El producto de dos sigma-álgebras de Borel

Juan Carlos Jiménez Cervantes

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

27 de abril de 2020

Notación

Durante la presentación se mantendra la siguiente convención:
Sea X un conjunto, $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset 2^X$,

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{D}\}.$$

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,

$$\tau_1 \otimes \tau_2 := \{W \in 2^{X \times Y} \mid W = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \text{ donde } \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_1 \times \tau_2\},$$

sean $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ sus σ-álgebras de Borel correspondientes,

$$\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2 := \sigma(\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2).$$

Notación

Durante la presentación se mantendra la siguiente convención:
Sea X un conjunto, $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset 2^X$,

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{D}\}.$$

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,

$$\tau_1 \otimes \tau_2 := \{W \in 2^{X \times Y} \mid W = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \text{ donde } \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_1 \times \tau_2\},$$

sean $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ sus σ-álgebras de Borel correspondientes,

$$\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2 := \sigma(\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2).$$

Notación

Durante la presentación se mantendra la siguiente convención:
Sea X un conjunto, $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset 2^X$,

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{C} \ \wedge \ B \in \mathcal{D}\}.$$

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,

$$\tau_1 \otimes \tau_2 := \{W \in 2^{X \times Y} \mid W = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \text{ donde } \{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau_1 \times \tau_2\},$$

sean $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ sus σ-álgebras de Borel correspondientes,

$$\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2 := \sigma(\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2).$$

Diagrama

$$(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$$

Diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X,\tau_1),(Y,\tau_2) \arrow[r, "\text{Se pasa a las σ-álgebras de Borel}"] & (X,\mathscr{B}_1),(Y,\mathscr{B}_2) \arrow[d, "\substack{\text{Pasamos a la σ-álgebra} \\ \text{del producto de dos σ-álgebras}}"] \\
 & (X\times Y, \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2)
\end{tikzcd}
$$

Diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X,\tau_1),(Y,\tau_2) \arrow[r, "\text{Se pasa a las } \sigma\text{-álgebras de Borel}"] \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{Pasamos a la}\\ \text{topología producto}\end{array}"'] & (X,\mathscr{B}_1),(Y,\mathscr{B}_2) \arrow[dd, "\begin{array}{c}\text{Pasamos a la } \sigma\text{-álgebra}\\ \text{del producto de dos } \sigma\text{-álgebras}\end{array}"] \\
(X\times Y,\tau_1\otimes\tau_2) \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{Pasamos a la}\\ \sigma\text{-álgebra de Borel}\end{array}"'] & \\
(X\times Y,\mathscr{B}_{\tau_1\otimes\tau_2}) & (X\times Y,\mathscr{B}_1\bullet\mathscr{B}_2)
\end{tikzcd}
$$

Diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(X,\tau_1),(Y,\tau_2) \arrow[rr, "\text{Se pasa a las } \sigma\text{-álgebras de Borel}"] \arrow[d, "\substack{\text{Pasamos a la}\\ \text{topología producto}}"'] & & (X,\mathscr{B}_1),(Y,\mathscr{B}_2) \arrow[dd, "\substack{\text{Pasamos a la } \sigma\text{-álgebra}\\ \text{del producto de dos } \sigma\text{-álgebras}}"] \\
(X \times Y, \tau_1 \otimes \tau_2) \arrow[d, "\substack{\text{Pasamos a la}\\ \sigma\text{-álgebra de Borel}}"'] & & \\
(X \times Y, \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}) \arrow[rr, dash, "\substack{¿\mathscr{B}_{\tau_1\otimes\tau_2} \subset \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2?\\ ¿\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_{\tau_1\otimes\tau_2}?}"'] & & (X \times Y, \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2)
\end{tikzcd}
$$

Lema (Medibilidad de funciones continuas).

Sean $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ dos espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes.
Si $\mathcal{F}\supset\mathscr{B}_1$ es una σ-álgebra sobre X, entonces

$$C(X,Y)\subset\mathcal{M}(X,\mathcal{F},Y). \tag{1}$$

Lema.

Sean $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ sus σ-álgebras de Borel correspondientes,
$P\in\mathscr{B}_1$.
Entonces

$$\pi_1^{-1}[P]\in\mathscr{B}_{\tau_1\otimes\tau_2}. \tag{2}$$

Lema (Medibilidad de funciones continuas).

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes.
Si $\mathcal{F} \supset \mathscr{B}_1$ es una σ-álgebra sobre X, entonces

$$C(X, Y) \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y). \tag{1}$$

Lema.

