Escuela Superior de Física y Matemáticas

La base ortonormal de Fourier en un intervalo real.

Jaimes Escamilla Omar Heberto Nahum
con sugerencias de Egor Maximenko

18 de enero de 2021

Teorema 1 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que :

1. f_n converge puntualmente a una función $g : X \to \mathbb{C}$.
2. Existe una función $h \in L_1\left(X, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+\right)$ tal que $|f_n(x)| \leq h(x), \forall x \in X$.

Entonces :

- $f_n \in L_1(X, \mu, \mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}$.
- $g \in L_1(X, \mu, \mathbb{C})$.
- $$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|\, d\mu = 0$$
- $$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X g d\mu$$

Teorema 2 (Desigualdad del valor absoluto de la integral)**.**
Sea $f \in L_1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces :

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

Proposición 3. Sea E un conjunto medible.
Si $\mu(E) < +\infty$, $0 < p < r \leq +\infty$, entonces $\mathcal{L}^r(E) \subseteq \mathcal{L}^p(E)$ y $\forall f \in \mathcal{L}^r(E), \|f\|_p \leq \mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|f\|_r$.

Demostración. Procedamos por casos.

- $r < +\infty$
  Sea $f \in \mathcal{L}^r(E)$. Por la desigualdad de Hölder, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_E |f|^p\, d\mu \\
&= \int_E |f|^p \cdot 1_E d\mu \\
&\leq \left(\int_E |f|^r\, d\mu \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_E 1_E d\mu \right)^{1-\frac{p}{r}}
\end{aligned}$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &\leq \left(\int_E |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{p}{pr}} (\mu(E))^{\frac{1}{p}-\frac{p}{pr}} \\
&= \|f\|_r \, (\mu(E))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_E |f|^r \, d\mu\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int_E 1_E d\mu\right)^{1-\frac{p}{r}}
\end{aligned}$$

- $r = +\infty$
  Sea $f \in \mathcal{L}^r(E)$. Entonces $|f| \leq \|f\|_\infty \, \mu - \text{c.t.p.} \implies |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \, , \mu - \text{c.t.p.}$ Luego :

$$\begin{aligned}
\int_E |f|^p \, d\mu &\leq \int_E \|f\|_\infty^p \cdot 1_E d\mu \\
&= \|f\|_\infty^p \int_E 1_E d\mu \\
&\leq \|f\|_\infty^p \, \mu(E)
\end{aligned}$$

  Por lo tanto :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \, \mu(E)^{\frac{1}{p}}$$

□

Corolario 4. $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty \sqrt{\mu(E)}, \mu-\text{c.t.p.}$ Equivalentemente, $\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^2 \, \mu(E), \mu-\text{c.t.p.}$

Demostración. Se tiene por el caso $r = +\infty, p = 2$ de la proposición 3. □

Trabajaremos en el intervalo $[-\pi, \pi)$. Dotamos a este intervalo con la medida normalizada $\frac{1}{2\pi}\mu$. Denotaremos por H al espacio $L^2\left([-\pi,\pi), \mu/(2\pi)\right)$.
Consideremos, dadas $f, g \in H$:

$$\langle f, g\rangle_H \coloneqq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} f\overline{g} \, d\mu$$

Observación 1. $\forall z, w \in \mathbb{C}, z\overline{z} = |z|_{\mathbb{C}}^2 \, , \overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

Observación 2 (Ejercicio AMII, Una función no negativa con integral nula.).
Sea $h \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{F}, \mu, \overline{\mathbb{R}}_+\right)$ tal que

$$\int_X h d\mu = 0$$

Entonces :

$$\mu\left(\{x \in X \mid \; h(x) > 0\}\right) = 0.$$

Es decir, $h = 0 \;\; \mu-\text{c.t.p.}$

Proposición 5. $\langle , \rangle_H : H \times H \to \mathbb{C}$ definida anteriormente es un producto interno complejo.

Demostración.

- $\forall f, g \in H, \langle f, g\rangle_H = \overline{\langle g, f\rangle_H}$
  Sean $f, g \in H$.

