{\overline{a}}$.

□

Proposición 2.1.3. *Sean (X,μ) un espacio de medida μ σ-finita, $b\colon X \to \mathbb{C}$ una función μ-medible y $S \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ tal que $Sf = bf$ para cada f en $L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$. Entonces $b \in L^\infty(X,\mu)$, $\|b\|_\infty = \|S\|$ y $S = M_b$.*

Demostración. Ya que μ es σ-finita, entonces existe una sucesión $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de espacios de medida finita tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, más aún, es posible tomar los Y_k disjuntos a pares.

Sea $D := \{x \in X\colon |b(x)| \geq \|S\|\}$. Consideremos los conjuntos $Z_{k,n} := \{x \in Y_k\colon |b(x)| \geq \|S\| + \frac{1}{n}\}$, los cuales son de medida finita puesto que son subconjuntos de Y_k. Sea $f_{k,n} := \mathbf{1}_{Z_{k,n}}$; entonces, para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{k,n}\|_2^2 = \mu(Z_{k,n}) \leq \mu(Y_k) < +\infty,$$

así que $f_{k,n} \in L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$. Por otra parte,

$$\|Sf_{k,n}\|_2^2 = \|bf_{k,n}\|_2^2 = \int_{Z_{k,n}} |b(x)|^2\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \left(\frac{1}{n} + \|S\|\right)^2 \mu(Z_{k,n})$$

y
$$\|Sf_{k,n}\|_2^2 \leq \|S\|^2 \mu(Z_{k,n}),$$
de tal manera que
$$\left(\frac{1}{n} + \|S\|\right)^2 \mu(Z_{k,n}) \leq \|S\|^2 \mu(Z_{k,n}),$$
luego, $\mu(Z_{k,n}) = 0$. Pero $D = \bigcup_{k,n\in\mathbb{N}} Z_{k,n}$, es decir, $\mu(D) = 0$.

Por lo tanto, $\|b\|_\infty \leq \|S\|$, más aún M_b está bien definido y es acotado, de donde $S = M_b$ en $L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$, el cual es denso en $L^2(X,\mu)$. □

Proposición 2.1.4. *Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita μ. Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ tal que $SM_b = M_bS$ para toda $b \in L^\infty(X,\mu)$. Entonces existe $a \in L^\infty(X,\mu)$ tal que $S = M_a$.*

Demostración. De manera análoga a la demostración anterior, es posible hallar una sucesión $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos a pares tal que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, donde $\mu(Y_k) < +\infty$. Sea $a_k := S\mathbf{1}_{Y_k}$, luego
$$\mathbf{1}_{Y_k} a_k = M_{\mathbf{1}_{Y_k}} S\mathbf{1}_{Y_k} = SM_{\mathbf{1}_{Y_k}}\mathbf{1}_{Y_k} = S\mathbf{1}_{Y_k} = a_k.$$
Sea ahora $f \in L^2(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ tal que $f\mathbf{1}_{Y_k} = f$, entonces
$$Sf = S(f\mathbf{1}_{Y_k}) = SM_f\mathbf{1}_{Y_k} = M_fS\mathbf{1}_{Y_k} = M_f a_k = a_k f,$$
así, de la Proposición 2.1.3 se tiene que $\|a_k\|_\infty \leq \|S\|$. Definamos ahora $a\colon X \to \mathbb{C}$ mediante la regla
$$a(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(x).$$
Por otra parte notemos que cada f en $L^2(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ se puede descomponer en la serie ortogonal convergente en $L^2(X,\mu)$ siguiente:
$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{Y_k} f.$$
Como S es un operador lineal acotado,
$$Sf = \sum_{k\in\mathbb{N}} S(\mathbf{1}_{Y_k} f) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k f.$$
Finalmente, si $x \in X$, elegimos $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Y_j$. Así, para cualquier $m \geq j$, se tiene que
$$\sum_{k=1}^m a_k(x)f(x) = a_j(x)f(x) = a(x)f(x).$$
Luego, la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k f$ converge en $L^2(X,\mu)$ a af, de lo cual se concluye que $S = M_a$. □

2.2. Sobre espacios topológicos

A continuación, revisaremos algunos conceptos y resultados elementales de espacios topológicos, que utilizaremos en lo que resta de este capítulo. Es posible hallar el resto de los detalles en cualquier libro estándar de topología, o que contenga los rudimentos de espacios topológicos, por ejemplo [19, 23].

Definición 2.2.1. Sea $\mathcal{J}$ un conjunto no vacío y $\succeq$ una relación binaria. Decimos que la pareja $(\mathcal{J}, \succeq)$ es un *conjunto dirigido* si la relación $\succeq$ es simétrica y transitiva, y cualquier par de elementos de $\mathcal{J}$ tiene cota superior.

Definición 2.2.2. Una *red* en un conjunto X es una función $\eta \in X^{\mathcal{J}}$, donde $\mathcal{J}$ es un conjunto dirigido y X arbitrario.

Definición 2.2.3. Sea $x = (x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una red en un espacio topológico (X, τ) y $y \in X$. Entonces se dice que el punto y es *el límite de la red* x, y se denota por $\lim_{j\in\mathcal{J}} x_j = y$, si y solo si cualquier vecindad abierta de y contiene al menos un punto de la red. Esto es,

$$\lim_{j\in\mathcal{J}} x_j = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall\, A \in \tau_y)\,(\exists\, j_0 \in \mathcal{J})\,(\forall\, j \succeq j_0)\; x_j \in A,$$

donde $\tau_y := \{A \in \tau : y \in A\}$.

Proposición 2.2.4. *Sean (X, τ) un espacio toplógico, $Y \subseteq X$ y $z \in X$. Entonces $z \in \operatorname{clos}(Y)$ si y solo si existe una red $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ en Y tal que $\lim_{j\in\mathcal{J}}(x_j) = z$.*

Demostración. Supongamos primero que $z \in \operatorname{clos}(Y)$. Sea $\mathcal{J} := \tau_z$, donde la relación binaria está dada por $A, B \in \mathcal{J}$, $A \succeq B$ si y solo si $A \subseteq B$. Para cada $A \in \mathcal{J}$ elegimos $x_A \in A \cap Y$, así, formamos la red $(x_A)_{A\in\mathcal{J}}$ en Y. Si $A, B \in \mathcal{J}$, con $B \succeq A$, entonces $B \subseteq A$, luego $x_B \in A$, es decir, $\lim_{A\in\mathcal{J}}(x_A) = z$.

Supongamos ahora que existe una red $(x_j)_{j\in\mathcal{J}}$ en Y tal que $\lim_{j\in\mathcal{J}} x_j = z$. Sea $A \in \tau_z$. Entonces, existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que para todo $j \succeq j_0$ $x_j \in A$, pero $x_{j_0} \in A$, luego, $z \in \operatorname{clos}(Y)$. $\square$

Proposición 2.2.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sean Y y Z subconjuntos de X tales que $Z \subseteq Y$, $\operatorname{clos}(Y) = X$ y $Y \subseteq \operatorname{clos}(Z)$. Entonces $\operatorname{clos}(Z) = X$.*

Demostración. Como $Z \subseteq Y$, entonces $\operatorname{clos}(Z) \subseteq \operatorname{clos}(Y) = X$.

Para la otra contención, basta con observar que $X = \operatorname{clos}(Y) \subseteq \operatorname{clos}(\operatorname{clos}(Z)) = \operatorname{clos}(Z)$. $\square$

Definición 2.2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección de conjuntos $\mathcal{B}$ de τ es una *base* para τ si dado $A \in \tau$, existe $(B_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$.

Proposición 2.2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una colección de conjuntos de τ. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para τ si y solo si para todo $A \in \tau$ y para todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{B}$ es una base para τ. Entonces, para $A \in \tau$, existe $(B_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$, luego, si $x \in A$, existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x \in B_{\alpha_0} \subset A$.
Sean ahora $A \in \tau$ y $x \in A$. Sea $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathbb{B}_x \subset A$, luego $A = \bigcup_{x\in A} B_x$. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología τ. Entonces*

(i) *X se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$,*

(ii) *la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ se puede escribir como unión de dos elementos de $\mathcal{B}$.*

Proposición 2.2.9. *Sean (X,τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ tal que satisface (i) y (ii) de la Proposición 2.2.8. Entonces*

$$\tau := \left\{ A \subset X : \exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B},\ A = \bigcup \mathcal{C} \right\},$$

es una topología en τ y $\mathcal{B}$ es una base de τ, donde $\bigcup \mathcal{C} = \{x \colon \exists C \in \mathcal{C},\ x \in C\} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Diremos que $\mathcal{B}$ es base para una topología en X (o base topológica). Diremos además que τ es la topología generada por $\mathcal{B}$.

Demostración. Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \tau$. De (i), se tiene que $X = \bigcup \mathcal{B}$, luego $X \in \tau$. Además, es inmediato que $\emptyset \in \tau$. Si $\mathcal{C} \in \tau$, es fácil ver que $\bigcup \mathcal{C} \in \tau$. Mostremos entonces que si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$:

Para A_1, A_2, existen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{B}$ tales que $A_1 = \bigcup \mathcal{C}_1$ y $A_2 = \bigcup \mathcal{C}_2$, luego $A_1 \cap A_2 = (\bigcup \mathcal{C}_1) \cap (\bigcup \mathcal{C}_2) \in \tau$, pues es intersección de dos abiertos. $\square$

Proposición 2.2.10. *Sean X un conjunto, $\mathcal{S} \subset 2^X$ y*

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subset X :\ \exists\, \mathcal{F} \subset \mathcal{S},\ \mathcal{F} \text{ finito},\ B = \bigcap \mathcal{F} \right\}$$

y τ la topología que corresponde a $\mathcal{B}$, es decir, la topología generada por $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para una topología en X. Si τ es la topología generada por $\mathcal{B}$, entonces τ es la topología más gruesa que contiene a $\mathcal{S}$.

Demostración. Veamos que se satisfacen (i) y (ii) de la Proposición 2.2.8. En efecto,

(i) Basta con ver que $\emptyset^c = X$.

(ii) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces existen respectivos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{S}$ finitos, tales que $B_1 = \cap \mathcal{F}_1$ y $B_2 = \cap \mathcal{F}_2$, pero $B_1 \cap B_2 = \cap(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.

$\square$

Definición 2.2.11. Sean X un conjunto, $((Y_j, \tau_j))_{j \in \mathcal{J}}$ una familia de espacios topológicos y $(f_j)_{j \in \mathcal{J}}$ una familia de funciones tal que para todo $j \in \mathcal{J}$, $f_j \in Y_j^X$. Sea τ la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de los conjuntos $f_j^{-1}(B_j)$, para todo $j \in \mathcal{J}$, con $B_j \in \tau_j$. Entonces τ es una topología en X. Más aún, es la topología *más débil o gruesa* con respecto a la cual todas las funciones f_j son continuas. Llamaremos a τ *la topología débil en X inducida por la familia $(f_j)_{j \in \mathcal{J}}$*.

Equivalentemente, diremos que τ es la topología más gruesa o débil que contiene al siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} = \{A \subseteq X \colon (\exists\, j \in \mathcal{J})\ (\exists\, B \in \tau_j),\quad A = f_j^{-1}(B_j)\}.$$

Definición 2.2.12 (Espacio vectorial topológico localmente convexo definido por una familia de seminormas)**.** Sean V un espacio vectorial complejo y $(p_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una familia de seminormas en V tal que para todo $x \in V \setminus \{0\}$, existe $j \in \mathcal{J}$ tal que $p_j(x) > 0$. Definimos sobre V la topología τ como la topología con respecto a la cual son continuas las funciones $q_{x,j}(y) \coloneqq p_j(y-x)$.

Para esta topología, el siguiente conjunto es una base:

$$\mathcal{B} = \{\alpha\, p_j^{-1}(\mathbb{D}) + x \colon \alpha \in \mathbb{C},\ j \in \mathcal{J},\ x \in V\},$$

donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

Definición 2.2.13 (topología débil-*)**.** Sean V un espacio de Banach y V^* su espacio dual. Para cada $x \in V$ definimos *la función evaluación* $\psi_x \colon V^* \to \mathbb{C}$ por $\psi_x(\varphi) \coloneqq \varphi(x)$. La *topología débil-** en V^* se define como la topología más gruesa entre todas las topologías con respecto a las cuales todas las funciones ψ_x son continuas.

Observación 2.2.14. La topología débil-* es la topología del espacio vectorial localmente convexo asociada a la familia de seminormas.

2.3. Topología débil-* en L^∞

Denotemos por μ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y usemos la notación $L^1(\mathbb{R})$ y $L^\infty(\mathbb{R})$ en el sentido usual. Es bien sabido que $L^\infty(\mathbb{R})$ es isométricamente isomorfo al espacio dual de $L^1(\mathbb{R})$. De hecho, dada una función f en $L^1(\mathbb{R})$, se define φ_f : $L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi_f(a) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} f\, a\, \mathrm{d}\mu.$$

Es evidente que φ_f es un funcional lineal. Más aún, φ_f es acotado con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Conforme a la definición general de topología débil-* en el dual de un espacio vectorial topológico (Definición 2.2.11), la topología débil-* en $L^\infty(\mathbb{R})$ es definida como la topología más gruesa en $L^\infty(\mathbb{R})$ tal que para cada f en $L^\infty(\mathbb{R})$ el funcional φ_f es continuo.

Explícitamente esta topología puede describirse como sigue. Dada una función a en $L^\infty(\mathbb{R})$, un subconjunto finito F de $L^1(\mathbb{R})$ y un número $\varepsilon > 0$, pongamos

$$U_{a,F,\varepsilon} \coloneqq \{b \in L^\infty(\mathbb{R}) : \forall\, f \in F,\ |\varphi_f(b-a)| < \varepsilon\}.$$

Definamos entonces τ como la familia de subconjuntos de $L^\infty(\mathbb{R})$ siguiente. Un conjunto A pertenece a τ si y solo si para todo a en A existe un subconjunto finito F de $L^1(\mathbb{R})$ y un número $\varepsilon > 0$ tal que $U_{a,F,\varepsilon} \subseteq A$.

Afirmamos que τ es una topología en $L^\infty(\mathbb{R})$. En efecto, si $b \in L^\infty(\mathbb{R})$, y

$$\mathcal{B}_b \coloneqq \{U_{b,F,\varepsilon} : F \subseteq L^1(\mathbb{R}) \text{ finito y } \varepsilon > 0\},$$

entonces τ es la topología inducida por $(\mathcal{B}_b)_{b\in L^\infty(\mathbb{R})}$. Se dice que τ es la topología definida por la familia de seminormas $\{\varphi_f : f \in L^1(\mathbb{R})\}$. Notemos que a través de esta construcción se definen los espacios topológicos localmente convexos. Además, la familia $(\mathcal{B}_b)_{b\in L^\infty(\mathbb{R})}$ forma un sistema de bases locales, es decir, para cada b en $L^\infty(\mathbb{R})$, los conjuntos $\{U_{b,F,\varepsilon}\}$ forman una base local de τ en b.

Proposición 2.3.1. *La topología* τ *es la más gruesa en* $L^\infty(\mathbb{R})$ *respecto a la cual los funcionales* φ_f*, con* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, son continuos.*

Demostración.

a) Sea τ' una topología en $L^\infty(\mathbb{R})$ para la cual el funcional φ_f es continuo para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sean $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, $F \subseteq L^1(\mathbb{R})$ finito y $\varepsilon > 0$, entonces

$$U_{a,F,\varepsilon} = \bigcap_{f \in F} V_f,$$

donde $V_f := \{b \in L^\infty(\mathbb{R}) : |\varphi_f(b-a)| < \varepsilon\}$. Sin embargo, notemos que

$$\begin{aligned} b \in V_f \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_f(b-a) \in \varepsilon\mathbb{D} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_f(b) \in \varphi_f(a) + \varepsilon\mathbb{D} \\ &\Leftrightarrow \quad b \in \varphi_f^{-1}(\varphi_f(a) + \varepsilon\mathbb{D}). \end{aligned}$$

Luego,

$$U_{a,F,\varepsilon} = \bigcap_{f \in F} \varphi_f^{-1}(\varphi_f(a) + \varepsilon\mathbb{D}).$$

Así que $U_{a,F,\varepsilon} \in \tau'$. Por tanto, $\tau \subseteq \tau'$.

b) Sean ahora $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $a \in L^\infty(\mathbb{R})$. Veamos que φ_f es continua en a. Sin embargo, si $\varepsilon > 0$ y $b \in U_{a,\{f\},\varepsilon}$, entonces $|\varphi_f(a) - \varphi_f(b)| < \varepsilon$, i.e.,

$$\varphi_f(U_{a,\{f\},\varepsilon}) \subseteq \varphi_f(a) + \varepsilon\mathbb{D}. \qquad \square$$

Sean $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $(a_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una red en $L^\infty(\mathbb{R})$. De aquí en adelante escribiremos $a_j \xrightharpoonup[j\in\mathcal{J}]{} b$ o solamente $a_j \rightharpoonup b$ si $(a_j)_{j\in\mathcal{J}}$ converge a b en la topología τ.

