Matrices de permutación

Juan Carlos Jiménez Cervantes, con sugerencias de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de septiembre de 2020

Objetivo. Explicar la definición de matrices de permutación, demostrar algunos resultados y propiedades sobre estas; y establecer uno de sus usos.

Notación (Grupo simétrico).

Usamos la **notación usual** para el grupo simétrico, i.e. S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Notación (Grupo simétrico).

Usamos la **notación usual** para el grupo simétrico, i.e. S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Notación (Matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$, denotamos por P_φ a la matriz

$$P_\varphi := \left[\delta_{i,\, \varphi(j)}\right]_{i,\, j=1}^{n} .$$

Notación.

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$e_i := [\delta_{i,j}]_{i=1}^{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde la entrada no nula se encuentra en la i-ésima fila.

Notación.

Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$e_i := [\delta_{i,j}]_{i=1}^{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde la entrada no nula se encuentra en la i-ésima fila.

Observación.

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi = \left[e_{\varphi(1)}, \cdots, e_{\varphi(n)} \right].$$

Ejemplo.

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} = [\qquad].$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right] = [\quad].$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} = \left[\ e_{\varphi(1)} \qquad\qquad \right].$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\varphi(1)} & e_{\varphi(2)} & & & \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\varphi(1)} & e_{\varphi(2)} & e_{\varphi(3)} & & \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\varphi(1)} & e_{\varphi(2)} & e_{\varphi(3)} & e_{\varphi(4)} & \end{bmatrix}.$$

Ejemplo. $P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$

Sea $\varphi \in S_5$ la permutación dada por $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{\varphi(1)} & e_{\varphi(2)} & e_{\varphi(3)} & e_{\varphi(4)} & e_{\varphi(5)} \end{bmatrix}.$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).
Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Demostración.
Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sabemos que

$$(P_\varphi P_\psi)_j^i = \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_k^i (P_\psi)_j^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\delta_{i,\varphi(k)}\right) \left(\delta_{k,\psi(j)}\right) = \delta_{i,\varphi(\psi(j))} = (P_{\varphi\psi})_j^i .$$

∎

Proposición (Producto de una matriz de permutación por un tipo de matriz columna).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$P_{\varphi} e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$$

Proposición (Producto de una matriz de permutación por un tipo de matriz columna).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$

Proposición (Producto de una matriz de permutación por un tipo de matriz columna).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proposición (Producto de una matriz de permutación por un tipo de matriz columna).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proposición (Producto de una matriz de permutación por un tipo de matriz columna).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\left(P_\varphi e_{\psi(j)}\right)^i = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq \varphi(\psi(j)) \\ 1, & \text{si } i = \varphi(\psi(j)) \end{cases} = \delta_{i,\varphi(\psi(j))}.$$

∎

$$P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\quad P_\varphi \quad\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Segunda demostración. $P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Segunda demostración. $P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$

Sabemos que

$$P_\varphi P_\psi = [P_\varphi (P_\psi)_1, \cdots, P_\varphi (P_\psi)_n] = [P_\varphi e_{\psi(1)}, \cdots, P_\varphi e_{\psi(n)}]$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Segunda demostración. $P_\varphi e_{\psi(j)} = \left[\delta_{i,\varphi(\psi(j))}\right]_{i=1}^{n}$

Sabemos que

$$P_\varphi P_\psi = [P_\varphi (P_\psi)_1, \cdots, P_\varphi (P_\psi)_n] = [P_\varphi e_{\psi(1)}, \cdots, P_\varphi e_{\psi(n)}]$$

De la proposición anterior, obtenemos

$$P_\varphi P_\psi = [\delta_{i,\,\varphi(\psi(j))}]_{i,\,j=1}^{n} = P_{\varphi\psi}.$$

$\blacksquare$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^\top.$$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^\top.$$

Demostración. De la proposición anterior es facil ver que $P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}}$.
Queremos demostrar:

$$P_{\varphi^{-1}} \quad = \quad P_\varphi^\top$$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^\top.$$

