INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

SERVICIO SOCIAL

JUÁREZ GALICIA ANABEL

NOMBRE DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:
Propiedades espectrales de matrices y operadores de Toeplitz

NOMBRE DEL PROFESOR:
Egor Maximenko

MÉXICO, D.F.

JUNIO 2012

Índice general

Reporte global

Justificación

La Transformada Discreta de Fourier tiene una diversidad de aplicaciones, por lo que se estudia su aplicación a matrices de Toeplitz.

La aplicación del algoritmo de Levinson-Durbin en los modelos lineales autorregresivos según Akaike (1973) " es probablemente la contribución mas significativa en el campo del análisis por computador digital de series temporales."

Objetivos

1. Estudiar y programar la Transformada Rápida de Fourier.

2. Estudiar la multiplicación de una matriz de Toeplitz por un vector usando la Transformada Rápida de Fourier.

3. Estudiar el cálculo de los valores y vectores propios de matrices circulantes.

4. Estudiar y programar el algortimo de Levinson-Durbin.

Marco Teórico

En el álgebra lineal, una matriz de Toeplitz, denominada así en honor a Otto Toeplitz, es una matriz cuadrada con todas sus diagonales de izquierda a derecha paralelas numéricamente, para el estudio de sus propiedades es necesaria la revisión de temas auxiliares necesarios para el desarrollo de la presente investigación.

En 1946 N. Levinson introdujo un procedimiento iterativo para determinar la transformada inversa de una función. Este procedimiento se conoce actualmente como algoritmo de Levinson-Durbin. El procedimiento utilizado por Durbin en 1960 para la solución de ecuaciones de Yule-Walker para el caso de una serie, fue extendido por Whittle (1963) y

Robinson (1963), Akaike (1973) y otros consideraron el problema de la inversión de bloques de matrices de Toeplitz, que conecta directamente con el procedimiento de Levinson-Durbin. En otras áreas de aplicación como la estimación espectral autorregresiva (Burg 1967, 1975) y la estimación del orden de modelos ARMA (Akaike 1970, Shibata 1976, Hannan 1980).

Desarrollo

Se escribieron apuntes para desarrollar los temas planteados en los objetivos. El trabajo final consta de 7 capítulos y tuvo como objetivo introducir un tipo especial de matrices que hoy en día tiene gran importancia en diferentes áreas de las matemáticas y física, la matriz de Toeplitz, es aquella que es constante a lo largo de las diagonales paralelas a la diagonal principal.

Sin embargo, no se puede comenzar el estudio de ellas sin detenerse un poco en las cosas que dieron origen a la teoría de estas matrices, se muestran algunos resultados de este tipo de matrices, así como algunas de las aplicaciones que se generan gracias a sus propiedades.

En el capítulo 1 se presenta la Transformada Discreta de Fourier y su inversa, presentando antes algunos conceptos y herramientas necesarias para el desarrollo del mismo, como lo son la forma polar de números complejos, las raíces de unidad y algunas de sus propiedades. El capítulo 2 está dedicado a la Transformada Rápida de Fourier, así como su implementación en lenguaje Mathematica.

Propiedades y aplicaciones de las matrices de Toeplitz se presentan en los capítulos posteriores, en el capítulo 3 se habla del producto de una matriz de este tipo por un vector vía el producto de los polinomios. En el capítulo 4 se habla de un tipo especial de matriz de Toeplitz, la matriz circulante y algunas de sus propiedades.

Finalmente en los últimos 3 capítulos se presentan algunas aplicaciones de este novedoso tópico.

Conlusiones

Formar parte de un proyecto de investigación trae consigo enseñanzas útiles en cuanto a una formación académica más completa, nos fomenta el desarrollo y la utilización de nuevos conocimientos, así como nos fortalece de un modo productivo y competitivo en el ámbito de investigación.

El participar en este proyecto para mi fue una experiencia sumamente enriquecedora porque tuve la oportunidad de integrar conocimientos en diversas áreas de las ciencias y otras áreas como el uso de la programación. Entre las destrezas puedo señalar la redacción de informes, exposiciones, preparación de gráficas, uso de LaTeX, y búsqueda de información tanto en la biblioteca como electrónicamente. Durante el transcurso de la investigación se aprenden conceptos nuevos y se reaprenden otros conceptos olvidados tal vez por falta de llevarlos a la práctica.

Asimismo se aportaron beneficios sociales al proyecto de investigación, el principal fue apoyar en las bases teóricas de ésta y la formación de recursos humanos. Por otra parte, el presente trabajo fue publicado en la página del director de proyecto por lo que este material puede resultar útil para estudiantes de educación de nivel superior y a la comunidad interesada en el estudio de la Transformada Discreta de Fourier y sus aplicaciones, o a los interesados en el análisis y procesamientos de señales, procesos estacionarios y análisis de series de tiempo.

La temática de matrices de Toeplitz y sus propiedades resultó totalmente nueva en mi formación académica, sin embargo ya contaba con una noción de las aplicaciones desarrolladas en el presente pero desconociendo algunas bases teóricas, por lo que me resultó aún más interesante el desarrollo de los temas aquí planteados, pues conocimientos adquiridos en cursos anteriores fueron de gran utilidad para la comprensión de los mismos.

Introducción

El presente trabajo tiene como objetivo introducir un tipo especial de matrices que hoy en día tiene gran importancia en diferentes áreas de las matemáticas y física, la matriz de Toeplitz, es aquella que es constante a lo largo de las diagonales paralelas a la diagonal principal.

Sin embargo, no se puede comenzar el estudio de ellas sin detenerse un poco en las cosas que dieron origen a la teoría de estas matrices, se muestran algunos resultados de este tipo de matrices, así como algunas de las aplicaciones que se generan gracias a sus propiedades.

En el capítulo 1 se presenta la Transformada Discreta de Fourier y su inversa, presentando antes algunos conceptos y herramientas necesarias para el desarrollo del mismo, como lo son la forma polar de números complejos, las raícces de unidad y algunas de sus propiedades. El capítulo 2 está dedicado a la Transformada Rápida de Fourier, así como su implementación en lenguaje Mathematica.

Propiedades y aplicaciones de las matrices de Toeplitz se presentan en los capítulos posteriores, en el capítulo 3 se habla del producto de una matriz de este tipo por un vector vía el producto de los polinomios. En el capítulo 4 se habla de un tipo especial de matriz de Toeplitz, la matriz circulante y algunas de sus propiedades.

Finalmente en los últimos 3 capítulos se presentan algunas aplicaciones de este novedoso tópico .

Capítulo 1

Transformada discreta de Fourier

La relación existente entre la transformada de Fourier a través de funciones senoidales, cosenoidales y la exponencial, proviene de la identidad de Euler, es por ello que a continuación se introducen conceptos que resultan una herramienta primordial en el desarrollo de la temática.

1.1. Conjunto de números complejos

Si se considera la ecuación $x^2 + 1 = 0$, puesto que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \geq 0$ y $1 > 0$, entonces siempre $a^2 + 1 > 0$ y, por lo tanto, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$. De donde a partir de éste, se construye un nuevo conjunto, al que se denomina conjunto de los números complejos, en el cual la ecuación planteada anteriormente se puede resolver. Este nuevo sistema numérico aumenta las posibilidades aritméticas. A continuación se presenta un resumen de este conjunto.