Proposición 2.3.2. *Sean* $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ *y* $(a_j)_{j\in\mathcal{J}}$ *una red en* $L^\infty(\mathbb{R})$*. Entonces,* $a_j \rightharpoonup b$ *si y solo si para todo* $f \in L^1(\mathbb{R})$*,*

$$\lim_{j\in\mathcal{J}} \varphi_f(a_j) = \varphi_f(b).$$

Demostración. Supongamos primero que $a_j \rightharpoonup b$. Entonces, para todo $A \in \tau_b$ existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que para todo $j \succeq j_0$, $a_j \in A$. Sean entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$; de la definición existe $j_0 \in \mathcal{J}$ tal que para todo $j \succeq j_0$, $a_j \in U_{b,\{f\},\varepsilon}$, i.e.,

$$|\varphi_f(a_j) - \varphi_f(b)| < \varepsilon.$$

Por otro lado, sea ahora $a \in \tau_b$, entonces existen $F \subseteq L^1(\mathbb{R})$ finito, pongamos $F = \{f_1, \ldots, f_p\}$, y $\varepsilon > 0$ tales que $U_{b,F,\varepsilon} \subseteq A$. Además, existen $j_1, \ldots, j_p \in \mathcal{J}$ tales que para todo $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ y para todo $j \succeq j_k$, $|\varphi_{f_k}(a_j) - \varphi_{f_k}(b)| < \varepsilon$. Como $\mathcal{J}$ es un conjunto dirigido, existe $j_0 \in \mathcal{J}$ cota superior de $\{j_1, \ldots, j_p\}$, de tal manera que para cualesquiera $j \succeq j_0$ y $f \in F$, $|\varphi_f(a_j) - \varphi_f(b)| < \varepsilon$, i.e. para todo $j \succeq j_0$, $a_j \in U_{b,F,\varepsilon} \subseteq A$. $\square$

2.4. Densidad en L^∞ de las funciones suaves de soporte compacto

Denotemos por $C_b(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas y acotadas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dotado con la norma del supremo. Es fácil ver que este conjunto está encajado en $L^\infty(\mathbb{R})$: a cada función a en $C_b(\mathbb{R})$ le corresponde su clase de equivalencia.

Recordemos que para una función $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se define el *soporte* de ésta como

$$\operatorname{clos}(\{x \in \mathbb{R} : a(x) \neq 0\}).$$

Denotemos por $C_c(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con soporte compacto.

Dado un subconjunto E de $\mathbb{R}$, denotemos por $\mathbf{1}_E$ a su función característica.

Proposición 2.4.1. *Sea $a \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, $a\mathbf{1}_{[-L,L]} \rightharpoonup a$ cuando $L \to \infty$.*

Demostración. Para cada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned} |\varphi_f(a - a1_{[-k,k]})| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(a - a\mathbf{1}_{[-k,k]})\, \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} |f\, a|\, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} |f|\, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Sea ahora $h_k \coloneqq f\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]}$. Notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = 0.$$

Además, $|h_k| \leq |f|$. En virtud del Teorema de Convergencia Monótona,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} |f|\, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_k|\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Así que, dado $\varepsilon > 0$, es posible hallar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} |f|\, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{\|a\|_\infty}$. Finalmente, si $L > k$, entonces

$$|\varphi_f(a - a1_{[-L,L]})| \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |f|\, \mathrm{d}\mu \leq \|a\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus[-k,k]} |f|\, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

□

Lema 2.4.2 (Teorema de continuidad de la integral)**.** *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cada $Y \subset \mathbb{R}$ medible, con $\mu(Y) < \delta$, se cumple*

$$\left| \int_Y f\, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_Y |f|\, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

La demostración de este resultado puede hallarse en [22, Teorema 9.6].

Lema 2.4.3 (Teorema de Luzin)**.** *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto medible y $f\colon E \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces, para cada $\delta > 0$ existe un subconjunto cerrado $F \subseteq E$, con $\mu(E \setminus F) < \delta$ tal que $f|_F$ es continua.*

Demostración. Se probará primero para funciones simples. Sea $\xi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{1}_{E_j}$ una función simple, con $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Fijemos $\delta > 0$. Como E_j es medible, existe un conjunto cerrado $F_j \subseteq E_j$ tal que

$$\mu(E_j \setminus F_j) < \frac{\delta}{2^{n+1}}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Luego,

$$F = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

es cerrado y $\mu(E \setminus F) < \delta$.

Si E es acotado, entonces F_j es compacto; luego, $\operatorname{dist}(F_j, F_k) > 0$, si $j \neq k$. Ya que ξ es constante en cada F_j, se sigue que $\xi|_F$ es continua. Si E no es acotado, considere los conjuntos

$$E_k = \{x \in E\colon k \leq \|x\| \leq k+1\}. \qquad (*)$$

Sea ahora $f\colon E \to \mathbb{C}$ una función medible arbitraria. Tomemos $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que $\xi_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in E$. Fijemos $\delta > 0$. Por el caso anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ es posible hallarun cerrado $F_n \subseteq E$ tal que

$$\mu(E \setminus F_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

y $\xi_n|_{F_n}$ es continua. Si E es acotado, ya que μ es una medida de Radon y por el teorema de Egorov, existe un cerrado $F_0 \subseteq E$ tal que

$$\mu(E \setminus F_0) < \frac{\delta}{2}$$

y ξ_n converge uniformemente a f en F_0. Definimos $F := \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$. Entonces F es cerrado, ya que F_n lo es para cada $n \in \mathbb{N}$; y

$$\mu(E \setminus F) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(E \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E \setminus F_n) \leq \delta.$$

Así, como $\xi_n|_{F_n}$ es continua, entonces $\xi_n|_F$ es continua; y ya que ξ_n converge uniformemente a f en F, se tiene que $f|_F$ es continua. Finalmente, si E no es acotado, basta considerar los conjuntos E_k $(*)$. □

Lema 2.4.4 (Teorema de extensión de Tietze)**.** *Sean F un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f\colon F \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, existe una función g continua en X con valores en $\mathbb{C}$ tal que $g|_F = f$. Además,*

$$\sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x\in F} |f(x)|.$$

Demostración. Sea $f\colon F \to \mathbb{C}$ una función continua, donde F es un subconjunto cerrado de un espacio normal X. Pongamos $f = u + \mathrm{i}\, v$, donde $u, v\colon F \to \mathbb{R}$; luego, tales funciones son continuas. Supongamos primero que $u(x) \geq 0$ para cada $x \in F$. Pongamos $\eta = \dfrac{u}{1+u}$ y notemos que $\eta\colon F \to (0,1) \subseteq [0,1]$ es una función continua. Por el lema de Uryson, existe una extensión continua $\eta_0\colon X \to [0,1]$ de η.

Pongamos ahora $B = \eta_0^{-1}(\{1\})$ y notemos que B es cerrado. Además, como $0 < \eta_0(x) < 1$ para cada $x \in F$, se tiene que $B \cap F = \emptyset$. Una vez más, por el lema de Uryson, existe una función continua $\xi\colon X \to [0,1]$ tal que $\xi(c) = 1$ para todo $c \in F$, y $\xi(b) = 0$ para todo $b \in B$. Notemos ahora que la función $w = \dfrac{\xi\eta_0}{1 - \xi\eta_0}$ es una extensión continua de u a todo X con valores en $\mathbb{R}$.

Para el caso general, tomamos $u\colon F \to \mathbb{R}$ y escribimos, $u = u^+ - u^-$, donde u^+ y u^- son funciones continuas y no negativas. Luego, por todo lo anterior, existen dos funciones continuas ξ_1, ξ_2 que extienden a u^+ y u^-, respectivamente. Así, notemos que $g_1 = \xi_1 - \xi_2\colon X \to \mathbb{R}$ es continua y $g_1|_F = u$. Análogamente para la función v, es posible hallar una función continua $g_2\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g_2|_F = v$.

Finalmente, notemos que la función $g \coloneqq g_1 + \mathrm{i}\, g_2\colon X \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $g|_F = f$. Más aún, por construcción de g, se tiene que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x \in F} |f(x)|.$$

□

Corolario 2.4.5. *Sean $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $L, \varepsilon > 0$. Entonces, existe $g \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ y*

$$\mu\left(\{x \in [-L, L]\colon f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 2.4.3 en $[-L, L]$ y encontramos un conjunto cerrado $F \subseteq [-L, L]$ tal que $\mu([-L, L] \setminus F) < \varepsilon$ y $f|_F$ es continua. Tomemos $F_1 = F \cup \{-2L, 2L\}$ y definamos $f_1\colon F \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in F,\\ 0, & \text{si } x \in \{-2L, 2L\}.\end{cases}$$

Aplicamos ahora el Teorema 2.4.4 en $[-2L, 2L]$ y obtenemos una función continua f_2. Definamos ahora $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x), & \text{si } x \in [-2L, 2L],\\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-2L, 2L].\end{cases}$$

Finalmente, es evidente que $g \in C_c(\mathbb{R})$, y $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$. □

Proposición 2.4.6. *$C_c(\mathbb{R})$ es un subconjunto denso de $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$.*

Demostración. Sean $b \in (L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$, $\varepsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_m \in L^1(\mathbb{R})$. Encontramos entonces $L > 0$ tal que para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} < \frac{\varepsilon}{4\,\|b\|_\infty}.$$

Aplicamos ahora el Corolario 2.4.5 en $[-L, L]$ y hallamos una función $a \in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|a\|_\infty \leq \|b\|_\infty$. Pongamos $E = \{x \in [-L, L]\colon a(x) \neq b(x)\}$, entonces $\mu(E) < \delta$. Luego,

$$\begin{aligned}
|\varphi_f(a-b)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (a-b) f_j \, \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |(a-b)f_j| \, \mathrm{d}\mu + \int_{[-L,L]\setminus E} |(a-b)f_j| \, \mathrm{d}\mu + \int_E |(a-b)f_j| \, \mathrm{d}\mu \\
&< 2\|b\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|b\|_\infty} + 0 + 2\|b\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|b\|_\infty} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Definición 2.4.7. Una *función de prueba* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función con soporte compacto e infinitamente suave. Denotemos por $C_c^\infty(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones de prueba.

Proposición 2.4.8. *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $C_c(\mathbb{R})$.*

Demostración. Sea f una función no negativa de clase $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = 1$. Entonces la sucesión $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $g_k(x) := kf(kx)$ es una sucesión de Dirac, i.e.

i. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad g_k(x) \geq 0;$

ii. $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} g_k \, \mathrm{d}\mu = 1;$

iii. $\forall\, \delta > 0, \quad \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} g_k \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Dada una función $a \in C_c(\mathbb{R})$, afirmamos que la convolución $g_k * a$ pertenece a $C_c(\mathbb{R})$. En efecto, tomemos $x \in \mathbb{R}$ tal que $(g_k * a)(x) \neq 0$, es decir,

$$(g_k * a)(x) = \int_{\mathbb{R}} g_k(y)\, a(x-y) \, \mathrm{d}y \neq 0,$$

luego, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $g_k(y)\, a(x-y) \neq 0$. Así que $y \in \operatorname{supp}(g_k)$ y $x - y \in \operatorname{supp}(a)$, de donde $x \in \operatorname{supp}(g_k) + \operatorname{supp}(a)$. De tal manera que

$$\{x \in \mathbb{R}\colon (g_k * a)(x) \neq 0\} \subseteq \operatorname{supp}(g_k) + \operatorname{supp}(a).$$

Además, como $\operatorname{supp}(g_k)$ y $\operatorname{supp}(a)$ son conjuntos cerrados, se sigue que

$$\operatorname{supp}(g_k * a) \subseteq \operatorname{clos}(\operatorname{supp}(g_k) + \operatorname{supp}(a)) = \operatorname{supp}(g_k) + \operatorname{supp}(a).$$

Por lo tanto, $g_k * a \in C_c(\mathbb{R})$ y la sucesión $(g_k * a)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a a uniformemente. □

Proposición 2.4.9. *$C_c^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$.*

Demostración. Se sigue del resultado anterior y de la Proposición 2.2.5. □

2.5. Densidad en L^∞ de las combinaciones lineales de caracteres

Mostraremos ahora que el conjunto de combinaciones lineales de caracteres es denso en $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$.

Sabemos que dado $\xi \in \mathbb{R}$, la función $E : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ definida por

$$E_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

es un carater del grupo $\mathbb{R}$, más aún, cada caracter tiene esta representación. Además, la función

$$\begin{aligned} \Phi \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto E_\xi \end{aligned}$$

es isomorfismo y homeomorfismo.

Notemos que $E_\xi \in C_b(\mathbb{R})$ para cada $\xi \in \mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{E}$ al espacio generado por $\{E_\xi : \xi \in \mathbb{R}\}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \left\{ a \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}) : \exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R},\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}; a = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, E_{\xi_k} \right\} \\ &= \operatorname{span}\{E_\xi : \xi \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Luego, de manera natural, se tiene que

$$\mathcal{E} \ \hookrightarrow\ C_b(\mathbb{R}) \ \hookrightarrow\ L^\infty(\mathbb{R}).$$

Nuestro objetivo es mostrar que $\mathcal{E}$ es denso en $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$.