Entonces :

$$\begin{aligned}
\overline{\langle g, f\rangle_H} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} g\overline{f}\, d\mu} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} \overline{\overline{f}}\overline{g}\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} f\overline{g}\, d\mu \\
&= \langle f, g\rangle_H
\end{aligned}$$

- $\forall f, g, h \in H \ \wedge\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \langle \alpha f + \beta g, h\rangle_H = \alpha \langle f, h\rangle_H + \beta \langle g, h\rangle_H$
  Sean $f, g, h \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
  Entonces :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha f + \beta g, h\rangle_H &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} (\alpha f + \beta g)\,\overline{h}\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} \left(\alpha f\overline{h} + \beta g\overline{h}\right)\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} \alpha f\overline{h}\, d\mu + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} \beta g\overline{h}\, d\mu \\
&= \alpha\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} f\overline{h}\, d\mu\right) + \beta\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} g\overline{h}\, d\mu\right) \\
&= \alpha \langle f, h\rangle_H + \beta \langle g, h\rangle_H
\end{aligned}$$

- $\forall f \in H, \langle f, f\rangle_H \geq 0$
  Sea $f \in H$. Luego :

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle_H &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi,\pi)} f\overline{f}\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{[-\pi,\pi)} |f|_{\mathbb{C}}^2\, d\mu\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

  Lo anterior se tiene por las propiedades de $|f|_{\mathbb{C}}$ y por la observación 1.

- $\langle f, f\rangle_H = 0 \Leftrightarrow f = 0$
  Ejercicio.
  Idea de demostración Sean $f \in H$.
  Si g es una función positiva y $\int_{[-\pi,\pi)} g d\mu = 0 \implies g = 0\ \mu-$c.t.p.
  Consideremos entonces $g = f\overline{f} = |f|_{\mathbb{C}}^2$.
  Por lo que:

$$|f|_{\mathbb{C}}^2 = 0\ \ \mu - \text{c.t.p.} \Leftrightarrow f = 0\ \ \mu - \text{c.t.p.}$$

  Lo anterior se tiene usando propiedades de L_2 y la observación 2.
  La suficiencia es inmediata.

$\square$

$\langle , \rangle_H : H \times H \to \mathbb{C}$ definida anteriormente puede inducir una norma en H como sigue :
Sea $f \in H$. Entonces

$$\|f\|_H := \sqrt{\langle f, f \rangle_H} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi)} |f|^2 \ d\mu}$$

Observación 3. Usando desplazamientos y dilataciones,se puede generalizar estas construcciones a cualquier intervalo real. Esto es particularmente útil cuando se quieren estudiar funciones que no solo son periódicas con periodo 2π, sino periódicas con periodo $2l$.
Incluso hay ocasiones en las que es mas conveniente trabajar en el intervalo $[-\pi, \pi)$.
Análogamente, es posible trabajar algunas veces en el intervalo $[-l, l)$.
Y se sabe que la medida se preserve bajo traslaciones, por lo que no habría ningun problema trabajar con estas en caso de ser necesario.

Definición 6 (Funciones Básicas De Fourier).
Para cada $m \in \mathbb{Z}$ se define $\varphi_m : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ como:

$$\varphi_m(x) := e^{imx}$$

Proposición 7. Sea $j, k \in \mathbb{Z}$. Entonces, dadas φ_j, φ_k funciones básicas de Fourier, se tiene:

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H = \delta_{j,k}.$$

Es decir, la sucesión $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal en H.

Demostración. Sean $\varphi_j = e^{jix}, \varphi_k = e^{kix}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi)} \varphi_i \overline{\varphi_j} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi)} e^{jix} \overline{e^{kix}} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{jix} e^{-kix} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(j-k)ix} d\mu(x) \end{aligned}$$

- Si $j = k$, entonces $j - k = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{0 \cdot ix} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\mu(x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

- Si $j \neq k$: entonces $j - k \neq 0$.
  Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < j$. Entonces $0 < j - k$.
  Así:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(j-k)ix} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i(j-k)} \left(e^{(j-k)\pi i} - e^{(j-k)i \cdot (-\pi)} \right) \end{aligned}$$

Pero $e^{\pi i} + 1 = 0 \implies e^{\pi i} = -1, e^{-\pi i} = -1$.
Por tanto:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H &= \frac{-i}{2\pi(j-k)}\left((-1)^{(j-k)} - (-1)^{(j-k)}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore\ \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle_H = \delta_{j,k}$.