Definición 1.1.1. *Se considera el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$. Es útil mencionar que $(x, y) = (u, v)$ si y solamente si $x = u$ y $y = v$. Denotaremos al conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.*

Se define la adición en este conjunto de la siguiente manera:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \begin{cases} ((x, y), (u, v)), & \longmapsto \quad (x, y) + (u, v) \\ (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v). \end{cases}$$

Y la multiplicación como:

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \begin{cases} ((x, y), (u, v)), & \longmapsto \quad (x, y) \cdot (u, v) \\ (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu). \end{cases}$$

Además se tiene que la adición en $\mathbb{C}$ satisface las siguientes propiedades:

1. Es asociativa.
2. Es conmutativa
3. Tiene un elemento neutro.
4. Cada elemento en $\mathbb{C}$ tiene un inverso para la adición.

Y la multiplicación en $\mathbb{C}$:

1. Es asociativa.
2. Es conmutativa
3. Tiene un elemento neutro.
4. Cada elemento en $\mathbb{C}$, diferente de (0,0) tiene un inverso para la multiplicación.

La forma algebraica de un número complejo es la expresión $z = (x, y) = x + iy$, donde x corresponde a la parte real y y a su parte imaginaria. A la expresión $x - iy$ se define como su conjugado, y finalmente a la expresión $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ se le denomina el módulo.

Después de mencionar las operaciones y propiedades de este conjunto de números, a continuación se presenta otra forma de expresar números complejos, la cuál será una herramienta primordial para comprender los capítulos posteriores.

1.2. Forma polar de números complejos

La potencia de números complejos corresponde a una fórmula obtenida primeramente por Leonardo Euler (1707-1783) y que se atribuye a Abraham De Moivre (1667-1754).

Teorema 1.2.1. *Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y n es un número natural. Entonces*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

Demostración.
La demostración se sigue por inducción. Si $n = 1$

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

es cierto.

Supongamos que la fórmula es cierta para $n = k$

$$z^k = r^k(\cos(k\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k\theta))$$

Luego, se tiene que probar que también es cierta para $n = k + 1$. Multiplicando.

$$z^k \cdot z = z^{k+1} = r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(k+1)\theta)$$

$\square$

A continuación se enlistan definiciones que serán de gran utilidad para el desarrollo de esta sección:

Definición 1.2.1. *Para todo $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Definición 1.2.2. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe un $r \geq 0$ y un $\theta \in \mathbb{R}$ tales que*

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$

Definición 1.2.3. *Sean $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y sea*

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}.$$

Entonces $r = |z|$.

El teorema de De Moivre puede ser generalizado a exponentes negativos y fraccionarios, si el exponente es fraccionario, se trata de una raíz:

$$Z^{1/n} = \sqrt[n]{Z}.$$

En particular una **raíz de unidad**, es cualquier número complejo que iguala 1, por lo que a continuación se presentan definiciones y teoría que se convertirán en la base para comprender la sección posterior.

Definición 1.2.4. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Decimos que α* divide *a β y escribimos $\alpha \mid \beta$ si existe un número entero k tal que $\beta = k\alpha$:*

$$\alpha \mid \beta \qquad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \qquad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta = k\alpha.$$

Lema 1.2.1. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\pi \mid \theta.$$

Teorema 1.2.2. *Sean $r_1, r_2 > 0$ y sean $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} r_1 = r_2, \\ 2\pi \mid \theta_1 - \theta_2. \end{cases}$$

Demostración.
$\Longrightarrow)$ Por demostrar que si $r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}$ entonces, $r_1 = r_2$ ó $2\pi \mid \theta_1 - \theta_2$.
Tenemos que: $r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}$, como $r_1, r_2 > 0$, entonces

$$\frac{r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}} = 1$$

Es decir:

$$\frac{r_1}{r_2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}} = 1$$

Lo cual se cumple sólo si se tiene que:

1. $\frac{r_1}{r_2} = 1$.

2. $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}} = 1$.

$\square$

1.3. Raíces de la unidad

Las raíces de unidad se usan en varias ramas de las matemáticas, y en el presente trabajo, serán de gran uso para la Transformada discreta de Fourier.

Para obtener la fórmula correspondiente se razonará del modo que sigue. Supongamos que $Z^{1/n}W \longrightarrow z = w^n$, como se buscan las raíces de unidad, entonces:
Suponemos que $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Notación: $\boldsymbol{\omega_n}$

$$\omega_n \coloneqq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}.$$

Notación: $\boldsymbol{\alpha}\mathbb{Z}$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se denota por $\alpha\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros que son múltiplos de α:

$$\alpha\mathbb{Z} \coloneqq \big\{\beta \in \mathbb{R}\colon \quad \alpha \mid \beta\big\} = \big\{\beta \in \mathbb{R}\colon \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \beta = k\alpha\big\}.$$

Lema 1.3.1. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\pi \mid \theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Teorema 1.3.1. *Sean $m, k \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\omega_n^m = \omega_n^k \qquad \Longleftrightarrow \qquad m - k \in n\mathbb{Z}.$$

n-ésima potencia de ω_n

Demuestre que $\omega_n^n = 1$.

Demostración. Tenemos que

$$\omega_n^n = \left(e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{-i2\pi} = 1$$

pues $2\pi | -2\pi$. $\square$

Teorema 1.3.2. *Los números ω_n^k, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq k < n$, son distintos.*

1.3.1. Suma de las raíces de la unidad

Fórmula para las raíces de la unidad

Usando la notación ω_n el conjunto solución de la ecuación $z^n = 1$ es

$$z^n = \{\omega_n^k : k = 0, \ldots, n-1\}$$

Fórmula general de la suma de la progresión geométrica

Sea $q \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & , \text{ si } \quad q \neq 1; \\ 1 & , \text{ si } \quad q = 1. \end{cases}$$

Sumas de las raíces de la unidad

En esta subsección se supone que $n \in \{2, 3, \ldots\}$. El caso $n = 1$ es trivial y se excluye.

Problema 1.3.1. *Suma de todas las raíces de la unidad. Calcular la suma* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k$

Solución.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = \frac{1-\omega_n^n}{1-\omega_n} = \frac{1-1}{1-\omega_n} = \frac{0}{1-\omega_n} = 0$$

$\square$

Problema 1.3.2. *Suma de las potencias de las raíces de la unidad, primer caso. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \mid m$. Calcule la suma* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km}$

Solución.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^m)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n$$

$\square$

Problema 1.3.3. *Suma de las potencias de las raíces de la unidad, segundo caso. Sea* $m \in \mathbb{Z}$ *tal que* $n \nmid m$*. Calcule la suma* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km}$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega_n^m)^k &= \frac{1-\omega_n^{mn}}{1-\omega_n^m} \\
&= \frac{1-(\omega_n^n)^m}{1-\omega_n^m} \\
&= \frac{1-1^m}{1-\omega_n^m} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Suma de las potencias de las raíces de la unidad

Sea $m \in \mathbb{Z}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{km} = \begin{cases} n, & \text{si} \quad n \mid m \\ 0, & \text{si} \quad n \nmid m \end{cases}$$

Ortogonalidad de las raíces de la unidad

Problema 1.3.4. *Sean* $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$*,* $p \neq q$*. Calcule la suma* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk}$

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^p \omega_n^{-q}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^{(p-q)}\right)^k \\
&= \frac{1-\left(\omega_n^{(p-q)}\right)^n}{1-\omega_n^{(p-q)}} \\
&= \frac{1-\left(\omega_n^{n}\right)^{p-q}}{1-\omega_n^{(p-q)}} \\
&= \frac{1-\left(\omega_n^{n}\right)^{p-q}}{1-\omega_n^{(p-q)}}
\end{aligned}$$