Proposición 2.5.1. *Sean $c, d \in \mathbb{R}$, con $c < d$, $f : [c, d] \to \mathbb{C}$ una función continuamente diferencialble e integrable, y $p \in \mathbb{N}$,*

$$\alpha_k = c + \frac{d-c}{p} k \qquad (k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}).$$

Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sea β_k algún punto en $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$. Entonces

$$\left| \int_c^d f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{d-c}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(\beta_k) \right| \le \frac{(d-c)^2}{2p} \|f'\|_\infty. \tag{2.2}$$

Demostración. Notemos que

$$\int_c^d f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{d-c}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(\beta_k) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\beta_k)\,\mathrm{d}\xi \right| \\ &\le \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(\xi) - f(\beta_k)|\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio, $|f(\xi) - f(\beta_k) \leq |\xi - \beta_k| \, \|f'\|_\infty$, luego,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |\xi - \beta_k| \, \mathrm{d}\xi &= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} -(\xi - \beta_k) \, \mathrm{d}\xi + \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} (\xi - \beta_k) \, \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{(\beta_k - \alpha_k)^2}{2} + \frac{(\alpha_{k+1}\beta_k)^2}{2} \\ &\leq \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)(\beta_k - \alpha_k)}{2} + \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)(\alpha_{k+1}\beta_k)}{2} \\ &\leq \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{d-c}{p}\right)^2.\end{aligned}$$

De tal manera que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(\xi) - f(\beta_k)| \, \mathrm{d}\xi \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2}\left(\frac{d-c}{p}\right)^2 \|f'\|_\infty .$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_c^d f(\xi) \, \mathrm{d}\xi - \frac{d-c}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(\beta_k) \right| \leq \frac{(d-c)^2}{2p} \|f'\|_\infty .$$

□

Proposición 2.5.2. *Sea $a \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Entonces a es un elemento de la cerradura de $\mathcal{E}$ en la topología τ.*

Demostración. Sea $b \coloneqq \widehat{a}$. Entonces, por la fórmula de inversión

$$a(x) = \int_{\mathbb{R}} b(\xi) \, E_\xi(x) \, \mathrm{d}\xi. \tag{2.3}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por $\alpha_{m,k}$ a los puntos

$$\alpha_{m,k} \coloneqq -m + \frac{k}{m^2} \qquad (k \in [\![0, 2m^3]\!]).$$

Ahora, para $m \in \mathbb{N}$ y $k \in [\![0, 2m^3 - 1]\!]$ es posible hallar un $\beta_{m,k} \in [\alpha_{m,k}, \alpha_{m,k+1}]$ tal que

$$|\widehat{a}(\beta_{m,k})| = \min_{\xi \in [\alpha_{m,k}, \alpha_{m,k+1}]} |\widehat{a}(\xi)|.$$

Definimos $u_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como

$$u_m \coloneqq \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{2m^3-1} \widehat{a}(\beta_{m,k} E_{\beta_{m,k}}) \in \mathcal{E}.$$

Afirmamos que $u_m \rightharpoonup a$ cuando $m \to \infty$. En efecto, fijemos $g \in L^1(\mathbb{R})$ y estimemos la función u_m definida arriba, así como la diferencia $a - u_m$. Apliquemos ahora la Proposición 2.5.1, con $f(\xi) = b(\xi) \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi}$, $p = 2m^3$, $c = -m$ y $d = m$. Notemos que $f'(\xi) = b'(\xi) \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} + 2\pi \mathrm{i} \, x \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} \, b(\xi)$, luego

$$\|f'\|_\infty \leq \|b'\|_\infty \, 2\pi |x| \, \|b\|_\infty .$$

Por otra parte, si $|x| \leq L$ para algún $L \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$|a(x) - u_m(x)| \leq \frac{C}{m}(\|b'\|_\infty + 2\pi L \|b\|_\infty).$$

Así, por (2.2):

$$\left| \int_{-m}^{m} b(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\, \mathrm{i}\, x\xi} \, \mathrm{d}\xi - u_m(x) \right| \leq \frac{(2m)^2}{4m^3}(\|b'\|_\infty + 2\pi |x| \, \|b\|_\infty)$$

y

$$|a(x) - u_m(x)| \leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-m,m]} |b| \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{m}(\|b'\|_\infty + 2\pi |x| \, \|b\|_\infty). \tag{2.4}$$

Ahora, para $|x| > L$, estimemos $u_m(x)$ de la siguiente manera

$$|u_m(x)| \leq \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{2m^3-1} |b(\beta_{m,k})| \leq \sum_{k=0}^{2m^3-1} \int_{\alpha_{m,k}}^{\alpha_{m,k+1}} |b(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leq \|b\|_1 .$$

Notemos ahora que $|a(x)| \leq \|b\|_1$, luego,

$$|a(x) - u_m(x)| \leq 2 \|b\|_1 . \tag{2.5}$$

Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $L \in \mathbb{R}_+$, aplicamos (2.4) para $|x| \leq L$ y (2.5) para $|x| > L$, y obtenemos

$$\begin{aligned} |\varphi_g(a - u_m)| &\leq \int_{[-L,L]} |u_m - a| \, |g| \, \mathrm{d}\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |u_m - a| \, |g| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq I_1(L,m) + I_2(L,m) + I_3(L), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} I_1(L,m) &= \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus[-m,m]} |b| \, \mathrm{d}\mu, \\ I_2(L,m) &= \frac{1}{m}(\|b'\|_\infty + 2\pi L \|b\|_\infty), \\ I_3(L) &= 2 \|b\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus[-L,L]} |g| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Basta tomar $L > 0$ tal que $I_3(L) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, hallamos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_1(L,m) + I_2(L,m) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $m \geq m_0$.

Así pues, para cada $m \geq m_0$ se tiene que

$$|\varphi_g(a - u_m)| < \varepsilon.$$

□

Proposición 2.5.3. *$\mathcal{E}$ es denso en $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.2.5. □

2.6. Criterios del operador de multiplicación

Denotemos por TDO a la topología débil de operadores en $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ y por $\mathcal{M}$ al conjunto de todos los operadores de multiplicación con símbolos generadores acotados:

$$\mathcal{M} = \{M_b\colon\ b \in L^\infty(\mathbb{R})\}.$$

Proposición 2.6.1. *Sea $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $(a_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una red en $L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces M_{a_j} converge a M_b en la topología débil de operadores si y solo si $(a_j)_{j\in\mathcal{J}}$ converge a b en la topología τ.*

Demostración. (i) Supongamos primero que $(M_{a_j})_{j\in\mathcal{J}}$ converge a M_b en TDO. Sea $h \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces h se puede escribir como $h = f\overline{g}$, para algunas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Luego $\langle\, M_{a_j} f\,,\, g\,\rangle \to \langle\, M_b f\,,\, g\,\rangle$, lo cual implica que $\varphi_h(a_j) \to \varphi_h(b)$. Como h fue arbitraria en $L^1(\mathbb{R})$ se concluye que $a_j \xrightarrow[j\in\mathcal{J}]{} b$.

(ii) Supongamos ahora que $a_j \xrightarrow[j\in\mathcal{J}]{} b$. Afirmamos que (M_{a_j}) converge a M_b en TDO. En efecto, fijemos $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y pongamos $h = f\overline{g}$. Luego $\varphi_h(a_j) \to \varphi_h(b)$, lo cual implica que $\langle\, M_{a_j} f\,,\, g\,\rangle \to \langle\, M_b f\,,\, g\,\rangle$. □

De la Proposición 2.6.1 resulta importante resaltar el corolario siguiente que subraya la importancia de la topología τ.

Corolario 2.6.2. *Sea la función $\Lambda\colon L^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}$ tal que $b \mapsto M_b$. Entonces, Λ es un isomorfismo isométrico de álgebras C^*. Más aún, Λ es también un homeomorfismo del espacio topológico $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$ en $\mathcal{M}$ considerado con la topología inducida por la* TDO*.*

Demostración. Consecuencia de las proposiciones 2.1.4 y 2.6.1, y de las propiedades aritméticas del operador de multiplicación (Proposición 2.1.2). □

Proposición 2.6.3. *Sea $\mathcal{X}$ un subconjunto de $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ y $\mathcal{Y}$ la cerradura de $\mathcal{X}$ con respecto a la* TDO*. Entonces, el centralizador de $\mathcal{Y}$ coincide con el centralizador de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Notemos que si S conmuta con cada elemento de $\mathcal{Y}$, entonces, en particular, S conmuta con cada elemento de $\mathcal{X}$. Supongamos entonces que S conmuta con cada elemento de $\mathcal{X}$ y que T es un elemento de $\mathcal{Y}$. Por demostrar que $ST = TS$. Para ello es suficiente mostrar que para cualesquiera $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle\, STf\,,\, g\,\rangle = \langle\, TSf\,,\, g\,\rangle. \tag{2.6}$$

Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Como $T \in \mathcal{Y}$, existe una red $(U_j)_{j\in\mathcal{J}}$ en $\mathcal{X}$ tal que converge a T en la topología débil de operadores. Luego

$$\begin{aligned}\langle\, TSf\,,\, g\,\rangle &= \langle\, T(Sf)\,,\, g\,\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}} \langle\, U_j(Sf)\,,\, g\,\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}} \langle\, (U_jS)f\,,\, g\,\rangle \\ &= \lim_{j\in\mathcal{J}} \langle\, (SU_j)f\,,\, g\,\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}} \langle\, S(U_jf)\,,\, g\,\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}} \langle\, U_jf\,,\, S^*g\,\rangle \\ &= \langle\, Tf\,,\, S^*g\,\rangle = \langle\, STf\,,\, g\,\rangle.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.6.4. *Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $SM_{E_\xi} = M_{E_\xi}S$. Entonces $S \in \mathcal{M}$, es decir, existe $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $S = M_b$.*

Demostración. Pongamos $\mathcal{X} := \{M_\xi \colon \ \xi \in \mathcal{E}\}$. Sabemos de la Proposición 2.5.3 que $\mathcal{E}$ es denso en $(L^\infty(\mathbb{R}), \tau)$. Luego, por la Proposición 2.6.1, la cerradura de $\mathcal{E}$ con la topología débil de operadores coincide con $\mathcal{M}$. Además, por hipótesis, el operador S conmuta con todos los elementos de $\mathcal{X}$. Por tanto, por la Proposición 2.6.3, S conmuta con todos los elementos de $\mathcal{M}$. Finalmente, aplicando le Proposición 2.1.4 se concluye que $S \in \mathcal{M}$. $\square$

Corolario 2.6.5. *Sean Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y $S \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$, tales que, para todo $\xi \in \mathbb{R}$,*

$$M_{E_\xi|_\Omega}S = SM_{E_\xi|_\Omega}.$$

Entonces, existe $b \in L^\infty(\Omega)$ tal que $S = M_b$.

Demostración. Sea $T \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tal que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ y para toda $x \in \mathbb{R}$

$$(Tf)(x) = \begin{cases} \left(S(f|_\Omega)\right)(x) & \text{si } x \in \Omega; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Entonces

$$\|Tf\|^2 = \int_\Omega |Tf(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|S(f|_\Omega)\|^2 \leq \|S\|^2 \, \|f|_\Omega\|^2 ,$$

de donde $\|Tf\| \leq \|S\| \, \|f\|$. Luego, $T \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$.

Sea ahora $\xi \in \mathbb{R}$, si $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} (M_{E_\xi}Tf)(x) &= E_\xi(x)(Tf)(x) = E_\xi(x)S(f|_\Omega)(x) \\ &= M_{E_\xi|_\Omega}S(f|_\Omega)(x) = SM_{E_\xi|_\Omega}(f|_\Omega)(x) \\ &= S(M_{E_\xi})|_\Omega(x) = (TM_{E_\xi}f)(x). \end{aligned}$$

Así que $M_{E_\xi}T = TM_{E_\xi}$ para toda $\xi \in \mathbb{R}$. Por el Teorema 2.6.4, existe $b_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $T = b_1$. Basta con tomar $b := b_1|_\Omega$. Luego $S = M_b$. $\square$

2.7. La transformada de Fourier

Para nosotros es importante notar que $\mathbb{R}$ es una grupo abeliano localmente compacto y que la medida μ es invariante bajo traslaciones; en otras palabras, μ es una medida de Haar [23, Teorema 5.14].

Recordemos que dado $\xi \in \mathbb{R}$, la función $E_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$E_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi \, \mathrm{i} \, \xi x},$$

es un caracter del grupo $\mathbb{R}$

Definimos la transformada de Fourier $F_1 \colon L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$(F_1 f)(\xi) := \int_\mathbb{R} \overline{E_\xi(x)} \, f(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Se sabe [6] que para cada $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se cumple la identidad de Plancherel $\|F_1 f\|_2 = \|f\|_2$, y por ello el operador lineal F_1 se puede extender a un operador unitario $F\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, conocido como transformada de Fourier-Plancherel.

Dado $a \in \mathbb{R}$, denotemos por S_a al *operador de traslación* que actúa en $L^2(\mathbb{R})$ mediante la regla

$$(S_a f)(x) \coloneqq f(x-a).$$

Afirmamos que

$$FS_aF^* = M_{E_{-a}}. \tag{2.7}$$

En efecto, sean $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(FS_af)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (S_af)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi\,\mathrm{i}\,x}\ \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi\,\mathrm{i}\,x}\ \mathrm{d}\mu(x).$$

Haciendo $u = x-a$, se tiene que $(FS_af)(\xi) = (E_{-a}Ff)(\xi)$, i.e., $FS_a = E_{-a}F$, lo cual equivale a (2.7).

Observación 2.7.1. Un operador $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ es llamado *multiplicador* de $L^2(\mathbb{R})$ si A conmuta con S_a para todo $a \in \mathbb{R}$. Se sabe que [17, Teorema 4.1.1] la transformada de Fourier–Plancherel convierte a cada multiplicador de $L^2(\mathbb{R})$ en un operador de multiplicación en $L^2(\mathbb{R})$. Luego, de (2.7), esto es equivalente al hecho de que los operadores de multiplicación que actúan en $L^2(\mathbb{R})$ se caracterizan a través de la conmutatividad con multiplicaciones por caracteres.

Proposición 2.7.2. *Sea $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ tal que $S_aA = AS_a$ para toda $a \in \mathbb{R}$. Entonces $FAF^* \in \mathcal{M}$.*

Demostración. Pongamos $B = FAF^*$. En virtud del Teorema 2.6.4, basta con ver que $BM_{E_{-a}} = M_{E_{-a}}B$, para todo $a \in \mathbb{R}$, donde $M_{E_{-a}}$ está dado por (2.7). Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$BM_{E_{-a}} = (FAF^*)(FS_aF^*) = FAS_aF^* = FS_aAF^* = (FS_aF^*)(FAF^*) = M_{E_{-a}}B,$$

luego, existe $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ tal que $B = M_b$, es decir, $FAF^* \in \mathcal{M}$. □

Capítulo 3

Diagonalización de los operadores invariantes bajo traslaciones

En este capítulo suponemos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor sobre el dominio $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, tal que es invariante bajo traslaciones horizontales, y estudiamos los operadores lineales acotados que actúan en $\mathcal{H}$ y conmutan con las traslaciones horizontales. Bajo ciertas condiciones adicionales construimos un operador unitario $R\colon \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ que "diagonaliza" a todos los operadores invariantes bajo traslaciones horizontales, es decir, los convierte en operadores de multiplicación.

En la Sección 3.1 introducimos la clase $\mathcal{V}$ de operadores que será nuestro objeto de estudio, a saber, todos los operadores lineales acotados que actúan en $\mathcal{H}$ y que conmutan con los operadores de traslación. Veremos además, ciertas consideraciones (suposiciones 1–5) que nos permitirán justificar resultados posteriores. En la Sección 3.2 nos enfocamos en la imagen del espacio $\mathcal{H}$ bajo la transformada de Fourier con respecto al primer argumento para, posteriormente, introducir una nueva álgebra de operadores $\mathcal{W}$ en dicha imagen y que será isométricamente isomorfa a $\mathcal{V}$, Sección 3.3. Mostramos en la Sección 3.4, el teorema principal de este trabajo, el cual es un criterio de conmutatividad del álgebra $\mathcal{V}$. En la Sección 3.5 mostramos los operadores unitarios que nos convertirán a los elementos de $\mathcal{V}$ en operadores de multiplicación. Finalmente, en la Sección 3.6, aplicamos nuestra construcción a operadores de Toeplitz con símbolos que dependen únicamente de la coordenada vertical.

Muchas ideas de este capítulo están basadas en trabajos del Dr. Vasilevski y de otros autores, pero en la forma actual fueron propuestas por los asesores de la tesis, Dres. Egor Maximenko y Crispin Herrera Yañez. Estas ideas fueron discutidas y verificadas en las reuniones del autor de la tesis con los asesores y con el M. en C. Gerardo Ramos Vázquez.

3.1. Transformada de Fourier del núcleo reproductor

En las primeras tres secciones de este capítulo vamos a introducir a nuestros objetos de estudio poco a poco, poniendo también algunas condiciones (Suposiciones 1–5).

Igual que en el Capítulo 2, denotemos por μ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y por F al isomorfismo de Fourier–Plancherel del espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Suposición 1. Sea $\mathcal{F}_\nu$ una σ-álgebra sobre $\mathbb{R}_+$ y sea $\nu\colon \mathcal{F}_\nu \to [0,+\infty]$ una medida σ-finita.

Denotamos por $\mu \times \nu$ al producto de las medidas μ y ν.

Suposición 2. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un EHNR sobre el dominio $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, con el producto interno inducido de $L^2(\Pi, \mu \times \nu)$. Denotemos por $(K_{(x,y)})_{(x,y)\in\Pi}$ al núcleo reproductor de $\mathcal{H}$.

En otras palabras, los elementos de $\mathcal{H}$ son funciones $\Pi \to \mathbb{C}$. Estas funciones son cuadrado integrables respecto a la medida $\mu \times \nu$ y cumplen con algunas otras propiedades, dependiendo del espacio $\mathcal{H}$. El producto interno en $\mathcal{H}$ está definido mediante la regla

$$\langle f\,,\,g\rangle \coloneqq \int_\Pi f(x,y)\overline{g(x,y)}\;\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Para cada función f, perteneciente al espacio $\mathcal{H}$, se cumple la propiedad de reproducción:

$$f(x,y) = \int_\Pi f(u,v)\overline{K_{(x,y)}(u,v)}\;\mathrm{d}\mu(u)\;\mathrm{d}\nu(v).$$

Suposición 3. Supongamos que el espacio $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones horizontales, esto es, si $f \in \mathcal{H}$, $a \in \mathbb{R}$ y $g(x,y) = f(x-a,y)$, entonces $g \in \mathcal{H}$.