$\therefore\ (\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal. $\square$

Definición 8 (Polinomios Trigonométricos). Decimos que T_n es un *polinomio trigonométrico* si es una combinación lineal de funciones básicas de Fourier. Es decir :

$$T_n(x) \coloneqq \sum_{m=-n}^{n} a_m \varphi_m(x) = \sum_{m=-n}^{n} a_m e^{mix}.$$

Denotaremos por $\mathcal{T}$ al conjuntos de todos los *polinomios trigonométricos.*
En otras palabras, $\mathcal{T}$ es el subespacio vectorial generado por el conjunto $\{\varphi_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
Nuestro objetivo ahora es demostrar que $\mathcal{T}$ es denso en H. Para lograrlo, lo haremos de la siguiente forma. Llamemos X al conjunto de funciones continuas periódicas con periodo 2π. X será un subespacio de $\mathcal{C}\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$
Una caracterización adecuada de funciones periódicas sería la siguiente.

$$f \text{ es periódica con periodo } 2\pi \Leftrightarrow f(x) = f(x+2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Observación 4.

$$\begin{aligned} t,s \in [-\pi,\pi] &\implies -\pi \le t \le \pi \ \wedge\ -\pi \le s \le \pi \\ &\implies -\pi \le t \le \pi \ \wedge\ -\pi \le -s \le \pi \\ &\implies -2\pi \le t-s \le 2\pi \\ &\implies |t-s| \le 2\pi \end{aligned}$$

Definición 9 (Convolución periódica de dos funciones). Si $f, g \in X$, cuyo dominio es $[-\pi,\pi]$, decimos que $f * g$ es la convolución de f y g y la definimos como :

$$\left(f*g\right)(t) \coloneqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)d\mu(s), \forall t \in [-\pi,\pi]$$

Notemos que si se fija t en la definición anterior, $f*g$ está bien definida, pues su integrando es una función continua de s, al ser producto de dos funciones continuas.
Más aún, por la observación 4, es posible que la diferencia de dos elementos en $[-\pi,\pi]$ no pertenezca a $[-\pi,\pi]$.
Esto es un problema, que se puede resolver considerando una *función extendida* de f, la cuál denotaremos simplemente por f_{ext}. Esta función será de tal forma que sea periódica y continua en toda la recta real, y de tal forma que restringida al intervalo $[-\pi,\pi]$, sea igual a la función original f.

Definición 10 (Función Extendida). Sea $f \in X$ cuyo dominio es $[-\pi,\pi]$.
Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene :

$$f_{\text{ext}}(x) \coloneqq f(x - 2\pi k).$$

Es decir, esta función está definida como sigue:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists k = k(x) \in \mathbb{Z} \ni x - 2\pi k \in [-\pi,\pi].$$

En este caso, se tiene que: $f = f_{\text{ext.}}$ Por simplicidad de notación, cuando consideremos a f fuera de $[-\pi,\pi]$, se supondrá que se está trabajando con esta función extendida.
Se tiene ademas que $\mathcal{T} \subseteq X$. Se probará que $\mathcal{T}$ es denso en X.

Lema 11. Sean $f, g, h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. $f * g \in X$
2. $f * g = g * f$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h, f * (\lambda g) = (\lambda f) * g$
4. Si $P \in \mathcal{T}$ y $f \in X$, entonces $f * P \in \mathcal{T}$.

Demostración.

1. Sea $t \in [0, 2\pi]$ arbitrario pero fijo. Como f es un función continua en $[-\pi, \pi]$, donde $[-\pi, \pi]$ es un conjunto compacto, f es acotada en $[-\pi, \pi]$. Por lo que existe $M \in \mathbb{R}, M > 0$ tal que $|f| \leq M$, en $[-\pi, \pi]$.
   Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-\pi, \pi]$ sucesión tal que $t_n \to t$.
   Como f es continua, se tiene que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} f_{\text{ext}}(t_n - s) g(s) &= f_{\text{ext}} \left(\lim_{n \to \infty} t_n - s \right) g(s) \\ &= f_{\text{ext}}(t - s) g(s) \end{aligned}$$

   Por lo que

$$f(t_n - s)_{\text{ext}} g(s) \to f(t - s)_{\text{ext}} g(s), \forall s \in \mathbb{R}.$$

   Por otra parte, $|f_{\text{ext}}| \leq M$, en $[-\pi, \pi]$.
   En particular, se tiene que $|f_{\text{ext}}(t_n - s)| \leq M$.
   Multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $|g(s)|$, se obtiene:
   $|f_{\text{ext}}(t_n - s)| \, |g(s)| \leq M \, |g(s)| \, , \forall s \in \mathbb{R}$.
   Tenemos ahora las hipótesis que se necesitan para utilizar el teorema de convergencia dominada. Así:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} (f * g)(t_n) &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t_n - s) g(s) d\mu(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t - s) g(s) d\mu(s) \\ &= (f * g)(t) \\ &= (f * g) \left(\lim_{n \to \infty} t_n \right) \end{aligned}$$

   $\therefore f * g$ es continua.
   Veamos que $f * g$ es $2\pi-$periódica:
   Como $f(x) = f(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (f * g)(x + 2\pi k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)} f_{\text{ext}}(x + 2\pi k - s) g(s) d\mu(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)} f_{\text{ext}}(x - s) g(s) d\mu(s) \\ &= (f * g)(x) \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $f * g \in X$.