Notemos que:

$$p - q \in \{-(n-1), \ldots, -1, 1, \ldots, n-1\} \Rightarrow n \nmid p - q \Rightarrow \omega_n^{p-q} \neq 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{1 - 1^{p-q}}{1 - \omega_n^{(p-q)}} = 0$$

Finalmente:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = 0.$$

□

Problema 1.3.5. *Calcule también la suma* $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-pk}$

Solución.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-pk} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^{p-p}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n.$$

□

Escriba la fórmula general usando la delta de Kronecker

Solución.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{pk} \omega_n^{-qk} = n\delta_{p,q}$$

Donde:

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad p = q \\ 0, & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

□

1.4. Matriz de Fourier

En esta sección se presenta la matriz de Fourier de orden N, la cual corresponde a la matriz de Vandermonde de las raíces n-ésimas de 1 (raíces de unidad), las matrices de Fourier son muy importantes en Teoría de la Señal, Comunicaciones Digitales, análisis de series de tiempo, entre otras aplicaciones.

La matriz de Fourier se define como

$$\Omega_N = \left[\omega_N^{mk}\right]_{m,k=0}^{N-1}$$

Por ejemplo,

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix}$$

La matriz de Fourier inversa se calcula mediante la ecuación:

$$\Omega_N^{-1} = \frac{1}{N} \left[\omega_N^{-mk}\right]_{m,k=0}^{N-1}$$

Para obtener la matriz inversa de Fourier no es necesario calcular el determinante del sistema. Esto es una ventaja muy importante cuando se utiliza la matriz de Fourier. Para el ejemplo anterior se tiene que:

$$\Omega_4^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^{-1} & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-3} \\ \omega_4^0 & \omega_4^{-2} & \omega_4^{-4} & \omega_4^{-6} \\ \omega_4^0 & \omega_4^{-3} & \omega_4^{-6} & \omega_4^{-9} \end{bmatrix}$$

A continuación se hará mención de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) cuya entrada es una secuencia finita de números reales o complejos, de modo que es ideal para procesar información almacenada en soportes digitales. En particular, la TDF se utiliza comúnmente en procesado digital de señales y otros campos relacionados dedicados a analizar las frecuencias que contiene una señal muestreada, también para resolver ecuaciones diferenciales parciales, y para llevar a cabo operaciones como convoluciones o multiplicaciones de enteros largos.

En el procesamiento digital de señales la TDF permite evaluar la transformada de Fourier de secuencias de duración finita. La TDF es una secuencia compleja que es obtenida por medio de muestrear un periodo de la transformada de Fourier de la señal a un número finito de puntos de frecuencia, es decir, que corresponde a muestras igualmente espaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier de la señal discreta. La TDF es importante por dos razones. Primero, permite determinar el contenido frecuencial de la señal de voz, o sea, realizar análisis espectral. La segunda razón de importancia es realizar operaciones de filtrado en el dominio de la frecuencia. La eficiencia es la razón principal por la cual se procesan las señales en el dominio de la frecuencia.

1.5. Transformada de Fourier

Como se vió la transformada de Fourier goza de una multitud de aplicaciones en muchas áreas de la ciencia e ingeniería, esta transformada discreta está definida como la secuencia de frecuencia-discreta de duración-finita que es obtenida de muestrear un periodo de la transformada de Fourier. Este muestreo es convencionalmente hecho a N puntos igualmente espaciados sobre un periodo. La TDF se define de la siguiente manera.

Definición 1.5.1. *La transformada de Fourier $\mathcal{F}_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ se define mediante la siguiente fórmula:*

$$\mathcal{F}_n(a) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_n^{kj} \right]_{j=0}^{n-1}.$$

1.6. Transformada inversa a la transformada discreta de Fourier

La TDF cumple el teorema de inversión cuya idea es que dada una función $\mathcal{F}$, la transformada de Fourier inversa aplicada a la transformada de Fourier de $\mathcal{F}$ resulta en la función original, en símbolos: Se puede demostrar que $\mathcal{F}_n$ es invertible y

$$\mathcal{F}_n^{-1}(b) = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=0}^{n-1} b_j \omega_n^{-kj} \right]_{k=0}^{n-1}.$$

1.7. Implementación en lenguaje Mathematica

```
TDF[v_] := Module[
  {n = Length[v], wn, tdf, j},
  tdf = Table[0, {n}];
  wn = N[Exp[-(2*Pi*\[ImaginaryI])/
      n]];(*Calcula las n raíces de la unidad*)
  For[j = 0, j <= n - 1, j++,
   tdf[[j + 1]] =
    Sum[v[[k + 1]]*wn^(k*j), {k, 0,
      n - 1}]]; (*Calcula la transformada como multiplicación de la \
matriz de Fourier por el vector*)
  tdf]
```

Un factor muy importante para este tipo de aplicaciones es que la TDF puede ser calculada de forma eficiente en la práctica utilizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o TRF (Fast Fourier Transform), el cuál será el tema principal del siguiente capítulo.

Capítulo 2

Transformada rápida de Fourier

Con el fin de implementar en forma práctica la Transformada Discreta de Fourier mediante el uso de computadores, se hace necesario disminuir su costo computacional. A mediados de la década del sesenta J.W Cooley y J.W Tukey desarrollaron un algoritmo denominado la Transformada Rápida de Fourier (TRF). La TRF elimina información redundante que existe en la DFT, ya que esta explota las propiedades de periodicidad y simetría del factor de fase W_N.

2.1. Algoritmo TRF

Si $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n$, el cálculo directo de $\Omega_n \mathbf{X}$ requiere obviamente n^2 multiplicaciones de números complejos (cada elemento de Ω_n se multiplica por uno de $\mathbf{X}$). El algoritmo de la transformada rápida de Fourier (TRF), permite reducir rápidamente este costo operativo hasta $n \log n$. El ahorro es ciertamente importante, pues para $n = 2^{10} = 1024$ se pasa de un millón de operaciones a menos de 5000.

La versión que vamos a estudiar es la mas habitual y corresponde al caso en que $n = 2^m$, es decir, que la dimensión del espacio es una potencia de 2.

2.2. Algoritmo de Cooley y Tuckey

La idea básica es aprovechar la gran cantidad de operaciones que se repiten en los cálculos y aplicar una técnica de diseño de algoritmos que se conoce como divide y vencerás. Se comienza por dividir el vector $\mathbf{X}$ de longitud $n = 2^m$ en dos vectores de tamaño par:

$$\mathbf{X}^P = (x_0, x_2, \ldots, x_{n-2})^t, \quad y \quad \mathbf{X}^I = (x_1, x_3, \ldots, x_{n-1})^t$$

y finalmente reconstruiremos el vector transformado $\mathbf{X}$ a partir de éstos dos

Proposición 2.2.1. *En la situación anterior las $\frac{n}{2}$ primeras y las $\frac{n}{2}$ últimas componentes* *de $\mathbf{X}$ están dadas por*

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^P + \omega_n^k \mathbf{X}_k^I, \quad k = 0, 1, \ldots \frac{n}{2} - 1 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{X}_{\frac{n}{2}+k} = \mathbf{X}_k^P - \omega_n^k \mathbf{X}_k^I, \quad k = 0, 1, \ldots \frac{n}{2} - 1 \tag{2.2}$$

Demostración. Para $k = 0, 1, \ldots \frac{n}{2} - 1$, tenemos que:

$$\mathbf{X}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{jk} x_j$$

y agrupando por separado en esta suma los términos con j par e impar, tenemos:

$$\mathbf{X}_k = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{(2j+1)k} x_{2j+1}$$

y como $\omega_n^2 = \omega_{\frac{n}{2}}$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_k &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{(2j+1)k} x_{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2jk} \omega_n^k x_{2j+1} \\
\mathbf{X}_k &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{jk} x_j^P + \omega_n^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{jk} x_j^I
\end{aligned}$$

Esta igualdad prueba (1) pues las expresiones del segundo miembro son totalmente válidas para $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ y evidentemente las sumas coinciden con las componentes $k-$ésimas de $\mathbf{X}^P$ y $\mathbf{X}^I$ respectivamente.