Definición 3.1.1. Dado a en $\mathbb{R}$, denotemos por V_a al operador que actúa en $\mathcal{H}$ mediante la siguiente regla:

$$(V_a f)(x,y) \coloneqq f(x-a,y).$$

Proposición 3.1.2. *Para cada a en $\mathbb{R}$, el operador V_a es un operador unitario.*

Demostración. Gracias a la Suposición 3, el operador V_a está bien definido. Más aún, debido a que la medida de Lebesgue μ es invariante bajo traslaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}\|V_a f\|_{\mathcal{H}}^2 &= \int_\Pi |(V_a f)(x,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\;\mathrm{d}\nu(y) = \int_\Pi |f(x-a,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(x)\;\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_\Pi |f(u,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(u+a)\;\mathrm{d}\nu(y) = \int_\Pi |f(u,y)|^2\,\mathrm{d}\mu(u)\;\mathrm{d}\nu(y) = \|f\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

□

Sea $\widetilde{V}_a\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ el operador restricción de V_a tanto en el dominio como en el codominio.

Definición 3.1.3. Denotemos por $\mathcal{V}$ al conjunto de los operadores lineales acotados que actúan en $\mathcal{H}$ y conmutan con las traslaciones horizontales:

$$\mathcal{V} \coloneqq \{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon\quad \forall\, a \in \mathbb{R}\quad \widetilde{V}_a S = S\widetilde{V}_a\}.$$

Gracias a la propiedad $V_a V_b = V_{a+b} = V_b V_a$, las mismas traslaciones V_a pertenecen al conjunto $\mathcal{V}$. Además, de la Proposición 3.1.2, se tiene que $V_a^* = V_a^{-1} = V_{-a}$.

Proposición 3.1.4. *$\mathcal{V}$ es un álgebra W^*.*

Demostración. Notemos que $\mathcal{V}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, más aún, afirmamos que $\mathcal{V}$ es autoadjunta, luego es un álgebra C*. En efecto, si $A \in \mathcal{V}$, entonces $A^* V_a = (V_{-a}A)^* = (AV_{-a})^* = V_a A^*$, luego $A^* \in \mathcal{V}$.

Resta probar que es cerrada en la TDO. Sean $A \in \operatorname{clos}_{\text{TDO}}(\mathcal{V})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $(D_j)_{j\in\mathcal{J}}$ una red en $\mathcal{V}$ tal que converge a A en la TDO, i.e, $\lim\limits_{j\in\mathcal{J}} D_j = A$. Entonces, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle BAf\,,\,g\rangle &= \langle Af\,,\,B^*g\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}}\langle D_jf\,,\,B^*g\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}}\langle f\,,\,D_j^*B^*g\rangle \\ &= \lim_{j\in\mathcal{J}}\langle f\,,\,(BD_j)^*g\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}}\langle f\,,\,(D_jB)^*g\rangle = \lim_{j\in\mathcal{J}}\langle D_j(Bf)\,,\,g\rangle \\ &= \langle ABf\,,\,g\rangle,\end{aligned}$$

es decir, $A \in \mathcal{V}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es un álgebra C* cerrada en la TDO, de donde se sigue el resultado. $\square$

Nuestro objetivo es estudiar los operadores de la clase $\mathcal{V}$. Como se sabe, del análisis armónico, la transformada de Fourier es la herramienta principal para estudiar objetos invariantes bajo traslaciones. En nuestra situación, las traslaciones se aplican respecto a la dirección horizontal, por eso consideramos la transformada de Fourier en la dirección horizontal. Sea $\Phi\colon L^2(\Pi, \mu\times\nu) \to L^2(\Pi, \mu\times\nu)$,

$$(\Phi f)(\xi, y) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x). \tag{3.1}$$

Más precisamente, el operador Φ está definido por la fórmula (3.1) para funciones suaves de soporte compacto, sin embargo, debido a su propiedad isométrica, es posible extenderlo a un operador unitario en el espacio $L^2(\Pi, \mu\times\nu)$.

Notemos que el espacio $L^2(\Pi, \mu\times\nu)$ se puede ver como el producto tensorial de los espacios $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ y $L^2(\mathbb{R}_+, \nu)$, y a su vez el operador Φ se puede ver como el producto tensorial de la transformada de Fourier–Plancherel F por el operador identidad I:

$$\Phi \coloneqq F \otimes I.$$

En esta tesis no explicamos el concepto del producto tensorial de espacios de Hilbert y por eso evitamos usar la notación $F\otimes I$.

La Suposiciones 2 y 3 implican que el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{H}$ tiene la siguiente propiedad.

Proposición 3.1.5. *Para cualesquiera x, u en $\mathbb{R}$, y, v en $\mathbb{R}_+$, se tiene que*

$$K_{(x,y)}(u,v) = K_{(0,y)}(u-x, v). \tag{3.2}$$

Demostración. Basta con aplicar la propiedad reproductora en el lado derecho en (3.2), esto es

$$\begin{aligned} K_{(0,y)}(u-x,v) &= (V_x K_{0,y})(u,v) = \langle\, V_x K_{0,y}\,,\, K_{u,v}\,\rangle \\ &= \langle\, K_{0,y}\,,\, V_{-x} K_{u,v}\,\rangle = \overline{\langle\, V_{-x} K_{u,v}\,,\, K_{0,y}\,\rangle} \\ &= \overline{(V_{-x} K_{u,v})(0,y)} = \overline{K_{u,v}(x,y)} \\ &= K_{x,y}(u,v). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.6. *Para cualesquiera $a, x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$,*

$$V_a K_{x,y} = K_{a+x,y}. \tag{3.3}$$

Demostración. En virtud de la Proposición 3.1.5,

$$(V_a K_{x,y})(u,v) = K_{x,y}(u-a,v) = K_{0,y}(u-x-a,v) = K_{x+a,y}(u,v).$$

□

Apliquemos entonces el operador Φ al núcleo reproductor. Gracias a la Proposición 3.1.5, es suficiente trabajar con $K_{(0,y)}$. Sin embargo, para que la transformada de Fourier de $K_{(0,y)}$ esté bien definida en cada punto y sea continua respecto al primer argumento, pongamos una suposición adicional:

Suposición 4. Supongamos que para cada y, v en $\mathbb{R}_+$,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_{(0,y)}(u,v)| \ \mathrm{d}\mu(u) < +\infty,$$

y para cada $y \in \mathbb{R}_+$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}} |K_{(0,y)}(u,v)| \ \mathrm{d}\mu(u) \right)^2 \ \mathrm{d}\nu(v) < +\infty.$$

Denotemos el último supremo por κ_y.

Definición 3.1.7. Para cualesquiera ξ en $\mathbb{R}$ y y en $\mathbb{R}_+$, definimos $L_{\xi,y} \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$L_{\xi,y}(v) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\, K_{(0,y)}(u,v) \ \mathrm{d}\mu(u).$$

En otras palabras,

$$L_{\xi,y}(v) = (\Phi K_{(0,y)})(\xi, v).$$

Finalmente, pongamos una condición adicional sobre L:

Suposición 5. Supongamos que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} |L_{\xi,y}(v)|^2 \ \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}\mu(v) < +\infty.$$

Denotemos a este supremo por C.

Mostremos que la función L tiene propiedad hermítica en el siguiente sentido.

Proposición 3.1.8. *Sean $\xi \in \mathbb{R}$, $y, v \in \mathbb{R}_+$. Entonces*

$$L_{\xi,v}(y) = \overline{L_{\xi,y}(v)}.$$

Demostración. Empezamos con la definición de L y hacemos el cambio de variable $t = -u$:

$$\begin{aligned}\overline{L_{\xi,y}(v)} &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\, \overline{K_{(0,v)}(u,y)}\ \mathrm{d}\mu(u)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}\, \overline{K_{(0,v)}(-t,y)}\ \mathrm{d}\mu(t).\end{aligned}$$

Luego notamos que $\overline{K_{(0,v)}(-t,y)} = K_{(-t,y)}(0,v) = K_{(0,y)}(t,v)$, por la propiedad hermítica de K y por la Proposición 3.1.5. □

3.2. La imagen del EHNR después de aplicar la transformada de Fourier

Sea $P\colon L^2(\Pi, \mu\times\nu) \to L^2(\Pi, \mu\times\nu)$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}$:

$$(Pf)(x,y) \coloneqq \langle\, f\,,\, K_{x,y}\,\rangle = \int_{\Pi} f(u,v)\overline{K_{(x,y)}(u,v)}\ \mathrm{d}\mu(u)\,\mathrm{d}\nu(v).$$

Usando la Proposición 3.1.5, podemos escribir P en la siguiente forma:

$$(Pf)(x,y) \coloneqq \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} f(u,v)K_{0,v}(x-u,y)\ \mathrm{d}\mu(u)\ \mathrm{d}\nu(v). \tag{3.4}$$

Ahora la integral interior se ve como una convolución, de tal manera que resulta natural esperar que la expresión se simplifique al aplicar la transformada de Fourier.

Proposición 3.2.1. *Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, $PV_a = V_aP$.*

Demostración. Sean $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Pi)$ y $(x,y) \in \Pi$. En virtud del Corolario 3.1.6 y de la definición de P,

$$\begin{aligned}(V_aPf)(x,y) &= (Pf)(x-a,y) = \langle\, f\,,\, K_{x-a,y}\,\rangle\\ &= \langle\, f\,,\, V_{-a}K_{x,y}\,\rangle = \langle\, V_af\,,\, K_{x,y}\,\rangle = (PV_af)(x,y).\end{aligned}$$

□

Definición 3.2.2. Denotemos por $\widehat{\mathcal{H}}$ al espacio $\Phi(\mathcal{H})$ que se obtiene al aplicar al espacio $\mathcal{H}$ la transformada de Fourier respecto a la primera variable, y denotemos por $\widehat{P}$ al operador $\Phi P\Phi^*$, es decir,

$$\widehat{\mathcal{H}} \coloneqq \Phi(\mathcal{H}), \qquad\qquad \widehat{P} \coloneqq \Phi P\Phi^*.$$

Proposición 3.2.3. *$\widehat{P}$ es una proyección ortogonal en $L^2(\Pi, \mu\times\nu)$, y su imagen es $\widehat{\mathcal{H}}$.*

Demostración. En efecto,

$$\widehat{P}^2 = \Phi P \Phi^* \Phi P \Phi^* = \Phi P \Phi^* = \widehat{P}$$

y

$$\widehat{P}^* = (\Phi^*)^* P^* \Phi^* = \widehat{P},$$

así que $\widehat{P}$ es una proyección ortogonal.

Si $g \in \widehat{P}(L^2(\Pi, \mu \times \nu)$, entonces

$$g = \widehat{P} g = \Phi(P \Phi^* g) \in \Phi(H).$$

Si ahora, $g \in \Phi(H)$, entonces $\Phi^* g \in H$, y

$$\widehat{P} g = \Phi P \Phi^* g = \Phi \Phi^* g = g. \qquad \square$$

Mostremos que el operador $\widehat{P}$ se puede calcular en términos de las funciones $L_{\xi,y}$ introducidas en la Definición 3.1.7.

Proposición 3.2.4. *Para cualquier g en $L^2(\Pi, \mu \times \nu)$ y para casi todos $\xi \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$,*

$$(\widehat{P} g)(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}_+} g(\xi, v) \overline{L_{\xi,y}(v)} \, \mathrm{d}\nu(v). \tag{3.5}$$

En otras palabras,

$$(\widehat{P} g)(\xi, y) = \langle\, g(\xi, \cdot)\, ,\, L_{\xi,y} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)}. \tag{3.6}$$

Demostración. Denotemos por A al operador lineal definido por el lado derecho de (3.5):

$$(Ag)(\xi, y) := \int_{\mathbb{R}_+} g(\xi, v) \overline{L_{\xi,y}(v)} \, \mathrm{d}\nu(v).$$

Recordemos que κ_y y C son los supremos de las Suposiciones 4 y 5, respectivamente.

1. Mostremos primero que el operador A es acotado. Por la desigualdad de Schwarz,

$$|(Ag)(\xi, y)| \leq \|g(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)} \|L_{\xi,y}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)}.$$

Tomamos ahora el cuadrado en ambas partes de esta desigualdad e integramos sobre Π. Aplicamos el teorema de Tonelli y la Suposición 5:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} |(Ag)(\xi, y)|^2 \, \mathrm{d}\nu(y) \, \mathrm{d}\mu(\xi) \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} \|g(\xi, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|L_{\xi,y}\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)} \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(\xi) \\
&\qquad \leq C \int_{\mathbb{R}} \|g(\xi, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, \nu)} \, \mathrm{d}\mu(\xi) \\
&\qquad = C \|g\|_{L^2(\Pi, \mu \times \nu)}.
\end{aligned}$$

Luego, $A \in \mathcal{B}(L^2(\Pi, \mu \times \nu))$, más aún $\|A\| \leq \sqrt{C}$.

2. Nuestro objetivo es demostrar que $\widehat{P} = A$, es decir, $\Phi P = A\Phi$. Como ΦP y $A\Phi$ son operadores lineales continuos, es suficiente mostrar que $\Phi P f = A\Phi f$ para cualquier f que pertenezca a algún subconjunto denso de $L^2(\Pi, \mu \times \nu)$. Vamos a suponer pues, que f es acotada y se anula fuera de un rectángulo de la forma $X \times Y$, donde $\mu(X) < +\infty$ y $\nu(Y) < +\infty$. Se sabe [24, Teorema 3.13] que las funciones con estas propiedades forman un subconjunto denso en $L^2(\Pi, \mu\times\nu)$. Acotemos la siguiente integral triple:

$$J := \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u,v)|\,|K_{(x,y)}(u,v)|\ \mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(u)\,\mathrm{d}\nu(v).$$

Primero escribimos $|K_{(x,y)}(u,v)|$ como $|K_{(0,v)}(x-u,y)|$, hacemos el cambio de variable $t = x - u$ y aplicamos el teorema de Tonelli:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u,v)|\,|K_{(0,y)}(t,v)|\ \mathrm{d}\mu(t)\,\mathrm{d}\mu(u)\,\mathrm{d}\nu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} |f(u,v)| \left(\int_{\mathbb{R}} |K_{(0,y)}(t,v)|\ \mathrm{d}\nu(t) \right) \mathrm{d}\nu(v)\,\mathrm{d}\mu(u). \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Schwarz (en la integral sobre v), y la Suposición 4:

$$J \le \kappa_y \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(u,v)|^2\ \mathrm{d}\nu(v) \right) \mathrm{d}\mu(u).$$

Debido a las suposiciones sobre f, la última expresión es finita.

3. Finalmente, verifiquemos que $\Phi P f = A\Phi f$, aplicando el teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} (\Phi P f)(\xi,y) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, f(u,v)\overline{K_{(x,y)}(u,v)}\ \mathrm{d}\nu(v)\,\mathrm{d}\mu(u)\,\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\, f(u,v) \\ &\qquad\qquad \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}(x-u)}\, K_{(0,v)}(x-u,y)\ \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\mu(u)\,\mathrm{d}\nu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (\Phi f)(\xi,v) L_{\xi,v}(y)\ \mathrm{d}\nu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (\Phi f)(\xi,v)\overline{L_{\xi,y}(v)}\ \mathrm{d}\nu(v) = (A\Phi f)(\xi,v). \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad aplicamos la propiedad hermítica de L (Proposición 3.1.8). □

Corolario 3.2.5. *Para cualquier g en $\widehat{\mathcal{H}}$ y para casi todos $\xi \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_+$,*

$$g(\xi,y) = \langle\, g(\xi,\cdot)\,,\ L_{\xi,y} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+,\nu)} = \int_{\mathbb{R}_+} g(\xi,v)\overline{L_{\xi,y}(v)}\ \mathrm{d}\nu(v). \tag{3.7}$$

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.4. □

Observación 3.2.6. Notemos que la integral (3.7) es sobre $\mathbb{R}_+$, no sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, luego, no es posible hablar de una propiedad reproductora y por consiguiente, $\widehat{\mathcal{H}}$ no es un EHNR. No obstante, bajo ciertas condiciones que veremos más adelante, podremos ver a $\widehat{\mathcal{H}}$ como tal.