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ sus σ-álgebras de Borel correspondientes,
$P \in \mathscr{B}_1$.
Entonces

$$\pi_1^{-1}[P] \in \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}. \tag{2}$$

Demostración.
Observamos que $\pi_1 : X \times Y \to X$ es función continua.
Sea $U \in \tau_1$,

$$\pi_1^{-1}[U] = U \times Y \in \tau_1 \times \tau_2 \subset \tau_1 \otimes \tau_2.$$

Del lema sobre la medibilidad de funciones continuas, si $P \in \mathscr{B}_1$

$$\pi_1^{-1}[P] \in \sigma(\tau_1 \otimes \tau_2) = \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}.$$

$\blacksquare$.

Proposición.

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ la σ-álgebra producto,
$\mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}$ la σ-álgebra de Borel de $\tau_1 \otimes \tau_2$.
Entonces

$$\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2} \tag{3}$$

Demostración.
Sea $P \times Q \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$. Observamos que,

$$P \times Q = (P \times Y) \cap (X \times Q) = \pi_1^{-1}[P] \cap \pi_2^{-1}[Q],$$

por el lema anterior,

$$\pi_1^{-1}[P], \pi_2^{-1}[Q] \in \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}.$$

Y como es cerrado bajo intersecciones finitas, $P \times Q \in \mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2}$. ■.

Lema (Los básicos son rectángulos medibles).

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes,
$\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ el conjunto de rectangulos medibles,
Entonces

$$\tau_1 \times \tau_2 \subset \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2. \tag{4}$$

Demostración.
Es inmediato. Sea $W \in \tau_1 \times \tau_2$, esto es

$$W = U \times V$$

donde $U \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$. Como $\tau_1 \subset \mathscr{B}_1$ y $\tau_2 \subset \mathscr{B}_2$ tenemos que $W \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$. ∎.

Lema (Los básicos son rectángulos medibles).

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes,
$\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ el conjunto de rectangulos medibles,
Entonces

$$\tau_1 \times \tau_2 \subset \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2. \tag{4}$$

Demostración.
Es inmediato. Sea $W \in \tau_1 \times \tau_2$, esto es

$$W = U \times V$$

donde $U \in \tau_1$ y $V \in \tau_2$. Como $\tau_1 \subset \mathscr{B}_1$ y $\tau_2 \subset \mathscr{B}_2$ tenemos que $W \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$. ■.

Lema (La propiedad der ser segundo numerable se preserva bajo productos).

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos.
Si los espacios son segundo numerables, i.e. existen bases numerables de cada espacio, entonces $\tau_1 \otimes \tau_2$ es segundo numerable.

Demostración.
Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ bases numerables de τ_1 y τ_2 respectivamente.
Afirmamos que la colección $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una base para $\tau_1 \otimes \tau_2$.

Lema (La propiedad der ser segundo numerable se preserva bajo productos).

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ dos espacios topológicos.
Si los espacios son segundo numerables, i.e. existen bases numerables de cada espacio, entonces $\tau_1 \otimes \tau_2$ es segundo numerable.

Demostración.
Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ bases numerables de τ_1 y τ_2 respectivamente.
Afirmamos que la colección $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una base para $\tau_1 \otimes \tau_2$.

Sea $W \in \tau_1 \otimes \tau_2$, luego

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha,$$

con $U_\alpha \in \tau_1$ y $V_\alpha \in \tau_2$, $\forall\, \alpha \in I$.

Sean $\beta \in I$ y $x \in U_\beta \times V_\beta$. A su vez, existen $\{C_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ y $\{D_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ tales que

$$U_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^* \;\wedge\; V_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^*$$

Así pues, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{n_1}^* \times D_{n_2}^* \subset U_\beta \times V_\beta \subset W$. Como W era arbitrario, tenemos que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es base de $\tau_1 \otimes \tau_2$. $\blacksquare$.

Observación.

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \tau_1 \times \tau_2$$

Sea $W \in \tau_1 \otimes \tau_2$, luego

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha,$$

con $U_\alpha \in \tau_1$ y $V_\alpha \in \tau_2$, $\forall\, \alpha \in I$.

Sean $\beta \in I$ y $x \in U_\beta \times V_\beta$. A su vez, existen $\{C_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ y $\{D_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ tales que

$$U_\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^* \ \wedge \ V_\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^*$$

Así pues, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{n_1}^* \times D_{n_2}^* \subset U_\beta \times V_\beta \subset W$. Como W era arbitrario, tenemos que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es base de $\tau_1 \otimes \tau_2$. $\blacksquare$.

Observación.

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \tau_1 \times \tau_2$$

Sea $W \in \tau_1 \otimes \tau_2$, luego

$$W = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha,$$

con $U_\alpha \in \tau_1$ y $V_\alpha \in \tau_2$, $\forall\ \alpha \in I$.