Para los índices $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \ldots, n-1$, que escribiremos en la forma $\frac{n}{2}+k$ con $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}-1$, siguiendo el mismo proceso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{\frac{n}{2}+k} &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2j(\frac{n}{2}+k)} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{(2j+1)(\frac{n}{2}+k)} x_{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2j\frac{n}{2}} \omega_n^{2jk} x_{2j} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2j\frac{n}{2}} \omega_n^{2jk} \omega_n^{\frac{n}{2}} \omega_n^k x_{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{j\frac{n}{2}} \omega_{\frac{n}{2}}^{jk} x_j^P + \omega_n^{\frac{n}{2}} \omega_n^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{j\frac{n}{2}} \omega_n^{jk} x_j^I
\end{aligned}$$

pero $\omega_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} = 1$ y $\omega_n^{\frac{n}{2}} = -1$, por lo tanto

$$\mathbf{X}_{\frac{n}{2}+k} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_{\frac{n}{2}}^{jk} x_j^P - \omega_n^k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \omega_n^{2jk} x_j^I$$

□

La esencia del algoritmo termina aquí. Se reemplaza la tarea de calcular una transformada $n-$dimensional (cuando n es par) por la de dos dimensiones $(\frac{n}{2})$. Como $\frac{n}{2}$ también es par, podemos calcular cada una de ellas a partir de dos transformadas $\frac{n}{4}$-dimensionales y de forma recurrente reduciremos el cálculo de Ω_n al calcular un buen número de transformadas de dos elementos que no necesitan ninguna multiplicación.

2.3. Número de operaciones en la TRF

Denotamos por $C(N)$ el número de operaciones necesarias para multiplicar por Ω_N.

Para el número de operaciones necesarias se obtiene la ecuación

$$C(N) = 2C\left(\frac{N}{2}\right) + 2N, \tag{2.3}$$

con la condición inicial

$$C(1) = 1.$$

Para simplicidad suponemos que $N = 2^k$. Se puede ver que la solución es

$$C(2^k) = 2k \cdot 2^k,$$

es decir,

$$C(N) = 2N \log_2(N). \tag{2.4}$$

2.4. Implementación en Mathematica

La función que genera la Transforma Discreta de Fourier es:

```
TDF[v_] := Module[
  {n = Length[v], wn, tdf, j},
  tdf = Table[0, {n}];
  wn = N[Exp[-(2*Pi*\[ImaginaryI])/n]];(*Raíz n-ésima de la unidad*)
  For[j = 0, j <= n - 1, j++,
   tdf[[j + 1]] =
    Sum[v[[k + 1]]*wn^(k*j), {k, 0,
      n - 1}]];(*Aplica la transformada multiplicando la raíz n-ésima \
de la unidad por los componentes del vector*)
  tdf]
```

La función que implementa el algortimo de la TRF es:

```
TRF[v_] := Module[
  {n = Length[v], X, k, e, o},
  If[n == 1,
   X = TDF[v],(*Caso base, calcula la TDF*)
   X = Table[0, {n}];
   e = TRF[v[[;; ;; 2]]]; (*Aplica recursión en entradas pares*)
   o = TRF[v[[2 ;; ;; 2]]]; (*Aplica recursión en entradas impares*)

   For[k = 0, k <= (n/2) - 1, k++,
    X[[k + 1]] =
     e[[k + 1]] +
      N[Exp[-2 Pi \[ImaginaryI] (k/n)]]*
       o[[k + 1]];(*Calcula para las primeras entradas del vector*)
    X[[k + (n/2) + 1]] =
     e[[k + 1]] - N[Exp[-2 Pi \[ImaginaryI] (k/n)]]*o[[k + 1]];
    (*Lado izquierdo del vector*)
    ];
   ];
  X]
```

Capítulo 3

Matrices de Toeplitz

El propósito de los capítulos posteriores es presentar las herramientas necesarias para abordar uno de los problemas básicos del álgebra lineal numérica y de muchos procesos de la ingeniería y de la ciencia: la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Muchos algoritmos -métodos o procedimientos numéricos esencialmente orientados a su implementación en un ordenardor- que buscan dar solución numérica a un determinado modelo matemático -resultado de la representación formal del comportamiento de los elementos o procesos que definen o integran un proyecto, fenómeno o actividad-, deben resolver sistemas de ecuaciones lineales de mayor o menor tamaño.

La resolución de un sistema de ecuaciones lineales aparece también con mucha frecuencia como un subproblema de un problema más complicado de análisis numérico; tal ocurre por ejemplo cuando se resuelve iterativamente un sistema de ecuaciones no lineales por el método de Newton-Raphson, donde en cada etapa de ese proceso iterativo se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales, o en procesos de optimización tanto lineales como no lineales.

Los sistemas de ecuaciones presentan con frecuencia una estructura muy especial que puede ser objeto de tratamiento particular. Por ejemplo, los problemas de interpolación polinomial, que conducen de manera natural a sistemas de ecuaciones con una matriz de coeficientes de Vandermonde, o como una de las temáticas del presente; los problemas derivados de la modelización de series temporales, que conducen a sistemas de ecuaciones en los que la matriz de coeficientes son del tipo de las denominadas de Toeplitz. Por ello a continuación se introducen definiciones y propiedades de estas matrices que nos conducirán a cumplir el propósito de los capítulos posteriores.

3.1. Matrices de Toeplitz

En 1911 Otto Toeplitz obtuvo una caracterización para un tipo especial de matrices, hoy llamadas matrices de Toeplitz, las cuales son matrices cuadradas con todas sus diagonales de izquierda a derecha paralelas numéricamente.