Proposición 3.2.7. *Para cualesquiera y, v en $\mathbb{R}_+$ y para cualquier ξ en $\mathbb{R}$,*

$$L_{\xi,y}(v) = \langle\, L_{\xi,y}\,,\, L_{\xi,v}\,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.8}$$

Demostración. Basta tomar $g(\xi, y) := L_{\xi,y}(v) = (\Phi K_{(0,y)})(\xi, v)$, la cual pertenece a $\widehat{\mathcal{H}}$, y aplicar el Corolario 3.2.5. □

Proposición 3.2.8. *Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y para toda $y \in \mathbb{R}_+$,*

$$L_{\xi,y}(y) = \|L_{\xi,y}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |L_{\xi,y}(v)|^2\, \mathrm{d}\nu(v). \tag{3.9}$$

Demostración. Basta con aplicar la fórmula (3.8) con $v = y$. □

Definición 3.2.9. Dado $\xi \in \mathbb{R}$, definimos el operador $\widehat{P}_\xi \colon L^2(\mathbb{R}_+) \to L^2(\mathbb{R}_+)$, mediante la regla

$$(\widehat{P}_\xi h)(y) := \langle\, h\,,\, L_{\xi,y}\,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.10}$$

Proposición 3.2.10. *Para todo $\xi \in \mathbb{R}$, el operador $\widehat{P}_\xi$ es una proyección ortogonal.*

Demostración. 1. Sea $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Mostremos primero que $\widehat{P}_\xi^2 = \widehat{P}_\xi$, aplicando la Proposición 3.2.7 y el teorema de Fubini.

$$\begin{aligned}
(\widehat{P}_\xi^2 h)(y) &= (\widehat{P}_\xi(\widehat{P}_\xi h))(y) = \langle\, \widehat{P}_\xi h\,,\, L_{\xi,y}\,\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{P}_\xi h(v)\, \overline{L_{\xi,y}(v)}\, \mathrm{d}\nu(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{\mathbb{R}_+} h(w)\, \overline{L_{\xi,v}(w)}\, \mathrm{d}\nu(w)\right] \overline{L_{\xi,y}(v)}\, \mathrm{d}\nu(v)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h(w) \left[\int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,w}(v)\, \overline{L_{\xi,y}(v)}\, \mathrm{d}\nu(v)\right] \mathrm{d}\nu(w)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h(w)\, L_{\xi,w}(y)\, \mathrm{d}\nu(w) = \int_{\mathbb{R}_+} h(w)\, \overline{L_{\xi,y}(w)}\, \mathrm{d}\nu(w)\\
&= \langle\, h\,,\, L_{\xi,y}\,\rangle = (\widehat{P}_\xi)(y).
\end{aligned}$$

2. Sean ahora $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Mostremos que $\widehat{P}_\xi^* = \widehat{P}_\xi$. En virtud de la Proposición 3.1.8 y aplicando nuevamente el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle\, \widehat{P}_\xi h_1\,,\, h_2\,\rangle &= \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{P}_\xi h_1(y)\, \overline{h_2(y)}\, \mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \left[\int_{\mathbb{R}_+} h_1(v)\, \overline{L_{\xi,y}(v)}\, \mathrm{d}\nu(v)\right] \overline{h_2(y)}\, \mathrm{d}\nu(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} h_1(v) \overline{\left[\int_{\mathbb{R}_+} h_2(y)\, \overline{L_{\xi,v}(y)}\, \mathrm{d}\nu(y)\right]}\, \mathrm{d}\nu(v) = \int_{\mathbb{R}_+} h_1(v)\, \overline{\widehat{P}_\xi h_2(v)}\, \mathrm{d}\nu(v)\\
&= \langle\, h_1\,,\, \widehat{P}_\xi h_2\,\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{P}_\xi^2 = \widehat{P}_\xi$ y $\widehat{P}_\xi^* = \widehat{P}_\xi$, es decir, $\widehat{P}_\xi$ es una proyección ortogonal. □

Definición 3.2.11. Sea $\xi \in \mathbb{R}$, definimos

$$\widehat{\mathcal{H}}_\xi := \widehat{P}_\xi(L^2(\mathbb{R}_+, \nu)).$$

Proposición 3.2.12. *La familia de funciones* $(L_{\xi,y})_{y\in\mathbb{R}_+}$ *es un núcleo reproductor en* $\widehat{\mathcal{H}}_\xi$*, el cual es un subespacio cerrado de* $L^2(\mathbb{R}_+, \nu)$*, generado por* $\{L_{\xi,y} : y \in \mathbb{R}_+\}$*.*

Demostración. Es inmediato que $\widehat{\mathcal{H}}_\xi$ es subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}_+, \nu)$, puesto que es imagen de la proyección ortogonal $\widehat{P}_\xi$, más aún, es completo. Entonces, si $h \in \widehat{\mathcal{H}}_\xi$,

$$h(y) = (\widehat{P}_\xi)(y) = \langle\, h\, ,\, L_{\xi,y}\, \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}. \tag{3.11}$$

Lo cual significa que la familia $(L_{\xi,y})_{y\in\mathbb{R}_+}$ es un núcleo reproductor de $\widehat{\mathcal{H}}_\xi$. Finalmente, en virtud de la Proposición 1.1.10, el subespacio generado por el núcleo reproductor coincide con el espacio de Hilbert correspondiente, es decir,

$$\widehat{\mathcal{H}}_\xi = \overline{\operatorname{span}\left(\{L_{\xi,y} : y \in \mathbb{R}_+\}\right)}. \qquad \square$$

Proposición 3.2.13. *Para todo* $\xi \in \mathbb{R}$*,*

$$\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,y}(y)\, \mathrm{d}\nu(y). \tag{3.12}$$

Demostración. En virtud de que $(L_{\xi,y})_{y\in\mathbb{R}_+}$ es un núcleo reproductor, basta con aplicar la Proposición 1.3.2. $\square$

3.3. Operadores invariantes bajo traslaciones en $\mathcal{H}$

Dado $a \in \mathbb{R}$, denotemos por W_a al producto tensorial $M_{E_a} \otimes I$, i.e. el operador que actúa en $L^2(\Pi)$ mediante la regla

$$(W_a g)(\xi, y) := E_a(\xi) g(\xi, y). \tag{3.13}$$

Proposición 3.3.1. *Para cada* $a \in \mathbb{R}$*, el operador* W_a *tiene las propiedades siguientes:*

(i) $\Phi V_a \Phi^* = W_{-a}$.

(ii) W_a *es un operador unitario en* $L^2(\Pi)$*.*

(iii) $\widehat{\mathcal{H}}$ *es un subespacio invariante de* W_a*.*

Demostración. Recordemos que $E_a(\xi) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, a\xi}$, luego

(i) Basta con demostrar que $\Phi V_a = W_{-a}\Phi$ para algún subconjunto denso de $\mathcal{H}$. En efecto, sea $f \in L^2(\Pi) \cap L^1(\Pi)$ arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned}(\Phi V_a f)(\xi, y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, f(x-a, y)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi(u+a)}\, f(u, y)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}\, f(u, y)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi a}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}(-a)\xi}\, \Phi f(\xi, y) \\ &= (W_{-a}\Phi f)(\xi, y)\end{aligned}$$

(ii) De la definición de Φ y de la Proposición 3.1.2, se tiene que W_a es producto de operadores unitarios, luego, W_a es unitario.

(iii) Veamos que para todo $a \in \mathbb{R}$, $W_a\widehat{\mathcal{H}} \subseteq \widehat{\mathcal{H}}$. Notemos que si $g \in \widehat{\mathcal{H}}$, entonces $\widehat{P}g = g$; luego, en virtud de la Proposición 3.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}\widehat{P}W_a g &= (\Phi P \Phi^*)(\Phi V_{-a}\Phi^*)g = \Phi P V_{-a}\Phi^* g = \Phi V_{-a} P \Phi^* g\\ &= (\Phi V_{-a}\Phi^*)(\Phi P \Phi^*)g = W_a \widehat{P} g = W_a g.\end{aligned}$$

□

Dado $a \in \mathbb{R}$, sea el operador $\widetilde{W}_a \colon \widehat{\mathcal{H}} \to \widehat{\mathcal{H}}$, definido por $\widetilde{W}_a g := W_a g$. En otras palabras, $\widetilde{W}_a$ es la restricción de W_a, tanto en el dominio como en el codominio al subespacio invariante $\widehat{\mathcal{H}}$.

Así pues, denotemos por $\mathcal{W}$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados que actúan en $\widehat{\mathcal{H}}$ y conmutan con W_a, para todo $a \in \mathbb{R}$, esto es

$$\mathcal{W} := \{A \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})\colon\ \forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{W}_a A = A \widetilde{W}_a\}$$

Asimismo, sea $\widetilde{\Phi} \colon \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ el operador unitario tal que $\widetilde{\Phi} f = \Phi f$ para toda $f \in \mathcal{H}$, es decir, $\widetilde{\Phi}$ es la restricción de Φ tanto en el dominio como en el codominio.

Proposición 3.3.2. *$\widetilde{\Phi}\mathcal{V}\widetilde{\Phi}^* = \mathcal{W}$, esto es, si $A \in \mathcal{V}$, entonces $\widetilde{\Phi}A\widetilde{\Phi}^* \in \mathcal{W}$, y si $B \in \mathcal{W}$, entonces $\widetilde{\Phi}^* B \widetilde{\Phi} \in \mathcal{V}$. En particular, las álgebras W^* $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son isométricamente isomorfas.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.3.1 y de la definición de $\mathcal{V}$. □

3.4. Criterio de conmutatividad

Denotemos por Ω al subconjunto de $\mathbb{R}$ siguiente:

$$\Omega := \{\xi \in \mathbb{R}\colon\ \dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) > 0\}.$$

Lema 3.4.1. *El conjunto Ω es abierto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\xi \in \Omega$. Entonces encontramos $y_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $L_{\xi,y_0} \neq 0$, es decir, $L_{\xi,y_0}(y_0) \neq 0$. Como la función definida en $\mathbb{R}_+$ tal que $\eta \mapsto L_{\eta,y_0}(y_0)$ es continua, encontramos ahora una vecindad $\mathcal{N}$ de ξ tal que para cada η se cumple que $L_{\eta,y_0}(y_0) \neq 0$, luego, $\widehat{\mathcal{H}}_\xi \neq \{0\}$, i.e. $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) > 0$. □

Teorema 3.4.2. *Si se satisfacen las Suposiciones 1–5, entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

(a) Para todo $\xi \in \mathbb{R}$, $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) \leq 1$.

(b) Para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y para todos $y, v \in \mathbb{R}_+$,

$$|L_{\xi,y}(v)|^2 = L_{\xi,y}(y)\, L_{\xi,v}(v). \tag{3.14}$$

(c) Existe una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ *en* $L^2(\mathbb{R}_+,\nu)$ *tal que la función* $\Omega\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$, *donde* $(\xi,v)\mapsto q_\xi(v)$, *es medible; y para todo* $\xi\in\mathbb{R}$ *y para todos* $y,v\in\mathbb{R}_+$,

$$L_{\xi,y}(v)=\overline{q_\xi(y)}\,q_\xi(v). \tag{3.15}$$

Demostración. $(b)\Rightarrow(a)$: Supongamos que se cumple (3.14), entonces

$$|\langle\, L_{\xi,y}\;,\;L_{\xi,v}\,\rangle|^2=\|L_{\xi,y}\|^2\,\|L_{\xi,v}\|^2\,,$$

luego, de la desigualdad de Schwarz, se desprende la igualdad, es decir, $L_{\xi,y}$ y $L_{\xi,v}$ son linealmente dependientes. Como los elementos y,v son arbitrarios y el conjunto $\{L_{\xi,y}\colon y\in\mathbb{R}_+\}$ es un sistema total en $\widehat{\mathcal{H}}_\xi$, se concluye que $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi)\leq 1$.

$(c)\Rightarrow(b)$: Supongamos ahora que se cumple (3.15), luego,

$$|L_{\xi,y}(v)|^2=|q_\xi(y)|^2|q_\xi(v)|^2=L_{\xi,y}(y)L_{\xi,v}(v).$$

$(a)\Rightarrow(c)$: Si $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi)=0$, basta con tomar $q_\xi(v)=0$ para todo $v\in\mathbb{R}_+$. Supongamos pues que $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi)=1$. Mediante un razonamiento análogo a la demostración del Lema 3.4.1, para cada $\xi\in\Omega$ encontramos un punto $y_\xi\in\mathbb{R}_+$ y una vecindad $\mathcal{N}_\xi$ del punto ξ tales que, para todo $\eta\in\mathcal{N}_\xi$, $L_{\eta.y_\xi}(y_\xi)\neq 0$. Notemos que la familia $(\mathcal{N}_\xi)_{\xi\in\Omega}$ es una cubierta abierta de Ω. Por otra parte, como Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}$, se tiene que Ω es segundo numerable, luego, es un espacio de Lindelöf [19, Teorema 30.3]. Por lo tanto, es posible hallar una subcubierta numerable $(\mathcal{N}_{\xi_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de Ω. Pongamos ahora

$$Y_k:=\mathcal{N}_{\xi_k}\setminus\left(\bigcup_{j<k}\mathcal{N}_{\xi_j}\right),$$

luego, Y_k es una partición de Ω. Dado $\eta\in\Omega$, encontramos $k\in\mathbb{N}$ tal que $\eta\in Y_k$. Definamos ahora la función q_η mediante la regla

$$q_\eta(v):=\frac{L_{\eta,y_{\xi_k}}(v)}{\left\|L_{\eta,y_{\xi_k}}\right\|}=\frac{L_{\eta,y_{\xi_k}}(v)}{\sqrt{L_{\eta,y_{\xi_k}}(y_{\xi_k})}}.$$

Notemos que para cada $y\in\mathbb{R}_+$, la función $Y_k\to L^2(\mathbb{R}_+)$ tal que $\eta\mapsto q_\eta$ es continua en Y_k, así, por Tonelli-Fubini, la función $(\eta,v)\mapsto L_{\eta,y_{\xi_k}}$ es medible en $Y_k\times\mathbb{R}_+$, para todo $k\in\mathbb{N}$, luego es medible en su unión $\Omega\times\mathbb{R}_+$. Por tanto, la función $(\eta,v)\mapsto q_\eta(v)$ es medible en $\Omega\times\mathbb{R}_+$. Finalmente, si $y\in\mathbb{R}_+$, entonces la función $L_{\eta,y}$ es un múltiplo de la función $L_{\eta,y_{\xi_k}}$, para algún $k\in\mathbb{N}$, de tal manera que

$$L_{\eta,y}(v)=\frac{\langle\, L_{\eta,y}\;,\;L_{\eta,y_{\xi_k}}\,\rangle}{\left\|L_{\eta,y_{\xi_k}}\right\|^2}L_{\eta,y_{\xi_k}}(v)=\frac{\overline{L_{\eta,y_{\xi_k}}(y)}\,L_{\eta,y_{\xi_k}}(v)}{\left\|L_{\eta,y_{\xi_k}}\right\|^2}=\overline{q_\eta(y)}\,q_\eta(v).$$

□

Observación 3.4.3. Si se satisfacen las Suposiciones 1–5 y el Teorema 3.4.2, entonces, para cada $\xi\in\mathbb{R}$, la función q_ξ está determinada de manera única por una constante.

Recordemos que $\mathcal{V}$ es el álgebra W* de operadores lineales acotados invariantes bajo traslaciones en $\mathcal{H}$. A continuación mostraremos que si $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) > 1$ para algún ξ en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{V}$ es no conmutativa. Sin embargo, en virtud de la Proposición 3.3.2, basta con probar que $\mathcal{W}$ es no conmutativa.