Demostración. De la proposición anterior es facil ver que $P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}}$.
Queremos demostrar:

$$[\delta_{i,\,\varphi^{-1}(j)}]_{i,j=1}^n = P_{\varphi^{-1}} \quad = \quad P_\varphi^\top = [\delta_{j,\,\varphi(i)}]_{i,j=1}^n.$$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_{\varphi}^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_{\varphi}^{\top}.$$

Demostración. De la proposición anterior es facil ver que $P_{\varphi}^{-1} = P_{\varphi^{-1}}$.
Queremos demostrar:

$$[\delta_{i,\,\varphi^{-1}(j)}]_{i,\,j=1}^{n} = P_{\varphi^{-1}} \quad = \quad P_{\varphi}^{\top} = [\delta_{j,\,\varphi(i)}]_{i,\,j=1}^{n}.$$

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(P_{\varphi^{-1}}\right)_{j}^{i} = 1 \iff \delta_{i,\,\varphi^{-1}(j)} = 1 \iff i = \varphi^{-1}(j) \\ \iff \varphi(i) = j \iff \delta_{j,\,\varphi(i)} = 1 \iff (P_{\varphi})_{i}^{j} = 1.\end{aligned}$$

∎

Corolario (Permutación de los renglones y columnas de la matriz inversa).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible y sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^\top \, A^{-1} \, P_\psi = (P_\psi^\top \, A \, P_\varphi)^{-1}.$$

Definición (Signo de una permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d,$$

donde d es el número mínimo de factores en alguna descomposición de φ.

Definición (Signo de una permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d,$$

donde d es el número mínimo de factores en alguna descomposición de φ.

Ejemplo de una descomposición de una permutación.

Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Definición (Signo de una permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d,$$

donde d es el número mínimo de factores en alguna descomposición de φ.

Ejemplo de una descomposición de una permutación.

Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \varphi &= c_9(1,8,2)c_9(3,4)c_9(6,9) \\ &= \tau_{1,8}\tau_{8,2}\tau_{3,4}\tau_{6,9}. \end{aligned}$$

Definición (Signo de una permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d,$$

donde d es el número mínimo de factores en alguna descomposición de φ.

Ejemplo de una descomposición de una permutación.

Sea $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \varphi &= c_9(1,8,2)c_9(3,4)c_9(6,9) \\ &= \tau_{1,8}\tau_{8,2}\tau_{3,4}\tau_{6,9}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\operatorname{sign}(\varphi) = (-1)^4 = 1.$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).
Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Demostración. Sea $\varphi \in S_n$.

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d, \quad d = \#\text{ de transposiciones de alguna descomposición de } \varphi,$$
$$\det(P'_\varphi) = -\det(P_\varphi), \quad P'_\varphi = \text{ matriz obtenida de intercambiar dos columnas de } P_\varphi.$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).
Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Demostración. Sea $\varphi \in S_n$.

$$\operatorname{sign}(\varphi) := (-1)^d, \quad d = \text{ \# de transposiciones de alguna descomposición de } \varphi,$$
$$\det(P'_\varphi) = -\det(P_\varphi), \quad P'_\varphi = \text{ matriz obtenida de intercambiar dos columnas de } P_\varphi.$$

Notamos que una transposición de φ resulta en el intercambio de dos columnas de P_φ.

$$\det(P_\varphi) = (-1)^d.$$

∎

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\varphi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\varphi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & \boxed{4} & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \boxed{4} & 2 & 3 & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & \boxed{2} & 3 & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & \boxed{1} & 3 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \tau_{1,4}\tau_{4,2}\tau_{2,3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{\varphi}$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$AP_\psi = \left[A^{i}_{\psi(j)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \quad \text{y} \quad P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(i)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Lema (El producto de una matriz general por un tipo de matriz columna).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]_{i=1}^m.$$

Lema (El producto de una matriz general por un tipo de matriz columna).
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]_{i=1}^m.$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$Ae_{\psi(j)} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lema (El producto de una matriz general por un tipo de matriz columna).
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\psi \in S_n$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]_{i=1}^m.$$

Demostración. Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$\left(Ae_{\psi(j)}\right)^i = A^i_{\psi(j)}.$$

∎

$$Ae_{\psi(j)} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lema (El producto de una matriz de permutación por una matriz columna general).