2. Ejercicio. (*Sugerencia*: Si $t, s \in [-\pi, \pi], t$ fijo, considerar el cambio de variable $u = t - s$.)
3. Ejercicio. (*Sugerencia*: Utilizar la linealidad de la integral.)

4. Sea $f \in X$. Basta probar que $\forall n \in \mathbb{Z}, f * \varphi_n$ es un polinomio trigonométrico.
   Sea $n \in \mathbb{Z}$, sea $P(t) = \varphi_n(t) = e^{nit}, \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
(f * P)(t) &= (P * f)(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ni(t-s)} f(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{nit} e^{-nis} f(s) d\mu(s) \\
&= e^{nit} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-nis} d\mu(s) \\
&= \langle f, \varphi_n \rangle_H e^{nit} \\
&= a_n e^{nit}
\end{aligned}$$

   Esto se tiene $\forall t \in [-\pi, \pi]$, con $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle_H$.

□

Definición 12 (Sucesión De Dirac). Sea $(P_n)_{n \in N}$ sucesión de polinomios trigonométricos. Diremos que $(P_n)_{n \in N}$ es una *sucesión de Dirac*, si tiene las siguientes propiedades :

1. $$P_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. $$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} P_n d\mu = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. $$\lim_{n \to \infty} \int_{A_\delta} P_n d\mu = 0.$$

   Donde:
   $$\forall \delta > 0, A_\delta := \{t \in [-\pi, \pi] \mid \ \delta \leq |t|\}.$$

   Es decir:
   $$\forall \delta > 0, A_\delta = \{t \in [-\pi, \pi] \mid \ t \leq -\delta\} \cup \{t \in [-\pi, \pi] \mid \ \delta \leq t\}.$$
   $$[(-\pi) - -(-\delta) - -(0) - -(\delta) - - \ (\pi)]$$

Lema 13. Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac y $f \in X$,entonces $f * P_n$ converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Elijamos $M > 1$ tal que $|f| \leq M$. Como $f \in X$, f es una función continua en $[-\pi, \pi]$. Como $[-\pi, \pi]$ es un conjunto compacto, f es una función uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$.
Por otra parte:
$$t, s \in [-\pi, \pi] \implies -2\pi \leq t - s \leq 2\pi.$$
Por lo anterior es necesario considerar una extensión continua de la función f en $[-\pi, \pi]$ al conjunto compacto $[-2\pi, 2\pi]$. Es decir, una función continua que restringida al conjunto compacto $[-\pi, \pi]$ sea igual a f.
Llamemos a esta función g. Como g es una función continua en $[-2\pi, 2\pi]$ y como $[-2\pi, 2\pi]$ es un conjunto compacto, g es una función uniformemente continua en $[-2\pi, 2\pi]$.
Sea $\varepsilon > 0$.
   Por lo que $\exists \delta > 0$ tal que si $|s| \leq \delta, t \in [-\pi, \pi], t - s \in [-\pi, \pi],$ se tiene que :

$$|g(t) - g(s - t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Restringiendo g a $[-\pi,\pi]$, se tiene :

$$|f(t)-g(s-t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Fijemos a $t \in [-\pi,\pi]$.
Como

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi)} P_n d\mu = 1.$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
|(f*P_n)(t)-f(t)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)P_n(s)d\mu(s) - f(t)\cdot 1\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)P_n(s)d\mu(s) - f(t)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_n(s)d\mu(s)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)P_n(s)d\mu(s) - f(t)\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_n(s)d\mu(s)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_{\text{ext}}(t-s)P_n(s) - f(t)P_n(s)\right) d\mu(s)\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(f_{\text{ext}}(t-s) - f(t)\right) P_n(s) d\mu(s)\right|
\end{aligned}$$

Y por el teorema 2, se tiene que :

$$\begin{aligned}
|(f*P_n)(t)-f(t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\left(f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right)P_n(s)\right| d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right| \left|P_n(s)\right| d\mu(s)
\end{aligned}$$