Lema 3.4.4. *Sean $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in Y$ tales que las funciones L_{ξ_0,y_1} y L_{ξ_0,y_2} son linealmente independientes. Entonces, existe una vecindad abierta U de ξ_0 tal que, para todo ξ en U, las funciones L_{ξ,y_1} y L_{ξ,y_1} son linealmente independientes.*

Demostración. Sea $h(\xi)$ el determinante de Gram de las funciones L_{ξ,y_1} y L_{ξ,y_2}. En otras palabras, definamos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$\begin{aligned} h(\xi) &:= \det \begin{bmatrix} \langle\, L_{\xi,y_1} \,,\, L_{\xi,y_1} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} & \langle\, L_{\xi,y_1} \,,\, L_{\xi,y_2} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ \langle\, L_{\xi,y_2} \,,\, L_{\xi,y_1} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} & \langle\, L_{\xi,y_2} \,,\, L_{\xi,y_2} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} L_{\xi,y_1}(y_1) & L_{\xi,y_1}(y_2) \\ L_{\xi,y_2}(y_1) & L_{\xi,y_2}(y_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Debido a que las entradas de la matriz anterior son funciones continuas de ξ, la función h es continua. Más aún, para la independencia lineal de las funciones L_{ξ,y_1} y L_{ξ,y_2} es necesario y suficiente que $h(\xi) \neq 0$. Esto demuestra el lema. □

Proposición 3.4.5. *Sean ξ_0, y_1 y y_2 como en el Lema 3.4.4. Pongamos*

$$c_\xi := \begin{cases} \dfrac{1}{\|L_{\xi,y_1}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|L_{\xi,y_2}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}}, & \text{si } \|L_{\xi,y_1}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|L_{\xi,y_2}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \neq 0; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definamos $A, B \colon \widehat{\mathcal{H}} \to \widehat{\mathcal{H}}$ mediante

$$(Ag)(\xi, y) := c_\xi\, g(\xi, y_2)\, L_{\xi,y_1}(y), \qquad (Bg)(\xi, y) := c_\xi\, g(\xi, y_1)\, L_{\xi,y_2}(y).$$

Entonces $A, B \in \mathcal{W}$ y $AB \neq BA$.

Demostración. 1. Supongamos que $g \in \widehat{\mathcal{H}}$. Afirmamos que $Ag \in L^2(\Pi)$ y $\|Ag\|_2 \leq \|g\|_2$. En efecto, si $c_\xi \neq 0$, entonces

$$|(Ag)(\xi, y)| \leq c_\xi \,\|g(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \,\|L_{\xi,y_2}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \,|L_{\xi,y_1}(y)| = \frac{\|g(\xi, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \,|L_{\xi,y_1}|}{\|L_{\xi,y_1}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}},$$

luego,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |(Ag)(\xi, y)|^2 \,\mathrm{d}\nu(y) \leq \|g(\xi, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

y $\|Ag\|_2 \leq \|g\|_2$.

2. Supongamos que $g \in \widehat{\mathcal{H}}$. Veamos que $Ag \in \widehat{\mathcal{H}}$. Si $c_\xi \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} (\widehat{P}Ag)(\xi, z) &= \langle\, Ag(\xi, \cdot) \,,\, L_{\xi,z} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = c_\xi g(\xi, y_2) \langle\, L_{\xi,y_1} \,,\, L_{\xi,z} \,\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} \\ &= c_\xi g(\xi, y_2) L_{\xi,y_1}(z) = (Ag)(\xi, z). \end{aligned}$$

Si $c_\xi = 0$, es inmediato que la igualdad se satisface. Por tanto, $\widehat{P}Ag = Ag$, i.e. $Ag \in \widehat{\mathcal{H}}$.

3. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $g \in \widehat{\mathcal{H}}$. Entonces

$$(AW_a g)(\xi, y) = c_\xi g(\xi, y_2) L_{\xi,y_1}(y) E(a, \xi) = (W_a A g)(\xi, y),$$

así que $AW_a = W_a A$.

Lo anterior demuestra que $A \in \mathcal{W}$. De manera análoga se puede demostrar que $B \in \mathcal{W}$.

4. Probemos ahora que $AB \neq BA$. Para cualesquiera $g \in \widehat{\mathcal{H}}$ y $\xi \in \mathbb{R}$, tales que $c_\xi \neq 0$, se tiene que

$$(ABg)(\xi, y) = \frac{g(\xi, y_1) L_{\xi,y_1}(z)}{L_{\xi,y_1}(y_1)}, \qquad (BAg)(\xi, y) = \frac{g(\xi, y_2) L_{\xi,y_2}(z)}{L_{\xi,y_2}(y_2)}.$$

Notemos que de la condición de que L_{ξ_0,y_1} y L_{ξ_0,y_2} son linealmente independientes, se tiene que $h(\xi_0) \neq 0$, donde h está definida por (3.16). Sean α y β en $\mathbb{C}$ tales que

$$\begin{bmatrix} L_{\xi_0,y_1}(y_1) & L_{\xi_0,y_2}(y_1) \\ L_{\xi_0,y_1}(y_2) & L_{\xi_0,y_2}(y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego, se tiene que

$$\alpha L_{\xi_0,y_1}(y_1) + \beta L_{\xi_0,y_2}(y_1) \neq 0, \qquad \alpha L_{\xi_0,y_1}(y_2) + \beta L_{\xi_0,y_2}(y_2) \neq 0. \tag{3.17}$$

Definamos $g_0 \colon \Pi \to \mathbb{C}$ por

$$g_0(\xi, z) := \alpha L_{\xi,y_1}(z) + \beta L_{\xi,y_2}(z).$$

Es evidente que $g_0 \in \widehat{\mathcal{H}}$ puesto que es una combinación lineal de las funciones $(\xi, z) \mapsto L_{\xi,y_1}(z)$ y $(\xi, z) \mapsto L_{\xi,y_2}(z)$, además las desigualdades (3.17) implican que $g_0(\xi, y_1) \neq 0$ y $g_0(\xi, y_2) \neq 0$. Ya que c_ξ y $g_0(\xi, z)$ dependen continuamente de ξ, es posible hallar una vecindad U de ξ_0 tal que para todo ξ en U

$$c_\xi \neq 0, \qquad g_0(\xi, y_1) \neq 0, \qquad g_0(\xi, y_2) \neq 0.$$

Afirmamos que $ABg_0 \neq BAg_0$. En efecto, si $ABg_0 = BAg_0$, entonces para casi todo ξ en U se tendrían las igualdades de funciones siguientes:

$$\frac{g_0(\xi, y_1)}{L_{\xi,y_1}(y_1)} L_{\xi,y_1} = \frac{g_0(\xi, y_2)}{L_{\xi,y_2}(y_2)} L_{\xi,y_2}.$$

Por lo tanto, para casi todo ξ en U, las funciones L_{ξ,y_1} y L_{ξ,y_2} son linealmente dependientes, lo cual contradice el Lema 3.4.4. □

3.5. Diagonalización de operadores invariantes bajo traslaciones

Recordemos que Ω es el conjunto de todos los ξ en $\mathbb{R}$ tales que $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) > 0$. En otras palabras, por la Proposición 3.2.13, es posible escribir tal conjunto de la manera siguiente:

$$\Omega = \left\{ \xi \in \mathbb{R} \colon \int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,y}(y)\, \mathrm{d}\nu(y) > 0 \right\}. \tag{3.18}$$

Supongamos que para cada ξ en Ω, q_ξ es una función tal que satisface la condición (c) del Teorema 3.4.2. Notemos que q_ξ está normalizada, es decir,

$$\|q_\xi\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} |q_\xi(v)|^2 \,\mathrm{d}\nu(v) = \int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,v}(v) \,\mathrm{d}\nu(v) = \dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) = 1. \tag{3.19}$$

Además, si $g \in \widehat{\mathcal{H}}$, para cada ξ en Ω la función $g_\xi(\xi, \cdot)$ pertenece a $\widehat{\mathcal{H}}_\xi$ y es un múltiplo de q_ξ, i.e. $g(\xi, v) = h(\xi)q_\xi(v)$ para alguna $h \in L^2(\Omega)$. Denotemos por N a la correspondencia $h \mapsto g$, de tal manera que h podrá ser reconstruida de g a través de N^*. En otras palabras, definimos $N\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Pi)$, mediante la regla

$$(Nh)(\xi, y) := \begin{cases} q_\xi(y)h(\xi), & \xi \in \Omega; \\ 0, & \xi \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Proposición 3.5.1. *El operador N es una isometría lineal, y su adjunto $N^*\colon L^2(\Pi) \to L^2(\Omega)$ está dado por:*

$$(N^*w)(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{q_\xi(v)} w(\xi, v) \,\mathrm{d}\nu(v). \tag{3.21}$$

Más aún, $NN^* = \widehat{P}$ y $N(L^2(\Omega)) = \widehat{\mathcal{H}}$.

$$\begin{tikzcd}
L^2(\Pi) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "P"'] & L^2(\Pi) \arrow[r, "N^*"] \arrow[d, "\widehat{P}"'] & L^2(\Omega) \arrow[d, "I"'] \\
L^2(\Pi) & L^2(\Pi) \arrow[l, "\Phi^*"'] & L^2(\Omega) \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Relaciones entre los operadores Φ, N, P, $\widehat{P}$, R.

Demostración. Veamos primero que N es una isometría. En efecto, debido a la propiedad (3.19), se tiene que

$$\|Ng\|^2_{L^2(\Pi)} = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} |q_\xi(y)|^2 \, |g(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int_\Omega |g(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\mu(\xi) = \|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sea T el operador definido por el lado derecho de (3.21). Mostraremos que $N^* = T$. Sean $g \in L^2(\Omega)$ y $w \in L^2(\Pi)$. Aplicando el teorema de Tonelli y la desigualdad de

Schwarz se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} |g(\xi)|\,|q_\xi(y)|\,|w(\xi,y)|\,\mathrm{d}(\nu\times\mu)(y,\xi)\\
&\qquad = \int_\Omega |g(\xi)| \left(\int_{\mathbb{R}_+} |q_\xi(y)|\,|w(\xi,y)|\,\mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(\xi)\\
&\qquad \le \int_\Omega |g(\xi)|\,\|q_\xi\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\,\|w(\xi,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}\,\mathrm{d}\mu(\xi)\\
&\qquad \le \|g\|_{L^2(\Omega)}\,\|w\|_{L^2(\Pi)} < +\infty. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Así pues, en virtud de (3.22), y aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\langle\, Ng\,,\, w\,\rangle_{L^2(\Pi)} &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_+} q_\xi(y) g(\xi) \overline{w(\xi,y)}\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(\xi)\\
&= \int_\Omega g(\xi)\overline{(Tw)(\xi)}\,\mathrm{d}\mu(\xi)\\
&= \langle\, g\,,\, Tw\,\rangle_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $N^* = T$. Por otra parte, de (3.21) y (3.15), para $\xi\in\Omega$, $y\in\mathbb{R}_+$ y $g\in L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+)$

$$(NN^*g)(\xi,y) = \int_{\mathbb{R}_+} q_\xi(y)\overline{q_\xi(v)} g(\xi,v)\,\mathrm{d}\nu(v) = \int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,y}(v) g(\xi,v)\,\mathrm{d}\nu(v),$$

es decir, $NN^* = \widehat{P}$. Lo anterior implica que $N(L^2(\Omega)) = \widehat{\mathcal{H}}$. En efecto,

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{P}(L^2(\Pi)) = NN^*L^2(\Pi) \subseteq N(L^2(\Omega)) = NN^*N(L^2(\Omega)) \subseteq \widehat{P}(L^2(\Pi)) = \widehat{\mathcal{H}}.$$

□

Definimos $R\colon L^2(\Pi)\to L^2(\Omega)$ mediante la regla

$$R \coloneqq N^*\Phi.$$

Entonces, el operador adjunto $R^*\colon L^2(\Omega)\to L^2(\Pi)$ estará dado por

$$R^* = \Phi^* N.$$

Sea $\widetilde{R}\colon \mathcal{H}\to L^2(\Omega)$, la restricción de R a $\mathcal{H}$.

Proposición 3.5.2. *El operador R^* es una isometría lineal, $R^*(L^2(\Omega)) = \mathcal{H}$, y $\widetilde{R}$ es un operador unitario de $\mathcal{H}$ en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Debido a que R^* es composición de isometrías lineales, es inmediato que es también una isometría. En virtud de la Proposición 3.5.1, $NN^* = \widehat{P}$, luego, para cada f en $\mathcal{H}$, se tiene que

$$f = \Phi^*\Phi P f = \Phi^*\widehat{P}\Phi f = \Phi^* NN^*\Phi f = R^*(Rf),$$

es decir, $\mathcal{H} \subseteq R^*(L^2(\Omega))$. Ahora, si $h \in L^2(\Omega)$, entonces

$$R^*h = \Phi^* N h = \Phi^* N N^* N h = \Phi^* \widehat{P} N h = P \Phi^* N h = P(R^* h) \in \mathcal{H},$$

de donde $R^*(L^2(\Omega)) = \mathcal{H}$. Finalmente, tomando la restricción del operador R a $\mathcal{H}$, se tiene que $\widetilde{R}$ es un operador unitario. □

Proposición 3.5.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $N^* W_a N = M_{E_a|_\Omega}$*

Demostración. Probemos que para toda función $h \in L^2(\Omega)$, $W_a N h = N M_{E_a|_\Omega} h$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(W_a N h)(\xi, v) &= E_a(\xi)(Nh)(\xi, v) \\
&= \begin{cases} e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi a} q_\xi(v) h(v), & \text{si } \xi \in \Omega, \\ 0, & \text{si } \xi \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \\
&= \begin{cases} q_\xi(v)(M_{E_a|_\Omega}) h(\xi, v), & \text{si } \xi \in \Omega, \\ 0, & \text{si } \xi \in \mathbb{R} \setminus \Omega. \end{cases} \\
&= (N M_{E_a|_\Omega} h)(\xi, v)
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.5.4. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces, $R V_a R^* = M_{E_{-a}|_\Omega}$.*

Demostración. De la Proposición 3.5.3 se sigue que

$$R V_a R^* = N^* \Phi V_a \Phi^* N = N^* W_{-a} N = M_{E_{-a}|_\Omega}.$$

□

Corolario 3.5.5. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\widetilde{R} V_a \widetilde{R}^* = M_{E_{-a}|_\Omega}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.5.4. □

Teorema 3.5.6. *Si se satisfacen las Suposiciones 1–5, y la condición (a) del Teorema 3.4.2. Entonces el operador $\widetilde{R}$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $L^2(\Omega)$, y para cada A en $\mathcal{V}$ el producto $\widetilde{R} A \widetilde{R}^*$ es un operador de multiplicación en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{V}$. Pongamos $B = \widetilde{R} A \widetilde{R}^*$. En virtud del Corolario 3.5.5, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$B M_{E_a|_\omega} = R A V_{-a} \widetilde{R}^* R V_{-a} A \widetilde{R}^* = M_{E_a|_\omega} B,$$

es decir, B conmuta con M_{E_a} para cada $a \in \mathbb{R}$. Por el Corolario 2.6.5, existe $\sigma \in L^\infty(\Omega)$ tal que $B = M_\sigma$, i.e $B \in \mathcal{M}$. □

3.6. Diagonalización de los operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes

Definición 3.6.1 (Operador de Toeplitz)**.** Dado $\varphi \in L^\infty(\Pi)$, definimos el *operador de Toeplitz con símbolo generador* φ, como el operador $T_\varphi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$T_\varphi(f) \coloneqq P(\varphi f) = PM_\varphi f.$$

Proposición 3.6.2. *Sean $\varphi, \varphi' \in L^\infty(\Pi)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces el operador T_φ es lineal y satisface:*

(i) $T_{\varphi+\varphi'} = T_\varphi + T_{\varphi'}$,

(ii) $T_{\lambda\varphi} = \lambda T_\varphi$,

(iii) $T_{\mathrm{Id}_\Pi} = \mathrm{Id}_\Pi$.

(iv) $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.

Demostración. Las propiedades (i), (ii) y (iii) son consecuencia directa de las propiedades del operador de multiplicación (Proposición 2.1.2).

Mostremos entonces que se satisface (iv). Sean $f, g \in \mathcal{H}$, notemos que $Pf = f$ y $Pg = g$, luego,

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi^* f , g \rangle &= \langle f , T_\varphi g \rangle = \langle f , PM_\varphi g \rangle = \langle Pf , M_\varphi g \rangle = \langle f , M_\varphi g \rangle \\ &= \langle M_{\overline{\varphi}} f , g \rangle = \langle M_{\overline{\varphi}} f , Pg \rangle = \langle PM_{\overline{\varphi}} f , g \rangle = \langle T_{\overline{\varphi}} f , g \rangle,\end{aligned}$$

es decir, $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$. □

Cabe mencionar que en general los operdores de Toeplitz no conmutan, es decir $T_\varphi T_{\varphi'} \neq T_{\varphi\varphi'}$, luego, no es posible hallar una fórmula simple para $T_\varphi T_{\varphi'}$.

