El Teorema de Jacobi sobre el menor complementario. Extensión a la situación general.

Juan Carlos Jiménez Cervantes
Egor Maximenko, Mario Alberto Moctezuma Salazar, Luis Angel González Serrano, Eduardo Said Merín Martínez, Fidel Vázquez Rojas,

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de septiembre de 2020

1. Herramientas
2. Matrices de Permutación
3. Teorema de Jacobi

Objetivo. Demostrar el Teorema de Jacobi sobre el menor complementario. Para esto se utilizarán resultados de matrices de permutaciones y el teorema de Jacobi sobre un menor en la esquina.

Notación.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$
sean $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, $J = \{j_1, \dots, j_q\} \subseteq \{1, \dots, n\}$
tales que $i_1 < \cdots < i_p$ y $j_1 < \cdots < j_q$.
Entonces la **submatriz** $A_{J,K}$ se define como

$$A_{I,J} \coloneqq \left[A_{i_r, j_s}\right]_{r,s=1}^{p,q}.$$

Notación.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$
sean $I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_q\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$
tales que $i_1 < \cdots < i_p$ y $j_1 < \cdots < j_q$.
Entonces la **submatriz** $A_{J,K}$ se define como

$$A_{I,J} := \left[A_{i_r, j_s}\right]_{r,s=1}^{p,q}.$$

Notación.

Sea $J = \{j_1, \ldots, j_q\}$ un conjunto finito de números enteros con $j_1 < \cdots < j_q$.
Definimos:

$$\Sigma J := \sum_{i=1}^{q} j_q.$$

Proposición (sobre el menor en la esquina de una matriz invertible).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible.
Sea $m \in \mathbb{N}$ con $1 \le m \le n$,
y sean $M := \{1, \ldots, m\}$ y $M' := \{m+1, \ldots, n\}$.
Entonces

$$\det(A^{-1}_{M,M}) = [\det(A)]^{-1} \det(A_{M',M'}).$$

Notación (Grupo simétrico).

Usamos la **notación usual** para el grupo simétrico, i.e. S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Notación (Grupo simétrico).

Usamos la **notación usual** para el grupo simétrico, i.e. S_n es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

Notación (Matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$, denotamos por P_φ a la matriz

$$P_\varphi := \left[\delta_{i,\,\varphi(j)}\right]_{i,\,j=1}^{n}$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^\top.$$

Proposición (El producto de matrices de permutación).

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi P_\psi = P_{\varphi\psi}.$$

Proposición (La inversa de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^{-1} = P_{\varphi^{-1}} = P_\varphi^\top.$$

Corolario (Permutación de los renglones y columnas de la matriz inversa).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible y sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$(P_\psi^\top A^{-1} P_\varphi)^{-1} = P_\varphi^\top A P_\psi.$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(i)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \text{ y } AP_\psi = \left[A_{\psi(j)}^{i}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Proposición (El determinante de una matriz de permutación).

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\det P_\varphi = \operatorname{sign}(\varphi).$$

Proposición (El producto de una matriz de permutación por una matriz general).

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^\top A = \left[A_j^{\varphi(i)}\right]_{i,j=1}^{m,n} \text{ y } AP_\psi = \left[A_{\psi(j)}^{i}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Corolario.

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $\varphi \in S_m$, $\psi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi^\top A P_\psi = \left[A_{\psi(j)}^{\varphi(i)}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

De un conjunto, construir una permutación

Del conjunto

$$J_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Tomamos un subconjunto

$$\boxed{I = \{2, 4, 5\}}.$$

Y construimos una permutación asociada a este conjunto.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & \boxed{4 \quad 5} & 6 & 7 & 8 \\ \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 5} & & & 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Definición (Inversión).

Sea $\varphi \in S_n$ y sean $r, s \in \{1, \ldots, n\}$.
Decimos que (r, s) es una **inversión** de φ si

$$r < s \ \ y \ \ \varphi(s) < \varphi(r).$$

Lema.

Sean $\varphi \in S_n$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $\varphi(1) < \cdots < \varphi(p)$ y $\varphi(p+1) < \cdots < \varphi(n)$, y sea $I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\}$.
Entonces

$$\det P_\varphi = (-1)^{\sum I - \frac{p(p+1)}{2}}.$$

Lema.