Sean $\beta \in I$ y $x \in U_\beta \times V_\beta$. A su vez, existen $\{C_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ y $\{D_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ tales que

$$U_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n^* \ \wedge\ V_\beta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n^*$$

Así pues, $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{n_1}^* \times D_{n_2}^* \subset U_\beta \times V_\beta \subset W$. Como W era arbitrario, tenemos que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es base de $\tau_1 \otimes \tau_2$. $\blacksquare$.

Observación.

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \tau_1 \times \tau_2$$

Proposición.

Sean $(X,\tau_1),(Y,\tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes,
$\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2$ la σ-álgebra producto.
Si los espacios son segundo numerables, entonces

$$\mathscr{B}_{\tau_1\otimes\tau_2}\subset\mathscr{B}_1\bullet\mathscr{B}_2. \tag{5}$$

Demostración.
Sea $W\in\tau_1\otimes\tau_2$, esto es

$$W=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n.$$

donde $\forall n\in\mathbb{N}, E_n\in\mathcal{C}\times\mathcal{D}\subset\ \tau_1\times\tau_2\subset\mathscr{B}_1\times\mathscr{B}_2$ (por el lema (7)).

Proposición.

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos,
$\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ las σ-álgebras de Borel correspondientes,
$\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2$ la σ-álgebra producto.
Si los espacios son segundo numerables, entonces

$$\mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2} \subset \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2. \tag{5}$$

Demostración.
Sea $W \in \tau_1 \otimes \tau_2$, esto es

$$W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

donde $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \in \mathcal{C} \times \mathcal{D} \subset \ \tau_1 \times \tau_2 \subset \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ (por el lema (7)).

Lo anterior se debe a que W, como es elemento de $\tau_1 \otimes \tau_2$, es la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ (por el lema (8)), esta a su vez es una colección numerable, por lo que W resulta ser solo una unión numerable.
Finalmente, como $\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ es cerrado bajo uniones numerables, $W \in \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$. Luego,
$\tau_1 \otimes \tau_2 \subset \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ y esto implica la contención (5). $\blacksquare$.

Repetimos brevemente parte de la demostración anterior con un resultado mas general:

Lo anterior se debe a que W, como es elemento de $\tau_1 \otimes \tau_2$, es la unión arbitraria de elementos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ (por el lema (8)), esta a su vez es una colección numerable, por lo que W resulta ser solo una unión numerable.
Finalmente, como $\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ es cerrado bajo uniones numerables, $W \in \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$. Luego, $\tau_1 \otimes \tau_2 \subset \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ y esto implica la contención (5). $\blacksquare$.

Repetimos brevemente parte de la demostración anterior con un resultado mas general:

Proposición (La σ-álgebra generada por la base de una topología).
Sea (X, τ) espacio topológico segundo numerable con base $\mathcal{A}$.
Entonces

$$\mathscr{B}_\tau = \sigma(\mathcal{A})$$

Demostración.
En general se tiene que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\tau) = \mathscr{B}_\tau$.
Ahora, sea $U \in \tau$. Así pues, $U = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$, con $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.
Como $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado bajo uniones numerables, tenemos que $U \in \sigma(\mathcal{A})$.
Por lo tanto $\tau \subset \sigma(\mathcal{A})$. ■.

Proposición (La σ-álgebra generada por la base de una topología).

Sea (X, τ) espacio topológico <u>segundo numerable</u> con base $\mathcal{A}$.
Entonces

$$\mathscr{B}_\tau = \sigma(\mathcal{A})$$

Demostración.
En general se tiene que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\tau) = \mathscr{B}_\tau$.
Ahora, sea $U \in \tau$. Así pues, $U = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$, con $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.
Como $\sigma(\mathcal{A})$ es cerrado bajo uniones numerables, tenemos que $U \in \sigma(\mathcal{A})$.
Por lo tanto $\tau \subset \sigma(\mathcal{A})$. $\blacksquare$.

Teorema.

Sean $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ espacios topológicos <u>segundo numerables</u>, $\mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2$ la σ-álgebra producto de las σ-álgebras de Borel.
Entonces

$$\mathscr{B}_{\tau_1 \otimes \tau_2} = \mathscr{B}_1 \bullet \mathscr{B}_2.$$

Problema.

Sean (X,τ_1)y (Y,τ_2) dos espacios topológicos, entonces

$$\sigma(\tau_1)\times Y\subset\sigma(\tau_1\times Y)?$$
$$\left[X\times\sigma(\tau_2)\subset\sigma(X\times\tau_2)\right]?$$