Y como

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \geq 0.$$

Se tiene entonces que:

$$|(f*P_n)(t)-f(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right| P_n(s)d\mu(s).$$

Pero

$$[-\pi,\pi] = [-\delta,\delta] \cup A_\delta.$$

Por tanto :

$$|(f*P_n)(t)-f(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right| P_n(s)d\mu(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{A_\delta} \left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right| P_n(s)d\mu(s).$$

- Para la primera integral :
  Como

$$|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Se tiene que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right|P_n(s)d\mu(s)\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

- Para la segunda integral :

$$\begin{aligned}\left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right| &\leq |f(t-s)|+|f(t)|\\ &= 2M.\end{aligned}$$

Y como

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_\delta}P_n d\mu=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}\ni\forall n\geq N,\left|\int_{A_\delta}P_n d\mu\right|<\frac{\pi}{2M}\varepsilon.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{A_\delta}\left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right|P_n(s)d\mu(s) &\leq \frac{2M}{2\pi}\int_{A_\delta}P_n d\mu\\ &< \frac{M}{\pi}\frac{\pi}{M}\frac{\varepsilon}{2}\\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\left|\left(f*P_n\right)(t)-f(t)\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right|P_n(s)d\mu(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{A_\delta}\left|f_{\text{ext}}(t-s)-f(t)\right|P_n d\mu(s)\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lema 14. Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Dirac y $f\in X$,entonces $f*P_n$ converge en H.

Demostración. Por el lema 13 :

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\left(f*P_n\right)(t)-f(t)\right|=0.$$

Y por el corolario 4 :

$$\|f*P_n-f\|_2^2\leq\|f*P_n-f\|_\infty^2\,\mu\left([-\pi,\pi]\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_2^2\leq\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_\infty^2\,\mu\left([-\pi,\pi]\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_2^2\leq\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\left(f*P_n\right)(t)-f(t)\right|\right)^2\cdot 2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_2^2\leq\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[-\pi,\pi]}\left|\left(f*P_n\right)(t)-f(t)\right|\right)^2$$

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_2^2\leq 0^2=0$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\|f*P_n-f\|_2^2=\lim_{n\to\infty}\|f*P_n-f\|_H=0.$$

□

Lema 15.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n d\mu(t) = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Recordemos que :

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(t)).$$

Y que :

$$\operatorname{sen}(t) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Consideremos el cambio de variable

$$\begin{aligned} u = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad &\Longrightarrow \quad du = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &\Longrightarrow \quad du = -\operatorname{sen}(t)dt. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n d\mu(t) &= -\int_0^\pi \left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n (-\operatorname{sen}(t))\, d\mu(t) \\ &= \int_\pi^0 \left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n (-\operatorname{sen}(t))\, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\left(\cos^2(0)\right)^{n+1} - \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(1^{n+1} - 0^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

□

Teorema 16. $\mathcal{T}$ es denso en X.

Demostración. Por las propiedades de la convolución y por el lema 13, basta encontrar una sucesión de polinomios trigonométricos que sea de Dirac.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos $c_n > 0$ tal que :

$$P_n(t) := C_n\left(\frac{1}{2}\left[1 + \mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n.$$

satisfaga la condición:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi)} P_n d\mu = 1.$$

Por construcción, $P_n \geq 0$. Encontremos una cota superior para C_n. Como P_n es una función par y se tiene que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi)} P_n d\mu = 1.$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_n\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{2C_n}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{C_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)
\end{aligned}$$

Como $|\mathrm{sen}(\tau)| \leq 1, \forall\tau \in [-2\pi, 2\pi]$ y por el lema 15,se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{C_n}{\pi(n+1)} &= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(t)\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n d\mu(t)\\
&\leq \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n d\mu(t)\\
&= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\left[1+\mathbb{R}_e\left(\varphi_1(t)\right)\right]\right)^n d\mu(t)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Así:

$$C_n \leq (n+1)\pi, \forall.n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Sea $\delta > 0, t \in [-\pi, \pi]$ tal que $\delta \leq |t|$.
Entonces $|\cos(t)| \leq \cos(\delta) < 1$. Como $C_n \leq (n+1)\pi, \forall.n \in \mathbb{N}$ y

$$\forall\delta > 0, A_\delta \coloneqq \{t \in [-\pi, \pi] \mid \ \delta \leq |t|\}.$$

, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{A_\delta} P_n d\mu &= \frac{C_n}{\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(t)\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^n d\mu(t)\\
&= C_n\int_{A_\delta}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n\\
&\leq (n+1)\pi\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Queda como ejercicio probar que la última sucesión converge a 0. □

Corolario 17. $\mathcal{T}$ es denso en H.