Sean $\varphi \in S_n$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $\varphi(1) < \cdots < \varphi(p)$ y $\varphi(p+1) < \cdots < \varphi(n)$, y sea $I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\}$.
Entonces

$$\det P_\varphi = (-1)^{\sum I - \frac{p(p+1)}{2}}.$$

Demostración.
Dado que $\det(P_\varphi) = \operatorname{sign}(\varphi) = (-1)^{\operatorname{inv}(\varphi)}$, calculamos el número de inversiones. Tenemos

$$\operatorname{inv}(\varphi) = \#\left\{(r, s) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \mid r < s \wedge \varphi(s) < \varphi(r)\right\}.$$

Lema.

Sean $\varphi \in S_n$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $\varphi(1) < \cdots < \varphi(p)$ y $\varphi(p+1) < \cdots < \varphi(n)$, y sea $I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\}$.
Entonces

$$\det P_\varphi = (-1)^{\sum I - \frac{p(p+1)}{2}}.$$

Demostración.
Dado que $\det(P_\varphi) = \operatorname{sign}(\varphi) = (-1)^{\operatorname{inv}(\varphi)}$, calculamos el número de inversiones. Tenemos

$$\operatorname{inv}(\varphi) = \#\{(r, s) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \mid r < s \wedge \varphi(s) < \varphi(r)\}.$$

Dada la suposición hecha sobre φ, lo anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}(\varphi) &= \#\{(r, s) \in \{1, \ldots, p\} \times \{p+1, \ldots, n\} \mid \varphi(s) < \varphi(r)\} \\ &= \sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p+1, \ldots, n\} \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}. \end{aligned}$$

$\sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p+1, \ldots, n \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}$

Observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\{1, \ldots, \varphi(r)\} &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1, \ldots, r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{r+1, \ldots, n\} \ \text{ y } \ \varphi(s) < \varphi(r)\} \\ &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1, \ldots, r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{p+1, \ldots, n\} \ \text{ y } \ \varphi(s) < \varphi(r)\}.\end{aligned}$$

$\sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p+1,\dots,n \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}$

Observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\{1,\dots,\varphi(r)\} &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1,\dots,r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{r+1,\dots,n\} \text{ y } \varphi(s) < \varphi(r)\} \\ &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1,\dots,r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{p+1,\dots,n\} \text{ y } \varphi(s) < \varphi(r)\}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\varphi(r) = r + \#\{s \in \{p+1,\dots,n\} \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}.$$

$\sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p+1, \dots, n \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}$

Observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\{1, \dots, \varphi(r)\} &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1, \dots, r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{r+1, \dots, n\} \text{ y } \varphi(s) < \varphi(r)\} \\ &= \Big\{\varphi(t) \mid t \in \{1, \dots, r\}\Big\} \uplus \{\varphi(s) \mid s \in \{p+1, \dots, n\} \text{ y } \varphi(s) < \varphi(r)\}.\end{aligned}$$

Así pues,

$$\varphi(r) = r + \#\{s \in \{p+1, \dots, n\} \mid \varphi(s) < \varphi(r)\}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{r=1}^{p} \#\{s \in \{p+1, \dots, n\} \mid \varphi(s) < \varphi(r)\} = \sum_{r=1}^{p} (\varphi(r) - r) = \Sigma I - \frac{p(p+1)}{2}.$$

$\blacksquare$

Proposición (sobre los menores generales de una matriz invertible).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible,
sean $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tales que $|I| = |J| = p$.
Denotamos $I' = \{1, \ldots, n\} \setminus I$ y $J' = \{1, \ldots, n\} \setminus J$.
Entonces

$$\det\left(\left(A^{-1}\right)^{I}_{J}\right) = [\det(A)]^{-1} \det\left(A^{J'}_{I'}\right)\, (-1)^{\Sigma I + \Sigma J}.$$

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in S_n$, tales que

$$\varphi(1) < \cdots < \varphi(p), \;\; \varphi(p+1) < \cdots < \varphi(n) \;\text{ y }\; I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\};$$
$$\psi(1) < \cdots < \psi(p), \;\; \psi(p+1) < \cdots < \psi(n) \;\text{ y }\; J = \{\psi(1), \ldots, \psi(p)\}.$$

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in S_n$, tales que

$$\varphi(1) < \cdots < \varphi(p), \;\; \varphi(p+1) < \cdots < \varphi(n) \;\text{ y }\; I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\};$$
$$\psi(1) < \cdots < \psi(p), \;\; \psi(p+1) < \cdots < \psi(n) \;\text{ y }\; J = \{\psi(1), \ldots, \psi(p)\}.$$

Consideremos la matrices

$$B = P_\psi^\top A P_\varphi \;\text{ y }\; B^{-1} = P_\varphi^\top A^{-1} P_\psi.$$