Una matriz de Toeplitz T de orden n está dada por:

$$T_n = \left[t_{j-k}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

T_3 está dada por:

$$T_3 = \begin{bmatrix} t_{0-0} & t_{0-1} & t_{0-2} \\ t_{1-0} & t_{1-1} & t_{1-2} \\ t_{2-0} & t_{2-1} & t_{2-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Cambiamos la notación para las entradas de la matriz de Toeplitz de tal manera que los índices no sean negativos sino empiecen con 0, por ejemplo:

$$T_3 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 & u_0 \\ u_3 & u_2 & u_1 \\ u_4 & u_3 & u_2 \end{bmatrix}.$$

Si se expresan u a través de t y viceversa, y si el orden de la matriz es n, entonces:

$$u_k = t_{k-(n-1)}$$

$$t_k = u_{k+(n-1)}$$

3.2. Producto de una matriz de Toeplitz por un vector, $n = 3$

Sea $a \in \mathbb{C}^3$ y sea $b = T_n a$. Exprese las componentes de b a través de las entradas de T_n y las componentes de a. Primero use la notación t_{j-k}, luego $u_?$:

$$\begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned} b_0 &= t_0a_0 + t_{-1}a_1 + t_{-2}a_2 = u_2a_0 + u_1a_1 + u_0a_2 \\ b_1 &= t_1a_0 + t_0a_1 + t_{-1}a_2 = u_3a_0 + u_2a_1 + u_1a_2 \\ b_2 &= t_2a_0 + t_1a_1 + t_0a_2 = u_4a_0 + u_3a_1 + u_2a_2 \end{aligned}$$

3.3. Producto de una matriz de Toeplitz por un vector

Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = T_n a$. Exprese las componentes de b a través de las entradas de T_n y las componentes de a. Primero use la notación t_k, luego u_k:

$$b_j = \sum_{k=0}^{n-1} t_{j-k}\ a_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{(n-1)+j-k}\ a_k$$

3.4. Producto de los polinomios

Sean P y Q polinomios con coeficientes u_j y v_j:

$$P(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4 + \ldots, \qquad Q(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + v_3 z^3 + v_4 z^4 + \ldots.$$

Denotemos por w_j al coeficiente de z^j en el polinomio $P(z)Q(z)$:

$$P(z)Q(z) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + w_4 z^4 + \ldots.$$

Exprese w_j a través de los coeficientes u y v:

$$w_0 = u_0\ v_0$$

$$w_1 = u_1\ v_0 + u_0\ v_1$$

$$w_2 = u_2\ v_0 + u_1\ v_2 + u_0\ v_2$$

$$w_3 = u_3\ v_0 + u_2\ v_1 + u_1\ v_2 + u_0\ v_3$$

$$w_4 = u_4\ v_0 + u_3\ v_1 + u_2\ v_2 + u_1\ v_3 + u_0\ v_4$$

En general,

$$w_j = \sum_{k=0}^{j} u_{j-k}\ v_k$$

Sea T_n una matriz de Toeplitz, sea $v \in \mathbb{C}^n$ y sea $b = T_n v$. Se puede definir $b \in \mathbb{C}^n$ de tal manera que las componentes del vector sean ciertos coeficientes del producto de los polinomios

$$P(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} u_j z^j, \qquad Q(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} v_j z^j.$$

Capítulo 4

Valores y vectores propios de matrices circulantes

Las matrices circulantes son una clase de matrices particularmente tratable porque las inversas, productos y sumas también son circulantes, y por lo tanto normales y de construcción directa. Además, los valores y vectores de tales matrices pueden ser calculados fácil y exactamente. Por lo que en esta sección se hablará de ello.

4.1. Matrices Circulantes

Una matriz circulante C es una matriz de Toeplitz que tiene la forma

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & & \vdots \\ & c_{n-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & c_2 \\ & & & & & c_1 \\ c_1 & \cdots & & c_{n-1} & & c_0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Note que los elementos de cada fila de C, son idénticos a los de la fila anterior pero movidos una posición a la derecha. Es fácil ver que la suma de matrices circulantes es de nuevo una matriz circulante; lo mismo ocurre cuando se multiplica por un escalar.

4.1.1. Propiedades de las matrices circulantes

1. Como polinomios en la misma matriz conmutan (respecto al producto), entonces el producto de matrices circulantes conmuta. Más aún, el producto de circulantes es de nuevo una circulante.

2. Como C y C^* conmutan entonces toda matriz circulante es normal.

3. De (1) y (2) se obtiene que si A es circulante y $k \in \mathbb{Z}_+$ entonces A^k también es circulante.

La estructura puede ser generalizada notando que la entrada (k,j) de C, $C_{k,j}$ está dada por

$$C_{k,j} = c_{(j-k) \mod n}$$

4.2. Valores y vectores propios

Definición 4.2.1. *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio o autovalor de A si existe algún vector no nulo $u \in K^n$ tal que $Au = \lambda u$.*

El vector u anterior se dice vector propio o autovector de A, asociado al autovalor λ.

Así pues, los vectores propios de una matriz A son aquellos vectores (no nulos) que se transforman mediante A en proporcionales a sí mismos, siendo los valores propios las correspondientes constantes de proporcionalidad.

Aplicando esta definición y la teoría de los capítulos anteriores, se tiene que: Los valores propios ψ_k y los vectores propios $y^{(k)}$ de C son soluciones de

$$Cy = \psi y \tag{4.2}$$

o, de manera equivalente del sistema de n ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{n-m+k} y_k + \sum_{k=m}^{n-1} c_{k-m} y_k = \psi y_m; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.3}$$

Cambiando los subíndices de las sumas, resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k y_{k+m} + \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k y_{k-(n-m)} = \psi y_m; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.4}$$

Se puede resolver el sistema de ecuaciones en diferencias de la misma forma que se resuelven ecuaciones diferenciales. Ya que la ecuación es lineal con coeficientes constantes suponemos que $y_k = \rho^k$ es una solución (análoga a $y(t) = e^{st}$ en ecuaciones diferenciales). Sustituimos en (4.4) y cancelando ρ^m resulta

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} x_k \rho^k + \rho^{-n} \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k \rho^k = \psi.$$

Entonces si elegimos $\rho^{-n} = 1$, es decir, ρ es una de n raíces de la unidad, tenemos el valor propio

$$\psi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k \tag{4.5}$$

con el correspondiente vector propio

$$y = n^{-\frac{1}{2}}(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1})^T. \tag{4.6}$$

Eligiendo ρ_m como la n-ésima raíz de la unidad, $\rho_m = e^{-\frac{2\pi i m}{n}}$, tenemos el valor propio

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-\frac{2\pi i m k}{n}} \tag{4.7}$$

y el vector propio

$$y^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(1, e^{-\frac{2\pi i m}{n}}, \ldots, e^{-\frac{2\pi i m(n-1)}{n}}\big)^T.$$

Luego, de la definición de valores propios y vectores propios,

$$Cy^{(m)} = \psi_m y^{(m)}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.8}$$

La ecuación (4.7) resulta ser la Transformada Discreta de Fourier de la sucesión $\{c_k\}$. Podemos recuperar la sucesión $\{c_k\}$ de $\{\psi_k\}$ a través de la inversa de la transformada. En este caso

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} \psi_m e^{2\pi i \ell m} &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(c_k e^{-\frac{2\pi i m k}{n}} e^{\frac{2\pi i \ell m}{n}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i(\ell-k)m}{n}} = c_\ell, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde usamos la ortogonalidad de los exponenciales:

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i m k}{n}} = n\delta_{k \mod n} = \begin{cases} n, & k \mod n = 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{4.10}$$

donde δ es la delta de Kronecker,

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Entonces, los valores propios de una matriz circulante son los valroes de la TDF de la primera columna de la matriz circulante, y de manera equivalente la primera columna de una matriz circulante equivale a la inversa de la TDF de los valores propios.