En la proposición siguiente calcularemos la función espectral del operador T_φ bajo el supuesto de que la función φ depende únicamente de la segunda componente, es decir, de la componente en $\mathbb{R}_+$.

Proposición 3.6.3. *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Definimos $\varphi \in L^\infty(\Pi)$ mediante $\varphi(x, y) \coloneqq \psi(y)$. Entonces,*

$$\widetilde{R} T_\varphi \widetilde{R}^* = M_{\gamma_\psi},$$

donde $\gamma_\psi \colon \Omega \to \mathbb{C}$ está definida por

$$\gamma_\psi(\xi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}_+} \psi(y) |q_\xi(y)|^2 \, \mathrm{d}\nu(y). \tag{3.23}$$

Demostración. Debido a que la función $\varphi(x, y)$ no depende de x, el operador M_φ conmuta con Φ, luego

$$\Phi PM_\varphi \Phi^* = \Phi P \Phi^* \Phi M_\varphi \Phi^* = \widehat{P} \Phi M_\varphi \Phi^* = \widehat{P} M_\varphi.$$

Más aún, para toda $h \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}\widetilde{R} T_\varphi \widetilde{R}^* h &= RPM_\varphi R^* h = N^* \Phi PM_\varphi \Phi^* N h \\ &= N^* \widehat{P} \Phi M_\varphi \Phi^* N h = N^* \widehat{P} M_\varphi N h = N^* M_\varphi N h.\end{aligned}$$

A través de las fórmulas para N^*, M_φ y N, se puede ver que

$$(N^* M_\varphi N h)(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{q_\xi(y)} \psi(y) q_\xi(y) h(\xi) \, \mathrm{d}y = \gamma_\psi(\xi) \, h(\xi).$$

Por lo tanto, $\widetilde{R} T_\varphi \widetilde{R}^* = M_{\gamma_\psi}$. □

Denotemos ahora por $\mathcal{VT}_0$ al conjunto de los operadores de Toeplitz de la forma T_φ, donde φ está dada como en la Proposición 3.6.3, y por $\mathcal{VT}$ al álgebra C* generada por $\mathcal{VT}_0$. Denotemos por $\mathcal{G}$ a la subálgebra C* de L^∞ generada por el conjunto

$$\mathcal{G}_0 \coloneqq \{\gamma_\psi \colon \psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\}.$$

Corolario 3.6.4. *El álgebra C^* $\mathcal{VT}$ es la imagen del álgebra C^* $\mathcal{G}$ con respecto al isomorfismo isométrico Λ. El álgebra C^* $\mathcal{VT}$ es débilmente densa en $\mathcal{V}$ si y solo si el álgebra C^* $\mathcal{G}$ es densa en $L^\infty(\Omega)$ con respecto a la topología débil-*.*

Capítulo 4

Ejemplos

En este capítulo presentamos varios ejemplos de espacios invariantes bajo traslaciones horizontales en los cuales es posible aplicar nuestro esquema desarrollado en el Capítulo 3, y que ya han sido trabajados por otros autores. Nótese que en algunos casos, logramos obtener mayor información, puesto que nuestro proceso de diagonalización ocurre no solo para operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes bajo traslaciones, sino también para cualesquiera operadores invariantes bajo traslaciones.

4.1. Espacio de Bergman en el semiplano superior

Recordemos que, de acuerdo con el Capítulo 1, el espacio de Bergman en el semiplano superior, $\mathcal{H} := \mathcal{A}^2(\Pi)$, consiste de todas las funciones analíticas y cuadrado integrables en $\Pi := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Sabemos que el núcleo reproductor en este espacio tiene la forma

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w-\bar{z})^2}.$$

Identifiquemos a z y a w con las parejas (x, y) y (u, v), respectivamente, luego, el núcleo se puede reescribir así

$$K_{x,y}(u, v) = -\frac{1}{\pi((u-x)+\mathrm{i}(v+y))^2}.$$

Notemos que $\mathcal{H}$ es invariante respecto a las traslaciones horizontales.

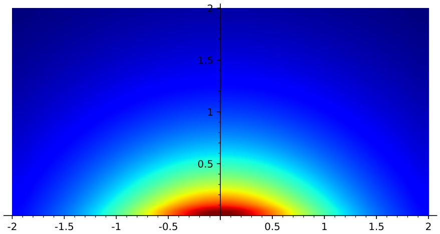
Lema 4.1.1. *Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}_+$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ax}}{(x+\mathrm{i}\,b)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -2\pi a\,\mathrm{e}^{-ab}, & a > 0; \\ 0, & a \leq 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Demostración. Tomemos $g(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ax}$, entonces la función $\dfrac{g(x)}{(x+\mathrm{i}\,b)^2}$ tiene una singularidad de orden 2 en $x_0 = -\mathrm{i}\,b$. Así, por el teorema del residuo y el lema de Jordan se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ax}}{(x+\mathrm{i}\,b)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ax}}{(x+\mathrm{i}\,b)^2}\,\mathrm{d}x = -2\pi\,\mathrm{i}\,g'(-\mathrm{i}\,b),$$

para alguna curva adecuada γ_R tal que contenga en su interior al punto $-\mathrm{i}\,b$. □



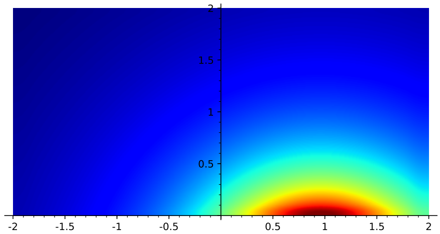


Figura 4.1: Los valores absolutos de las funciones $K_{0,1}$ y $K_{1,1}$.

En la Figura 4.1 se muestran las funciones $(u,v) \mapsto |K_{(0,1)}(u,v)|$ y $(u,v) \mapsto |K_{(1,1)}(u,v)|$. El color rojo corresponde a los valores grandes, y el azul a los valores pequeños. Se ve que

$$K_{(1,1)} = U_1 U_{(0,1)}.$$

Lema 4.1.2. *Sea $\mathcal{H} = \mathcal{A}^2(\Pi)$. Entonces*

$$L_{\xi,y}(v) = 4\pi\xi\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi(y+v)}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\xi).$$

Demostración. En virtud de que $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones, y de acuerdo con la Definición 3.1.7 y la Proposición 3.1.5, es posible hallar $L_{\xi,y}$ aplicando el Lema 4.1.1, con $a = 2\pi\xi$ y $b = v + y$, luego

$$\begin{aligned} L_{\xi,y}(v) &= \int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{i}\,y}(u+\mathrm{i}\,v)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\pi((u+\mathrm{i}\,v)+\mathrm{i}\,y)^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}}{\pi(u+\mathrm{i}(v+y))^2}\,\mathrm{d}u = \begin{cases} 4\pi\xi\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi(y+v)}, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \le 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.3. *Si $\mathcal{H} = \mathcal{A}^2(\Pi)$, entonces*

(i) $\Omega = \mathbb{R}_+$,

(ii) *para cualesquiera $\xi \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}_+$, se tiene que $L_{\xi,y} = \overline{q_\xi(y)}\,q_\xi(v)$, donde*

$$q_\xi(v) = 2\sqrt{\pi\,\xi}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi v}.$$

(iii) *$\mathcal{V}$ es conmutativa,*

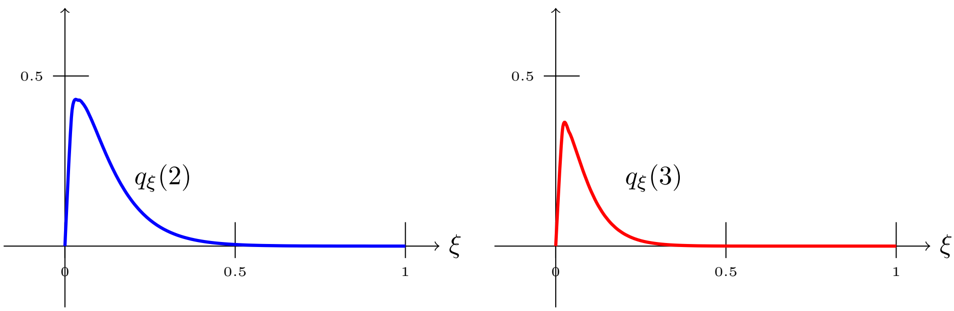


Figura 4.2: Gráfica de la función $q_\xi(v) = 2\sqrt{\pi\xi}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi v}$, donde el parámetro v es fijo, $v = 2$ y $v = 3$, respectivamente.

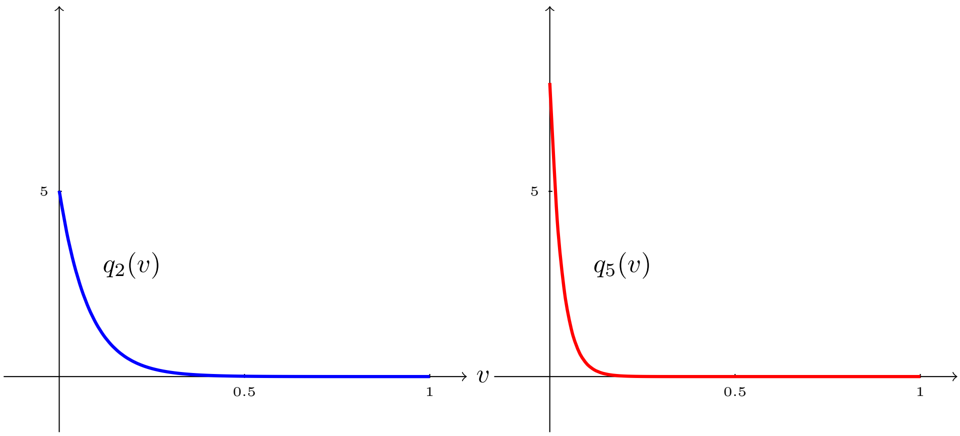


Figura 4.3: Gráfica de la función $q_\xi(v) = 2\sqrt{\pi\xi}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi v}$, donde el parámetro ξ es fijo, $\xi = 2$ y $\xi = 5$, respectivamente.

(iv) *si* $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, *entonces la función espectral* γ_σ *definida por la fórmula* (3.23) *está dada por*

$$\gamma_\sigma(\xi) = 4\pi\xi \int_{\mathbb{R}_+} \sigma(v)\,\mathrm{e}^{-4\pi\xi v}\,\mathrm{d}v. \tag{4.2}$$

Demostración. En virtud del Teorema 3.4.2, basta con aplicar el Lema 4.1.2. □

Observación 4.1.4. La fórmula (4.2) coincide con Vasilevski [26, Teorema 3.1], salvo cambios de variable; ver también [27, Teorema 5.2.1]. Cabe mencionar que Herrera Yañez, Maximenko y Vasilevski, hallaron que el álgebra C* generada por los operadores de Toeplitz que actúan en $\mathcal{A}^2(\Pi)$, con símbolos verticales, es conmutativa y es isométricamente isomorfa a cierta álgebra de funciones acotadas con valores complejos en la semirrecta positiva, véase [10].

4.2. Espacio de Bergman armónico en el semiplano superior

Tomemos ahora el espacio de Bergman armónico en el semiplano superior $\mathcal{H} := \mathrm{H}^2(\Pi)$, que consiste de las funciones armónicas en $\Pi := \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. En virtud del teorema de Riesz 1.1.13 es posible descomponer tal espacio en una suma ortogonal $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, donde, de acuerdo al Capítulo 1, $\mathcal{H}_1$ es el espacio de Bergman $\mathcal{A}^2(\Pi)$; y $\mathcal{H}_2$ es el espacio anti-Bergman $\widehat{\mathcal{A}}^2(\Pi)$. Más aún, sabemos que el $\mathcal{H}$ es un EHNR, donde el núcleo está dado por

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w-\bar{z})^2} - \frac{1}{\pi(\bar{w}-z)^2}.$$

Análogamente al ejemplo anterior, identificamos a z con (x,y) y a w con (u,v) para obtener

$$K_{x,y}(u,v) = -\frac{1}{\pi((u-x)+\mathrm{i}(v+y))^2} - \frac{1}{\pi((u-x)-\mathrm{i}(v+y))^2}.$$

Así mismo, como en el caso anterior, $\mathcal{H}$ es invariante bajo traslaciones horizontales.

Lema 4.2.1. *Sea $\mathcal{H} = \mathrm{H}^2(\Pi)$. Entonces,*

$$L_{\xi,y}(v) = 4\pi^2|\xi|\,\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|(y+v)} \qquad (\xi\in\mathbb{R}).$$

Demostración. Procediendo de manera análoga al Lema 4.1.2,

$$\begin{aligned}
L_{\xi,y}(v) &= \int_{\mathbb{R}} K_{\mathrm{i}\,y}(u+\mathrm{i}\,v)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{\pi(w-\overline{z})^2} - \frac{1}{\pi(\overline{w}-z)^2}\right)\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_{\mathbb{R}} -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}}{(u+\mathrm{i}(v+y))^2}\,\mathrm{d}u + \int_{\mathbb{R}} -\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi u}}{(u-\mathrm{i}(v+y))^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \begin{cases} 4\pi\xi\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi(y+v)}, & \xi>0,\\ 4\pi|\xi|\,\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|(y+v)}, & \xi\le 0,\end{cases}\\
&= 4\pi|\xi|\,\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|(y+v)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.2. *Si $\mathcal{H} = \mathrm{H}^2(\Pi)$, entonces*

(i) $\Omega = \mathbb{R}$,

(ii) *para cualesquiera $\xi\in\Omega$, $y\in\mathbb{R}_+$, se tiene que $L_{\xi,y} = \overline{q_\xi(y)}\,q_\xi(v)$, donde*

$$q_\xi(v) = 2\sqrt{\pi\,|\xi|}\;\mathrm{e}^{-2\pi|\xi|v},$$

(iii) *$\mathcal{V}$ es conmutativa,*

(iv) *si $\sigma\in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces la función γ_σ definida por la fórmula (3.23) es simétrica y está dada por*

$$\gamma_\sigma(\xi) = \gamma_\sigma(|\xi|) = 4\pi|\xi|\int_{\mathbb{R}_+}\sigma(v)\,\mathrm{e}^{-4\pi|\xi|v}\,\mathrm{d}v. \tag{4.3}$$

Observación 4.2.3. En este ejemplo, la fórmula (4.3) coincide con los resultados obtenidos por Loaiza y Lozano [18, Teorema 4.16].

4.3. Espacio de Bergman polianalítico puro en el semiplano superior

Consideremos, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, el espacio $\mathcal{H}$ de las funciones n-analíticas puras sobre el semiplano superior, $\mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi)$, definido en el Capítulo 1.

Lema 4.3.1. *Sea $\mathcal{H} = \mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi)$, el espacio de Bergman de funciones n-analíticas puras sobre Π. Entonces,*

$$L_{\xi,y}(v) = 2\xi\ell_{n-1}(2\xi y)\ell_{n-1}(2\xi v)\mathbf{1}_+(\xi),$$

donde $\ell_{n-1}(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}\, L_{n-1}(z)$; y L_k es el polinomio de Laguerre de grado k.