$J = \{\psi(1), \ldots, \psi(p)\}$, $I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\}$, $B = P_\psi^\top A P_\varphi$ y $B^{-1} = P_\varphi^\top A^{-1} P_\psi$

Del último corolario, vemos que

$$B_s^r = A_{\varphi(s)}^{\psi(r)}, \qquad \left(B^{-1}\right)_s^r = \left(A^{-1}\right)_{\psi(s)}^{\varphi(r)}.$$

$J = \{\psi(1), \ldots, \psi(p)\}$, $I = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(p)\}$, $B = P_\psi^\top A P_\varphi$ y $B^{-1} = P_\varphi^\top A^{-1} P_\psi$

Del último corolario, vemos que

$$B_s^r = A_{\varphi(s)}^{\psi(r)}, \qquad \left(B^{-1}\right)_s^r = \left(A^{-1}\right)_{\psi(s)}^{\varphi(r)}.$$

Más aún, se tiene

$$B_{p+1,\ldots,n}^{p+1,\ldots,n} = A_{\varphi(p+1),\ldots,\varphi(n)}^{\psi(p+1),\ldots,\psi(n)} = A_{I'}^{J'},$$
$$(B^{-1})_{1,\ldots,p}^{1,\ldots,p} = (A^{-1})_{\psi(1),\ldots,\psi(n)}^{\varphi(1),\ldots,\varphi(p)} = (A^{-1})_J^I.$$

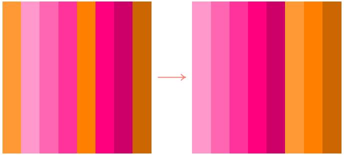
$J = \{\psi(1), \dots, \psi(p)\}$, $I = \{\varphi(1), \dots, \varphi(p)\}$, $B = P_\psi^\top A P_\varphi$ y $B^{-1} = P_\varphi^\top A^{-1} P_\psi$

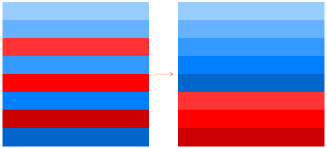
Del último corolario, vemos que

$$B_s^r = A_{\varphi(s)}^{\psi(r)}, \qquad \left(B^{-1}\right)_s^r = \left(A^{-1}\right)_{\psi(s)}^{\varphi(r)}.$$

Más aún, se tiene

$$B_{p+1,\dots,n}^{p+1,\dots,n} = A_{\varphi(p+1),\dots,\varphi(n)}^{\psi(p+1),\dots,\psi(n)} = A_{I'}^{J'},$$
$$(B^{-1})_{1,\dots,p}^{1,\dots,p} = (A^{-1})_{\psi(1),\dots,\psi(n)}^{\varphi(1),\dots,\varphi(p)} = (A^{-1})_J^I.$$





$$(A^{-1})^I_J = (B^{-1})^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p}\,, \quad A^{J'}_{I'} = B^{p+1,\ldots,n}_{p+1,\ldots,n} \text{ y } B = P_\psi^\top A P_\varphi$$

$$\det\left(\left(A^{-1}\right)^I_J\right) = \det\left(\left(B^{-1}\right)^{1,\ldots,p}_{1,\ldots,p}\right)$$

$$\det(B) = \det\left(P_\psi^\top\right)\det(A)\det\left(P_\varphi\right)$$

$(A^{-1})^{I}_{J} = (B^{-1})^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}$, $A^{J'}_{I'} = B^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n}$ y $B = P_{\psi}^{\top} A P_{\varphi}$

$$\det\left((A^{-1})^{I}_{J}\right) = \det\left((B^{-1})^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}\right)$$
$$\det(B) = \det\left(P_{\psi}^{\top}\right)\det(A)\det\left(P_{\varphi}\right)$$

Finalmente, usamos el caso particular de **Jacobi para menores en la esquina.**

$$\begin{aligned}\det\left((A^{-1})^{I}_{J}\right) &= \det\left((B^{-1})^{1,\dots,p}_{1,\dots,p}\right)\\ &= [\det(B)]^{-1}\det(B^{p+1,\dots,n}_{p+1,\dots,n})\\ &= [\det(B)]^{-1}\det(A^{J'}_{I'})\\ &= [\det(P_{\psi}^{\top})\det(A)\det(P_{\varphi})]^{-1}\det(A^{J'}_{I'})\\ &= [\det(A)]^{-1}\det(A^{J'}_{I'})(-1)^{\Sigma I+\Sigma J}.\end{aligned}$$