La ecuación (4.8) puede ser escrita en forma matricial como

$$CU = U\Psi, \tag{4.11}$$

donde

$$\begin{aligned} U &= [y^{(0)}|y^{(1)}|\ldots|y^{(n-1)}] \\ &= n^{-\frac{1}{2}}[e^{-\frac{2\pi imk}{n}}; m,k = 0,1,\ldots,n-1] \end{aligned}$$

es la matriz que contiene los vectores propios como columnas y $\Psi = \mathrm{diag}(\psi_k)$ es la matriz diagonal con elementos $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$. Además, (4.10) implica que U es unitaria. Denotemos el elemento (k,j) de UU^* como $a_{k,j}$ y observamos que $a_{k,j}$ sera el producto de la k-ésima columna de U, el cual es $\{\frac{e^{-\frac{2\pi imk}{n}}}{\sqrt{n}}; m = 0,1,\ldots,n-1\}$ veces la j-ésima columna de U^*, la cual es $\{\frac{e^{-\frac{2\pi imj}{n}}}{\sqrt{n}}; m = 0,1,\ldots,n-1\}$, entonces

$$a_{k,j} = \frac{1}{n}\sum_{m=0} n-1 e^{-\frac{2\pi im(j-k)}{n}} = \delta_{(k-j) \mod n}$$

así $UU^* = I$. De manera similar, $U^*U = I$, ya que (4.11) implica que

$$c = U\Psi U^* \tag{4.12}$$

$$\Psi = U^*CU. \tag{4.13}$$

Capítulo 5

Ecuaciones de Yule-Walker

En 1946, Levinson presentó un procedimiento iterativo para determinar la función ponderatriz de un filtro lineal. Este procedimiento es ahora conocido como el algoritmo de Levinson Durbin.

Según Akaike (1973): Este procedimiento es problablemente la contribución más significativa en el campo del análisis con computador digital de series temporales.

Este algoritmo fue utilizado por Durbin (1960) para la solución de las ecuaciones de Yule Walker en el caso escalar. Posteriormente Whittle (1963), lo extendió para el caso multivariable. Los problemas conectados con este algoritmo como inversión de matrices de Toeplitz fueron estudiadas por Akaike (1973). La estimación espectral autorregresiva por Burg (1967, 1975) y la estimación del orden de modelos ARMA por Akaike (1970), Shibata (1976) y Hannan (1980).

Ya que el algoritmo de Levinson se desarrolló en el contexto del diseño de un filtro y predicción del mismo, y ésta era un marco muy restringido, se olvidó rápidamente y por eso es mucho más conocido como el argoritmo de Durbin, aunque los dos métodos son esencialmente el mismo.
La ecuación de Yule-Walker se define como:

$$T_n x = U_n$$

donde $T_n = \left[t_{k-j}\right]_{k,j=1}^{n}$ es una matriz de Toeplitz (real y simétrica), y el lado derecho del sistema tiene la siguiente forma:

$$U_n = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Este tipo de sistemas es utilizado en el procesamiento y análisis de señales, procesos estocásticos estacionarios, análisis de series de tiempo, etc.

W. Trench descubrió como utilizar la solución de esta ecuación para calcular

$$q_n = \frac{\det(T_n)}{\det(T_{n-1})}$$

5.1. Relación recursiva entre los sistemas de Yule-Walker

Se consideran los sistemas $T_n x = U_n$ donde $T_n = \left[t_{i-j}\right]_{i,j=1}^{n}$ es real y simétrica ($t_j \in \mathbb{R}$ y $t_{-j} = t_j$) y $U_n = \left[t_i\right]_{i=1}^{n}$.

Notación:

$$x := \text{ solución de } T_n x = U_n$$

$$\tilde{x} := \text{ solución de } T_{n-1}\tilde{x} = U_{n-1}$$

$$q_n := \frac{\det(T_n)}{\det(T_{n-1})} \qquad q_{n+1} := \frac{\det(T_n + 1)}{\det(T_n)}$$

Buscamos expresar x y q_{n+1} a través de $\tilde{x}$ y q_n respectivamente.

Consideramos el caso $n = 4$ y después generalizamos los resultados obtenidos:

$$\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_0 & t_1 & t_2 \\ t_0 & t_1 & t_0 & t_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema hacemos un cambio de variable:

$$x = Cy$$

donde C es una matriz tal que:

$$T_4 C = \left[\begin{array}{ccc|c} t_0 & t_1 & t_2 & 0 \\ t_1 & t_0 & t_1 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & 0 \\ \hline t_3 & t_2 & t_1 & * \end{array}\right]$$

Para obtener lo anterior, la matriz C se busca en la forma:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$T_4 C = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 - \lambda_3 t_0 - \lambda_2 t_1 - \lambda_1 t_2 \\ t_1 & t_0 & t_1 & t_2 - \lambda_3 t_1 - \lambda_2 t_0 - \lambda_1 t_1 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_1 - \lambda_3 t_2 - \lambda_2 t_1 - \lambda_1 t_0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 - \lambda_3 t_3 - \lambda_2 t_2 - \lambda_1 t_1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar las entradas indicadas, λ_1 , λ_2 y λ_3 deben ser solución del sistema:

$$\begin{aligned} t_0\lambda_1 + t_1\lambda_2 + t_2\lambda_3 &= t_1 \\ t_1\lambda_1 + t_0\lambda_2 + t_1\lambda_3 &= t_2 \\ t_2\lambda_1 + t_1\lambda_2 + t_0\lambda_3 &= t_3 \end{aligned}$$

que se escribe

$$T_3 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = U_3$$

cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{bmatrix}.$$

De aquí

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tilde{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & -\tilde{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & -\tilde{x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_4 C = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & 0 \\ t_1 & t_0 & t_1 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 - \tilde{x_3} t_3 - \tilde{x_2} t_2 - \tilde{x_1} t_1 \end{bmatrix}$$

Se observa que $\det(C) = 1$ y la matriz $T_3 C$ es triangular inferior por bloques:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tilde{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & -\tilde{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & -\tilde{x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_4 C = \left[\begin{array}{ccc|c} t_0 & t_1 & t_2 & 0 \\ t_1 & t_0 & t_1 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & 0 \\ \hline t_3 & t_2 & t_1 & t_0 - \tilde{x_3} t_3 - \tilde{x_2} t_2 - \tilde{x_1} t_1 \end{array}\right]$$

Entonces

$$\det(T_4) = \det(T_4 C) = det(T_3)(t_0 - \tilde{x_1} t_1 - \tilde{x_2} t_2 - \tilde{x_3} t_3).$$

De aquí hallamos el cociente de los determinantes

$$q_4 := \frac{\det(T_4)}{det(T_3)} = t_0 - \tilde{x_1}t_1 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_3}t_3.$$

En general se tiene

$$\boxed{q_n = \tfrac{\det(t_n)}{det(T_{n-1})} = t_0 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\tilde{x_j}.}$$

5.2. Solución del sistema $T_nCy = U_n$

Dado el cambio de variable $x = Cy$ se tiene $T_4Cy = U_4$:

$$\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & 0 \\ t_1 & t_0 & t_1 & 0 \\ t_2 & t_1 & t_0 & 0 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 - \tilde{x_3}t_3 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_1}t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede ver que $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ es solución del sistema $\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 \\ t_1 & t_0 & t_1 \\ t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$ por lo tanto $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{bmatrix}$.