Demostración. Recordemos que tal espacio está definido a través de las ecuaciones diferenciales (1.17), de tal manera que a través de la transformada de Fourier de éstas, Vasilevski halló [27, Sección 3.4] una fórmula para el operador $\widehat{P} = \Phi P \Phi^*$, el cual actúa mediante (3.5), de tal manera que si $\varphi \in \mathcal{A}^2_{(n)}(\Pi)$, entonces

$$\begin{aligned}
(\Phi^* P\varphi)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} (P\varphi)(\xi,y)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_+(\xi)\, 2\xi\, \ell_{n-1}(2\xi y) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(\xi,\nu)\ell_{n-1}(2\xi\nu)\, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_+(\xi)\, 2\xi\, \ell_{n-1}(2\xi y)\, \varphi(\xi,\nu)\ell_{n-1}(2\xi\nu)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\nu\, \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\Pi} \varphi(\xi,\nu)\overline{\mathbf{1}_+(\xi)\, 2\xi\, \ell_{n-1}(2\xi y)\ell_{n-1}(2\xi\nu)\, \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi}\, \mathrm{d}\nu \\
&= \langle\, \varphi\,,\, \Phi K_{(x,y)}\, \rangle,
\end{aligned}$$

donde $\ell_{n-1}(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z}\, L_{n-1}(z)$, y L_k es el polinomio de Laguerre de grado k. □

Teorema 4.3.2. *Si $\mathcal{H} = \mathcal{A}^2_n(\Pi)$, entonces*

(i) $\Omega = \mathbb{R}_+$,

(ii) *para cualesquiera $\xi \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}_+$, se tiene que $L_{\xi,y} = \overline{q_\xi(y)}q_\xi(v)$, donde*

$$q_\xi(v) = \sqrt{2\xi}\ell_{n-1}(2\xi v)\, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\xi) \qquad (v > 0),$$

(iii) *$\mathcal{V}$ es conmutativa,*

(iv) *si $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, entonces γ_σ está dada por*

$$\gamma_\sigma(\xi) = 2\xi \int_{\mathbb{R}_+} \sigma(v)(\ell_{n-1}(2\xi v))^2\, \mathrm{d}v. \tag{4.4}$$

Observación 4.3.3. La fórmula (4.4) fue hallada por Ramírez–Ortega y Sánchez–Nungaray [20, Teorema 3.2]. Por otra parte, Hutník, Maximenko y Mišková, estudiaron de manera más detallada este caso en [13].

4.4. Espacio de Bergman polianalítico en el semiplano superior

Consideremos ahora el espacio

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_m,$$

donde $\mathcal{H}_n$ es el espacio del ejemplo anterior. Así que

$$L_{\xi,y}(v) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\xi) 2\xi \, \mathrm{e}^{-\xi(y+v)} \sum_{n=1}^{m} L_{n-1}(2\xi y) L_{n-1}(2\xi v).$$

Notemos que para cada $\xi > 0$, por la ortonormalidad de los polinomios de Laguerre,

$$\int_{\mathbb{R}_+} L_{\xi,y}(y) \, \mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{m} \int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-y} (L_{n-1}(y))^2 \, \mathrm{d}y = n,$$

es decir, $\dim(\widehat{\mathcal{H}}_\xi) = n$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 3.4.2 el álgebra $\mathcal{V}$ es no conmutativa.

Observación 4.4.1. Nótese que Ramírez–Ortega y Sánchez–Nungaray [20], encontraron una subálgebra no conmutativa de operadores de Toeplitz.

4.5. Espacio de ondículas

Recordemos que el espacio $\mathcal{W}_\psi(L^2(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{W}_\psi$ está definida por la fórmula (1.15), es un EHNR, en el cual el núcleo reproductor está dado por

$$K_{x,y}(u,v) = \langle \psi_{u,v} \, , \, \psi_{x,y} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\langle \psi_{u,v} \, , \, \psi_{x,y} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \psi_{x,y}(z) \overline{\psi_{u,v}(z)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{yv}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{z-x}{y}\right) \overline{\psi\left(\tfrac{z-u}{v}\right)} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\sqrt{yv}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{t-0}{y}\right) \overline{\psi\left(\tfrac{t-(u-x)}{v}\right)} \, \mathrm{d}t = \langle \psi_{0,y} \, , \, \psi_{u-x,v} \rangle,\end{aligned}$$

luego, $K_{x,y}(u,v) = K_{0,y}(u-x,v)$.

Lema 4.5.1. *Sea $\mathcal{H} = \psi(L^2(\mathbb{R}))$. Entonces,*

$$L_{\xi,y}(v) = \sqrt{yv} (F\psi)(y\xi) \overline{(F\psi)(v\xi)}.$$

Demostración. De las fórmulas (1.13) y (1.15), haciendo un cambio de variable $z =$

$t-u$ y aplicando el teorema de Tonalli–Fubini, se sigue que

$$\begin{aligned}
L_{\xi,y}(v) &= \int_{\mathbb{R}} K_{0,y}(u,v)\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{yv}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{t}{y}\right) \overline{\psi\left(\tfrac{t-u}{v}\right)}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{yv}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{t}{y}\right) \overline{\psi\left(\tfrac{t-u}{v}\right)}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,u\xi}\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{yv}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{t}{y}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\tfrac{z}{v}\right)}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}(t-z)\xi}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{yv}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{t}{y}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,t\xi}\,\mathrm{d}t \right) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\tfrac{z}{v}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,z\xi}\,\mathrm{d}z} \right) \\
&= \sqrt{yv}(F\psi)(y\xi)\,\overline{(F\psi)(v\xi)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.2. *Si* $\mathcal{H} = \mathcal{W}_\psi(L^2(\mathbb{R}))$, *entonces*

(i) $\Omega = \mathbb{R}$,

(ii) *para cualesquiera* $\xi \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}_+$, *se tiene que* $L_{\xi,y} = \overline{q_\xi(y)}\,q_\xi(v)$, *donde*

$$q_\xi(v) = \sqrt{v}\,\overline{(F\psi)(v\xi)},$$

(iii) $\mathcal{V}$ *es conmutativa,*

(iv) *si* $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, *entonces la función* γ_σ *definida por la fórmula* (3.23) *está dada por*

$$\gamma_\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} \sigma(v)|(F\psi)(v\xi)|^2\,\frac{\mathrm{d}v}{v}. \tag{4.5}$$

Observación 4.5.3. La fórmula (4.5) fue descubierta por Hutník y Hutníková [12].

4.6. Espacio de Bergman sobre el disco unitario

En algunos ejemplos es conveniente transformar tanto el dominio de funciones como el espacio de Hilbert. De tal manera que en la proposición siguiente vamos a suponer que la transformación entre $\mathcal{H}'$ y $\mathcal{H}$ está dada mediante una sencilla regla: un cambio de variable y una multiplicación por algún peso; de tal manera que nos sea posible calcular el núcleo reproductor en $\mathcal{H}$.

Sea entonces $\mathcal{H}_1 = \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ el espacio de Bergman sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, provisto con la medida de Lebesgue usual en el plano $\frac{\mathrm{d}A}{\pi}$. Como vimos en el Capítulo 1, fórmula (1.5), el núcleo reproductor está dado por

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(1-\overline{z}w)^2}.$$

Sean G el grupo $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ con la medida de Haar normalizada ν (identificamos a G con $[0,2\pi)$), el grupo de caracteres $\widehat{G}=\mathbb{Z}$ con la medida de conteo $\widehat{\nu}$, $E(u+2\pi\mathbb{Z},\xi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u\xi}$ para $u\in\mathbb{R}$ y $\xi\in\mathbb{Z}$, y sea Y el intervalo $[0,1)$ con la medida $\mathrm{d}\lambda(v)=v\,\mathrm{d}v$. Definimos $\varphi\colon G\times Y\to\mathbb{D}$ y $p\colon G\times Y\to\mathbb{C}$ por

$$\varphi(u,v)=v\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u},\qquad p(u,v)=\sqrt{2\pi},$$

en otras palabras, $\varphi(u,v)$ es el cambio a las coordenadas polares.

Dada f en $\mathcal{H}_1$, a través de coordenadas polares, se tiene que

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{\mathcal{H}_1}&=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\,\mathrm{d}A(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)}\int_{[0,1)}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u})|^2\,2v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u\\&=\int_{G\times Y}|p|^2|f\circ\varphi|^2\,\mathrm{d}(\nu\times\lambda)=\|Af\|^2.\end{aligned}$$

Aplicamos entonces la Proposición 1.4.11, y convertimos a $\mathcal{H}_1$ en cierto EHNR $\mathcal{H}$ sobre $G\times Y$ con el núcleo reproductor dado por

$$K_{x,y}(u,v)=\overline{p(x,y)}K^{\mathcal{H}_1}_{\varphi(x,y)}\varphi(u,v)p(u,v)=\frac{1}{(1-yv\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-x)})^2}.$$

Nótese que de este modo, convertimos operadores de rotación que actúan en $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ en traslaciones $\widetilde{V}_a$ $(a\in G)$ que actúan ahora en $\mathcal{H}$.

Formalmente este caso no se cubre por la construcción descrita en el Capítulo 3 debido a que aquí $G=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. No obstante, es posible aplicar un análogo de tal esquema, puesto que se cumplen las condiciones técnicas.

Lema 4.6.1. *Sea $\mathcal{H}$ el EHNR descrito arriba. Entonces*

$$L_{\xi,y}(v)=2(\xi+1)(yv)^{\xi}\mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(\xi).$$

Demostración. Apliquemos la transformada de Fourier con respecto a la primera coordenada a la función $K_{0,y}(u,v)$, es decir, para cada $\xi\in\mathbb{Z}$, calculemos el ξ-ésimo coeficiente de Fourier. En virtud del Lema 1.4.10,

$$\begin{aligned}L_{\xi,y}(v)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,u\xi}}{(1-yv\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u})^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(yv)^k}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-\xi)u}\,\mathrm{d}u\\&=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)(yv)^k\,\delta_{k,\xi}=2(\xi+1)(yv)^{\xi}\mathbf{1}_{\mathbb{N}_0}(\xi).\end{aligned}$$

□

Teorema 4.6.2. *Si $\mathcal{H}$ es el EHNR del lema anterior, entonces*

(i) $\Omega=\mathbb{N}_0$,

(ii) *para cualesquiera $\xi\in\Omega$, $y\in Y$, se tiene que $L_{\xi,y}=\overline{q_\xi(y)}\,q_\xi(v)$, donde*

$$q_\xi(v)=\sqrt{2(\xi+1)}\,v^{\xi},$$

(iii) *El álgebra* W^* *de operadores radiales en* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ *es conmutativa,*

(iv) *si* $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, *entonces la sucesión de eigenvalores de un operador de Toeplitz radial está dada por*

$$\gamma_\sigma(\xi) = 2(\xi+1)\int_0^1 \sigma(v)v^{2\sigma+1}\,\mathrm{d}v = (\xi+1)\int_0^1 \sigma(\sqrt{r})r^\xi\,\mathrm{d}r \qquad (\xi \in \mathbb{N}_0). \quad (4.6)$$

Observación 4.6.3. En este caso, los resultados obtenidos pueden obtenerse de una manera más directa debido al hecho de que los operadores radiales son diagonales en la base de los monomios $(\sqrt{\xi+1}\,z^\xi)_{\xi=0}^\infty$ (vista en la Proposición 1.4.4). Sin embargo, a través de nuestro esquema, este ejemplo es similar a [27, Capítulos 4, 6], donde $L^2(\mathbb{D},\mu)$ se descompone en $L^2(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))\otimes L^2([0,1], r\,\mathrm{d}r)$, y la transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ se aplica a la ecuación que define a $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$.

Bibliografía

[1] Aronszajn, N. (1950): *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the AMS, 68, 337–404.

[2] Bauer, W.; Herrera Yañez, C; Vasilevski, N. (2014): *Eigenvalue characterization of radial operators on weighted Bergman spaces over the unit ball.* Integr. Equ. Oper. Theory 78, 271-300. DOI: 10.1007/s00020-013-2101.1.

[3] Blackadar, B. (2006): *Operator algebras.* Encyclopedia of Mathematical Sciences Vol. 122. ISBN: 3-540-28486-9.

[4] Conway, J. (1985): *A course in functional analysis.* Graduate Texts in Mathematics 96, Springer New York. ISBN: 0-387-97245-5.

[5] Dawson, M.; Ólafsson, G.; Quiroga-Barranco, R. (2015): *Commuting Toeplitz operators on bounded symmetric domains and multiplicity-free restrictions of holomorphic discrete series.* J. Funct. Anal. 268, 1711-1732. http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2014.12.002

[6] Gasquet, C.; Witomski, P. (1998): *Fourier analysis and applications. Filtering, numerical computation, wavelets.* In series: Texts in Applied MAthematics, Vol. 30, Springer Science. ISBN: 978-1-4612-7211-3.

[7] Grudsky, S.; Karapetyants, A.; Vasilevski, N. (2004): *Dynamics of properties of Toeplitz operators on the upper half-plane: Parabolic case.* J. Operator Theory 52, 185–214. URL: http://www.jstor.org/stable/24718968.

[8] Grudsky, S.; Maximenko, E.; Vasilevski, N. (2013): *Radial Toeplitz operators on the unit ball and slowly oscillating sequences.* Communications in Mathematical Analysis, Vol. 14, Number 2, pp. 77–94. ISSN: 1938-9787.

[9] Herrera Yañez, C.; Hutník, O.; Maximenko, E. (2014): *Vertical symbols, Toeplitz operators on weighted Bergman spaces over the upper half-plane and very slowly oscillating functions.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352, 129–132. http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.12.004.

[10] Herrera Yañez, C.; Maximenko, E.; Vasilevski, N. (2013): *Vertical Toeplitz operators on the upper half-plane and very slowly oscillating functions.* Integr. Equ. Oper. Theory 77, 149–166. DOI: 10.1007/s00020-013-2081-1.

[11] Herrera Yañez, C.; Vasilevski, N.; Maximenko, E. (2015): *Radial Toeplitz operators revisited: discretization of the vertical case.* Integr. Equ. Oper. Theory 83, 49–60. DOI: 10.1007/s00020-014-2213-2.

[12] Huntík, O.; Huntníková, M. (2011): *On Toeplitz localization operators.* Arch. Math. 97, 333-344. DOI: 10.1007/s00013-011-0307-5.

[13] Hutník, O.; Maximenko, E.; Mišková, A. (2016): *Toeplitz localization operators: spectral functions density.* Complex Anal. Oper. Theory 10, 1757-1774. DOI: 10.1007/s11785-016-0564.1.

[14] Kaniuth, E. (2009): *A course in commutative Banach algebras.* Graduate Texts in Mathematics, Springer New York. ISBN: 978-0387-72476-8.

[15] Kreyszig, E. (1978): *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley and Sons. Inc., USA. ISBN: 0-471-50731-8.

[16] Lang, S. (1999): *Complex analysis.* Graduate Texts in Mathematics 103, Springer New York. ISBN: 0-387-98592-1.

[17] Larsen, R. (1971): *An introduction to the theory of multipliers.* Springer Verlag New York. ISBN-13: 978-3-642-65032-1.

[18] Loaiza, M.; Lozano, C. (2013): *On C*-algebras of Toeplitz operators on the harmonic Bergman space.* Integr. Equ. Oper. Theory 76, 105–130. DOI: 10.1007/s00020-013-2046-4.

[19] Munkres, J. R. (1975): *Topology.* Prentice Hall, Inc. ISBN: 0-13-181629-2.

[20] Ramírez Ortega, J.; Sánchez-Nungaray, A. (2015): *Toeplitz operators with vertical symbols acting on the poly-Bergman spaces of the upper half-plane.* Complex Anal. Oper. Theory 9, 1801–1817. DOI: 10.1007/s11785-015-0469-4.

[21] Ramos, G. (2016): *La transformada de ondícula continua y algunas clases de operadores de multiplicación.* Tesis de maestría, ESFM del IPN. México, Cd. de México.

[22] Rocha, J. M. (2013): *Un primer curso de integración en $\mathbb{R}^n$.* Instituto Politécnico Nacional. México, Cd. de México. ISBN: 978-607-414-388-1.

[23] Rudin, W. (1991): *Functional analysis.* McGraw-Hill, Inc. ISBN: 0-07-054236-8.

[24] Rudin, W. (1987): *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, Inc. ISBN: 0-07-054234-1.

[25] Suárez, D. (2008): *The eigenvalues of limits of radial Toeplitz operators.* Bull. London Math. Soc. 40, 631-641. DOI: 10.1112/blms/bdn042.

[26] Vasilevski, N. L. (1999): *On Bergman-Toeplitz operators with commutative symbol algebras.* Integr. Equ. Oper. Theory 34, 107–126. DOI: 10.1007/BF01332495.

[27] VASILEVSKI, N. L. (2008): *Commutative algebras of Toeplitz operators on the Bergman space*. Series: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 185, Birkhäuser Verlag AG, Basel. ISBN: 978-3-7643-8725-9.

[28] ZHU, K. (1993): *An introduction to operator algebras*. Studies in Advanced Mathematics. ISBN: 0-8493-7875-3.

[29] ZHU, K. (2007): *Operator theory in function spaces*. Second edition, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 138, AMS, USA. ISBN: 978-0-8218-3965-2.

[30] ZHU, K. (2005): *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*. Graduate Texts in Mathematics 226, Springer New York. ISBN: 0-387-22036-4.