■

Ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así como las siguientes entradas:

$$I' = \{2,3,5\}, \qquad J' = \{1,4,5\} \leftarrow I = \{1,4\}, \qquad J = \{2,3\}.$$

Ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así como las siguientes entradas:

$$I' = \{2,3,5\}, \qquad J' = \{1,4,5\} \leftarrow I = \{1,4\}, \qquad J = \{2,3\}.$$

Calculando determinantes

$$\det\left(A_{I'}^{J'}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad \det\left(\left(A^{-1}\right)_J^I\right) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, consideremos las siguientes entradas:

$$I' = \{2,5\}, \qquad J' = \{2,4\} \quad \leftarrow \quad I = \{1,3,4\}, \qquad J = \{1,3,5\}.$$

Ejemplo.

Consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -12 & -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, consideremos las siguientes entradas:

$$I' = \{2,5\}, \qquad J' = \{2,4\} \quad \leftarrow \quad I = \{1,3,4\}, \qquad J = \{1,3,5\}.$$

Calculando determinantes

$$\det\left(A_{I'}^{J'}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \det\left(\left(A^{-1}\right)_J^I\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Teorema de Jacobi.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
sean $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tales que $|I| = |J| = p$.
Denotamos $I' = \{1, \ldots, n\} \setminus I$, $J' = \{1, \ldots, n\} \setminus J$.
Entonces

$$\det(\operatorname{adj}(A)^I_J) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det A^{J'}_{I'}.$$

Teorema de Jacobi.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
sean $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ tales que $|I| = |J| = p$.
Denotamos $I' = \{1, \dots, n\} \setminus I$, $J' = \{1, \dots, n\} \setminus J$.
Entonces

$$\det(\operatorname{adj}(A)^I_J) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det A^{J'}_{I'}.$$

Demostración. **El siguiente razonamiento proviene de Fidel Vazquéz Rojas.**

$\det(\operatorname{adj}(A)^I_J) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det A^{J'}_{I'}$.

A es invertible. Entonces, $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ y

$$\det\big(\operatorname{adj}(A)^I_J\big) = \det(A)^p \det\big((A^{-1})^I_J\big) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det\left(A^{J'}_{I'}\right).$$

$\det(\operatorname{adj}(A)^I_J) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det A^{J'}_{I'}$.

A es invertible. Entonces, $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ y

$$\det\big(\operatorname{adj}(A)^I_J\big) = \det(A)^p \det\big((A^{-1})^I_J\big) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det\left(A^{J'}_{I'}\right).$$

A no es invertible, $p = 1$. Entonces $I = \{i\}$ y $J = \{j\}$. Por definición, $\operatorname{adj}(A)^I_J = \widehat{A}^j_i$ y

$$\det\left(\operatorname{adj}(A)^I_J\right) = \widehat{A}^j_i = (-1)^{\Sigma I + \Sigma J} \det(A^{J'}_{I'}).$$

$\det(\operatorname{adj}(A)^I_J) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I+\Sigma J}\det A^{J'}_{I'}$.

A es invertible. Entonces, $\operatorname{adj}(A) = \det(A)A^{-1}$ y

$$\det\big(\operatorname{adj}(A)^I_J\big) = \det(A)^p\det\big((A^{-1})^I_J\big) = \det(A)^{p-1}(-1)^{\Sigma I+\Sigma J}\det\left(A^{J'}_{I'}\right).$$

A no es invertible, $p = 1$. Entonces $I = \{i\}$ y $J = \{j\}$. Por definición, $\operatorname{adj}(A)^I_J = \widehat{A}^j_i$ y

$$\det\left(\operatorname{adj}(A)^I_J\right) = \widehat{A}^j_i = (-1)^{\Sigma I+\Sigma J}\det(A^{J'}_{I'}).$$

A no es invertible, $p \geq 2$ y $\operatorname{r}(A) < n-1$. Todos los cofactores de A son cero y ambos lados de la igualdad son cero.

A no es invertible, $p \geq 2$ y $\mathrm{r}(A) = n - 1$.

$$A \operatorname{adj}(A) = 0_{n \times n},$$

implica que la imagen de $\operatorname{adj}(A)$ esta contenida en el kernel de A, luego

$$\mathrm{r}(\operatorname{adj}(A)) \leq \dim(\ker(A)) = n - \mathrm{r}(A) = 1.$$

Dado que $p \geq 2$, todos los menores de $\operatorname{adj}(A)$ de orden p son igual a 0. $\blacksquare$