De la última ecuación del sistema

$$\tilde{x_1}t_3 + \tilde{x_2}t_2 + \tilde{x_3}t_1 + y_4(t_0 - \tilde{x_3}t_3 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_1}t_1) = t_4$$

despejamos

$$y_4 = \frac{t_4 - \tilde{x_1}t_3 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_3}t_1}{t_0 - \tilde{x_3}t_3 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_1}t_1} = \frac{t_4 - \tilde{x_1}t_3 - \tilde{x_2}t_2 - \tilde{x_3}t_1}{q_4}.$$

Expresión de x a través de $\tilde{x}$

Dado el cambio de variable $x = Cy$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tilde{x_3} \\ 0 & 1 & 0 & -\tilde{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & -\tilde{x_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Calculamos primero la variable x_4 y después las demás:

$$\begin{aligned}
x_4 &= y_4 = \frac{t_3 - \tilde{x_1} t_3 - \tilde{x_2} t_2 - \tilde{x_3} t_1}{q_4}, \\
x_1 &= y_1 - \tilde{x_3} y_4 = \tilde{x_1} - \tilde{x_3} x_4, \\
x_2 &= y_2 - \tilde{x_2} y_4 = \tilde{x_2} - \tilde{x_2} x_4, \\
x_3 &= y_3 - \tilde{x_1} y_4 = \tilde{x_3} - \tilde{x_1} x_4.
\end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{\left(t_n - \sum_{j=1}^{n-1} t_j \tilde{x}_{n-j}\right)}{q_n}, \\
x_i &= \tilde{x}_i - \tilde{x}_{n-i} x_n \quad (i = 1, \ldots, n-1).
\end{aligned}$$

5.3. Expresión recursiva de q_{n+1} a través de q_n

Ahora dado lo anterior podemos calcular

$$\begin{aligned}
q_5 &= \frac{\det(t_5)}{\det(T_4)} \\
&= t_0 - t_1 x_1 - t_2 x_2 - t_3 x_3 - t_4 x_4 \\
&= t_0 - t_1(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3 x_4) - t_2(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_2 x_4) - t_3(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1 x_4) - t_4 x_4 \\
&= t_0 - t_1 \tilde{x}_1 - t_2 \tilde{x}_2 - t_3 \tilde{x}_3 - (t_4 - t_1 \tilde{x}_3 - t_2 \tilde{x}_2 - t_3 \tilde{x}_1) x_4 \\
&= q_4(1 - x_4^2)
\end{aligned}$$

Entonces, se puede hallar q_{n+1} con q_n con la correspondencia:

$$q_{n+1} = (1 - x_n^2) q_n$$

5.4. Algoritmo de Levinson-Durbin para resolver el sistema $T_n x = U_n$

Entrada: $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$
$x_{11} = \frac{t_1}{t_0}$; $q_1 = t_0$
Para $m = 2, \dots, n-1$:
$q_m = q_{m-1} \cdot (1 - x^2_{m-1,m-1})$
$x_{mm} = \left(t_m - \sum_{j=1}^{m-1} t_{m-j} x_{j,m-1}\right)/q_m$
Para $j = 1, \dots, m-1 : x_{jm} = x_{j,m-1} - x_{mm} x_{m-j,m-1}$
Salida: Vector$[x_{1n}, \dots, x_{nn}]$

5.5. Implementación en Mathematica

```
LD[t_] := Module[
  {x, xprev, n = Length[t] - 1, q, m, j},
  x = Table[0, {n}]; q = x;
  x[[1]] = t[[2]]/t[[1]]; q[[1]] = t[[1]];(*primer caso del algoritmo*)

  xprev = x; (*Vector auxiliar par control*)
  For[m = 2, m <= n, m++,
   q[[m]] = q[[m - 1]]*(1 - xprev[[m - 1]]^2);
   x[[m]] = (t[[m + 1]] -
       Sum[t[[k + 1]] xprev[[m - k]], {k, 1, m - 1}])/q[[m]];
   For[j = 1, j <= m - 1, j++,
    x[[j]] = xprev[[j]] - x[[m]]*xprev[[m - j]]
    ];
   xprev = x; (*Actualiza la salida*)
   ];
  x]
```

Capítulo 6

Modelo Lineal Autorregresivo

Como ya mencionó en el capítulo anterior, el algoritmo de Levinson Durbin es una de las aplicaciones dentro del análisis de series de tiempo, a continuación se presenta el desarrollo de esta temática, en particular de modelos autorregresivos.

6.1. Series Temporales

Una serie temporal será una sucesión de valores de una variable obtenidos de manera secuencial durante el tiempo. Así, desde el punto de vista de los procesos estocásticos, diremos que

Definición 6.1.1. *Una serie temporal es una realización parcial de un proceso estocástico de parámetro tiempo discreto.*

6.2. Características de un proceso estocástico

Del mismo modo que en una variable unidimensional X, podemos calcular su media, su varianza y otras características, y en variables n-dimensionales obtenemos un vector de medias, matriz de covarianzas, etc., en un proceso estocástico podemos obtener algunas características que describen su comportamiento: medias, varianzas y covarianzas. Puesto que las características del proceso pueden variar a lo largo de t estas características no serán parámetros sino que serán funciones de t. Así:

Definición 6.2.1. *Llamaremos función de medias del proceso a una función de t que proporciona las medias de las distribuciones marginales para cada instante t*

$$\mu_t = E(X_t)$$

Definición 6.2.2. *Llamaremos función de varianzas del proceso a una función de t que proporciona las varianzas de las distribuciones marginales para cada instante t*

$$\sigma_t^2 = Var(X_t)$$

Definición 6.2.3. *Llamaremos función de autocovarianzas del proceso a la función que proporciona la covarianza existente entre dos instante de tiempo cualesquiera:*

$$Cov(t,s) = Cov(s,t) = Cov(X_t, X_s)$$

y por último,

Definición 6.2.4. *Llamaremos función de autocorrelación a la estandarización de la función de covarianzas:*

$$\rho_{t,s} = \frac{Cov(t,s)}{\sigma_t, \sigma_s}$$

En general, estas dos últimas funciones dependen de dos parámetros (dos instantes). Una condición de estabilidad que aparece en muchos fenómenos es que la dependencia sólo dependa, valga la redundancia, de la "distancia" entre ellos y no del instante considerado. En estos casos tendremos:

$$Cov(t, t+j) = Cov(s, s+j) = \gamma_j \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

6.3. Procesos estocásticos estacionarios

En una primera aproximación, llamaremos estacionarios a aquellos procesos estocásticos que tengan un comportamiento constante a lo largo del tiempo.

Definición 6.3.1. *Diremos que un proceso es estacionario en sentido estricto si al realizar un mismo desplazamiento en el tiempo de todas las variables de cualquier distribución conjunta finita, resulta que esta distribución no varía, es decir:*

$$F(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r}) = F(X_{i_1} + j, X_{i_2} + j, \ldots, X_{i_r} + j)$$

para todo conjunto de índices $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ *y todo* j.

Definición 6.3.2. *Diremos que un proceso estocástico es estacionario en sentido débil si mantiene constantes todas sus características lo largo del tiempo, es decir, si para todo t:*

1. $\mu_t = \mu$.

2. $\sigma_t^2 = \sigma^2$.

3. $Cov(t, t+j) = Cov(s, s+j) = \gamma_j \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Definición 6.3.3. *Se denomia función de autocorrelación simple a dicha función:*

$$\rho_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \frac{\gamma_j}{\sigma^2}$$

Esta función es simétrica ($\rho_j = \rho_{-j}$).