Sean $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in S_m$. Entonces

$$P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m.$$

Lema (El producto de una matriz de permutación por una matriz columna general).
Sean $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in S_m$. Entonces

$$P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$P_\varphi^\top u = \begin{bmatrix} \\ & P_{\varphi^{-1}} & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ u^m \end{bmatrix}$$

Lema (El producto de una matriz de permutación por una matriz columna general).
Sean $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in S_m$. Entonces

$$P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m.$$

Sea $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces

$$P_\varphi^\top u = \begin{bmatrix} \\ \quad P_{\varphi^{-1}} \quad \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u^m \end{bmatrix} \qquad i = \varphi^{-1}(k)$$

Lema (El producto de una matriz de permutación por una matriz columna general).

Sean $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in S_m$. Entonces

$$P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$P_\varphi^\top u = \begin{bmatrix} \\ & P_{\varphi^{-1}} & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ u^m \end{bmatrix} \qquad i = \varphi^{-1}(k) \rightarrow \varphi(i) = k$$

Lema (El producto de una matriz de permutación por una matriz columna general).
Sean $u \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ y $\varphi \in S_m$. Entonces

$$P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m.$$

Sea $i \in \{1, \ldots, m\}$, entonces

$$\left(P_\varphi^\top u\right)^i = u^{\varphi(i)}.$$

■

$$P_\varphi^\top u = \begin{bmatrix} \\ & P_{\varphi^{-1}} & \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u^m \end{bmatrix} \qquad i = \varphi^{-1}(k) \to \varphi(i) = k$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$AP_\psi = \left[A^{\,i}_{\psi(j)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \;\text{ y }\; P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(\,i\,)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$AP_\psi = \left[A^{i}_{\psi(j)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \text{ y } P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(\,i\,)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Demostración. $Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]_{i=1}^m$ $P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$AP_\psi = \left[A^{\,i}_{\psi(j)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \text{ y } P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(\,i\,)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Demostración. $Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]_{i=1}^m$ $\quad P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]_{i=1}^m$

Sabemos que

$$AP_\psi = [A(P_\psi)_1, \cdots, A(P_\psi)_n] = [Ae_{\psi(1)}, \cdots, Ae_{\psi(n)}]$$
$$P_\varphi^\top A = [P_\varphi^\top A_1, \cdots, P_\varphi^\top A_n]$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).
Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$AP_\psi = \left[A^{\,i}_{\psi(j)}\right]^{m,n}_{i,j=1} \text{ y } P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(\,i\,)}\right]^{m,n}_{i,j=1}.$$

Demostración. $Ae_{\psi(j)} = [A^i_{\psi(j)}]^m_{i=1}$ $\quad P_\varphi^\top u = [u^{\varphi(i)}]^m_{i=1}$

Sabemos que

$$AP_\psi = [A(P_\psi)_1, \cdots, A(P_\psi)_n] = [Ae_{\psi(1)}, \cdots, Ae_{\psi(n)}]$$
$$P_\varphi^\top A = [P_\varphi^\top A_1, \cdots, P_\varphi^\top A_n]$$

De los lemas anteriores, obtenemos

$$AP_\psi = \left[A^{\,i}_{\psi(j)}\right]^{m,n}_{i,j=1} \qquad P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(\,i\,)}\right]^{m,n}_{i,j=1}.$$

∎

Corolario.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$P_{\varphi}^{\top} A P_{\psi} = \left[A_{\psi(j)}^{\varphi(i)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$