6.4. Modelos Auto-Regresivos de orden p, AR(p)

Al tratar de representar la influencia que hechos pasados tienen sobre el presente (y en consecuencia sobre el futuro) de un proceso estocástico, podemos considerar diferentes expresiones alternativas. Una de ellas consiste en colocar el valor actual del proceso como dependiente de modo lineal de valores pasados del propio proceso, más una perturbación aleatoria, que supondremos normalmente distribuida, que evite que el modelo sea determinista:

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

Un elemento que resulta de gran interés en estudio de estos modelos procesos lineales es el llamado operador retardo B. Tal operador actúa sobre un término de un proceso estocástico reduciendo el índice temporal en una unidad:

$$BX_t = X_t - 1 \Rightarrow B^k X_t = X_{t-k}$$

y por tanto, un proceso autorregresivo puede expresarse en la forma:

$$\epsilon_t = (1 - a_1 B - a_2 B^2 - \cdots - a_p B^p) X_t$$

6.4.1. Determinación del orden y de los parámetros del modelo AR

Los dos problemas fundamentales que nos presentan los procesos autorregresivos son:

- Determinación del grado p y del polinomio autorregresivo.
- Una vez fijado este, determinar los parámetros a_i, del modelo.

Determinación de los parámetros del modelo

Consideremos un proceso $AR(p)$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \cdots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t \tag{6.1}$$

multiplicando por X_{t-k}

$$X_t X_{t-k} = a_1 X_{t-1} X_{t-k} + a_2 X_{t-2} X_{t-k} + \cdots + a_p X_{t-p} X_{t-k} + \epsilon_t X_{t-k} \tag{6.2}$$

Tomando esperanzas

$$E[X_t X_{t-k}] = a_1 E[X_{t-1} X_{t-k}] + a_2 E[X_{t-2} X_{t-k}] + \cdots + a_p E[X_{t-p} X_{t-k}] + E[\epsilon_t X_{t-k}]$$

Tenemos que

$$\gamma_k = a_1 \gamma_{k-1} + a_2 \gamma_{k-2} + \cdots + a_p \gamma_{k-p} \tag{6.3}$$

Dividiendo entre γ_0, tenemos

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = a_1 \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_0} + a_2 \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_0} + \cdots + a_p \frac{\gamma_{k-p}}{\gamma_0}$$

es decir,

$$\rho_k = a_1\rho_{k-1} + a_2\rho_{k-2} + \cdots + a_p\rho_{k-p} \quad k = 1, \ldots, p \tag{6.4}$$

Particularizando la ecuación anterior para $j = 1, 2, \ldots, p$ se obtiene un sistema de ecuaciones que relaciona las p primeras autocorrelaciones con los parámetros del proceso, conocido como ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a_1\rho_0 + a_2\rho_1 + a_3\rho_2 + \cdots + a_{p-1}\rho_{p-2} + a_p\rho_{p-1} \\ \rho_2 &= a_1\rho_1 + a_2\rho_0 + a_3\rho_1 + \cdots + a_{p-1}\rho_{p-3} + a_p\rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= a_1\rho_{p-1} + a_2\rho_{p-2} + a_3\rho_{p-3} + \cdots + a_{p-1}\rho_1 + a_p\rho_0 \end{aligned}$$

Ya que de $\gamma_k = \gamma_{-k}$ surge también $\rho_k = \rho_{-k}$.
Llamamos

$$\mathbf{a}^T = [a_i]_{i=1}^p = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_p \end{bmatrix} \quad \rho_p^T = [\rho_i]_{i=1}^p = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_p = [\rho_{p-k}]_{k,p=1}^p = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & \rho_0 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \rho_0 \end{bmatrix}$$

Matricialmente, tenemos el sistema:

$$\mathbf{R}_p\mathbf{a} = \rho_p \tag{6.5}$$

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & \rho_0 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Que se puede resolver usando el algoritmo de Levinson-Durbin.

Capítulo 7

Modificaciones de Trench del algoritmo de Levinson-Durbin

Las ecuaciones de Yule Walker modificadas pueden ser resueltas de una forma eficiente usando una extensión de la recursión de Levinson realizada por W. F. Trench, es por ello que a continuación se presentan las bases teóricas de lo antes mencionado.

7.1. Método de Trench para calcular valores propios de matrices de Toeplitz

Este método busca los ceros de la función racional

$$q_n(\lambda) = \frac{p_n(\lambda)}{p_{n-1}(\lambda)}, \tag{7.1}$$

donde

$$p_m(\lambda) = \det(T_m - \lambda I_m), \quad 1 \leq m \leq n$$

Para calcular los valores de $q_n(\lambda)$ se aplica el algoritmo de Levinson-Durbin para las matrices de Toeplitz

$$T_m - \lambda I_m \quad (1 \leq m \leq n-1) \tag{7.2}$$

7.2. Base teórica para el método de Trench

Partiendo de la ecuación de Yule-Walker, tenemos

$$U_{n-1} = [t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}]^T \tag{7.3}$$

Si λ no es un valor propio de T_{n-1}, denotmos por

$$X_{n-1}(\lambda) = [x_{1,n-1}(\lambda), \ldots, x_{n-1,n-1}(\lambda)]^T \tag{7.4}$$

a la solución de

$$(T_{n-1} - \lambda I_{n-1})X_{n-1}(\lambda) = U_{n-1} \tag{7.5}$$

Teorema 7.2.1. *Si λ no es valor propio de T_{n-1}, entonces*

$$q_n(\lambda) = t_0 - \lambda - U_{n-1}^T X_{n-1}(\lambda)$$

Si en la adición, λ es un valor propio de T_n, entonces el vector

$$Y_n(\lambda) := \left[\begin{array}{c} -1 \\ X_{n-1}(\lambda) \end{array} \right]$$

es vector propio asociado.

Demostración.

Para $q_n(\lambda)$ simplemente adecuamos las relaciones recursivas para el caso $T_n - \lambda I_n$. Ahora para demostrar que Y_n es vector propio se verifica que

$$T_n Y_n(\lambda) = \lambda Y_n(\lambda)$$

Lo que equivale a:

$$(T_n - \lambda I_n) Y_n(\lambda) = 0.$$

Tomando como muestra el caso $n = 3$, multiplicamos $(T_3 - \lambda I_3)$ por $Y_3(\lambda)$

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cc} t_0 - \lambda & U_2^T \\ U_2 & T_2 - \lambda I_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -1 \\ X_2(\lambda) \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} -(t_0 - \lambda) + U_2^T X_2(\lambda) \\ -U_2 + (T_2 - \lambda I_2) X_2(\lambda) \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c} q_3(\lambda) \\ -U_2 + U_2 \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Dado que λ es un valor propio $q_3(\lambda) = 0$.

Por lo tanto, si λ es valor propio de T_n, entonces

$$Y_n(\lambda) = \left[\begin{array}{c} -1 \\ X_{n-1}(\lambda) \end{array} \right]$$

es un vector propio asociado. $\square$

Bibliografía

[1] Barrantes H. *Introducción a la matemática*, Editorial Universidad Estatal a Distancia.

[2] Brockwell, P.& Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer.

[3] Churchill, R. V. (2004). *Variable compleja y aplicaciones*, McGraw-Hill.

[4] De la Fuente, J. L (1998), *Técnicas de cálculo para Sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación entera, 2 Edición* Editorial Reverté.

[5] Gray, R. M. (1975). *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*, Department of Electrical Engineering, Standford University, USA.

[6] Marsden J. E. & Hoffmann M. (2006). *Análisis básico de variable compleja*, Editorial Trillas.

[7] Pérez K. *Álgebra Superior I*, Editorial INTEC

[8] Trench, W. F. (1989). *Numerical solution of the eigenvalue problem for Hermitian Toeplitz matrices.*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 10.

[9] Wong, M. W. (2011). *Discrete Fourier Analysis*. Birkhäuser, Ontario