Demostración. Se tiene por el teorema 16 y por el lema 14. □

Proposición 18. $(\varphi_m)_{m\in Z}$ es una base ortonormal de H.

Demostración. Se tiene por los resultados de la teoría general de los espacios de Hilbert. $\square$

Definición 19. Sea $f \in H$. Entonces los números

$$\hat{f}_k := \langle f, \varphi_k \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-kix} d\mu(x).$$

se llaman los *coeficientes de Fourier* de la función f.

Definición 20. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k$ se llama la serie de Fourier asociada a la sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

De acuerdo con las propiedades generales de bases ortonormales, obtenemos las siguientes propiedades de los coeficientes de Fourier y de las series de Fourier.

1. Sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$. Entonces la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_k$ converge en H.Esto es, existe una única función $g \in H$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \varphi_k - g \right\|_H = 0.$$

   Más aún, $\langle g, \varphi_k \rangle_H = \alpha_k, \forall k \in \mathbb{Z}$. Y se tiene que:

$$\|g\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 .$$

2. Sea $f \in H$. Entonces $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k \varphi_k$ .Es decir :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k \varphi_k - f \right\|_H = 0.$$

   Más aún:

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle_H|^2$$

Series de Fourier en $\mathbf{L}^2$ (Continuación del tema anterior)

Recordamos que el espacio $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ (equivalente a H) está dotado del producto interno

$$\langle f,g\rangle_H := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}d\mu(x).$$

Y que para cada $k\in\mathbb{Z}$, se denota por φ_k a la k-ésima función básica de Fourier

$$\varphi_k(x) := e^{ikx}.$$

Ya se probó que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal en H (y por tanto en $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$). Los coeficientes de Fourier de una función f se pueden escribir como:

$$\hat{f}_k = \langle f.\varphi_k\rangle_H .$$

Por lo probado anteriormente, se tiene que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es densa en H (y por tanto en $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$) y por la teoría general de espacios de Hilbert se dedujo que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal.
Se tiene también que si $f\in H$ (y por tanto en $L^2_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$) y $\forall k\in\mathbb{Z}, \hat{f}_k=0,$ entonces f se anula casi en todas partes. De nuevo, por la teoría general de espacios de Hilbert, se tiene que la sucesión $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es total.
En particular, estudiaremos la desigualdad de Bessel y la identidad de Parseval en el espacio de Hilbert H.

Nos preguntamos ahora para que valores $\lambda_{-n},\lambda_{-n+1},\ldots,\lambda_n\in\mathbb{C}$, asumiendo que existen, minimizan a $\left\|f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\|_H$. O geométricamente, ¿qué g (en caso de que existan) tales que pertenecen al subespacio $\left\{\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j \mid \lambda_j\in\mathbb{C}\right\}$ minimizan a $\|f-g\|_H, f\in H$?

Observación 5 (Conjetura). ¿Dado $f\in H$, existe un único $g_0\in E:=\left\{\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j \mid \lambda_j\in\mathbb{C}\right\}$ tal que

$$\|f-g_0\|_H < \|f-g\|_H, \forall g\in E, g\neq g_0.$$

Observación 6 (Conjetura). Dados $f,g\in H$, $\langle f-g_0,h\rangle_H=0$.

Observación 7. Notemos que $\forall j\in[|-n,n|]$:

1. $$g_0\in\left\{\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j \mid \lambda_j\in\mathbb{C}\right\} \implies g_0=\sum_{k=-n}^{n}\mu_k\varphi_k.$$

   Por tanto:

   $$\begin{aligned}\langle f-g_0,\varphi_j\rangle_H &= \langle f,\varphi_j\rangle_H - \langle g_0,\varphi_j\rangle_H\\ &= \langle f,\varphi_j\rangle_H - \left\langle \sum_{k=-n}^{n}\mu_k\varphi_k,\varphi_j\right\rangle_H\\ &= \langle f,\varphi_j\rangle_H - \sum_{k=-n}^{n}\mu_k\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle_H\end{aligned}$$

   Como $\langle\varphi_k,\varphi_j\rangle_H=\delta_{k,j}$:

   $$\begin{aligned}\langle f-g_0,\varphi_j\rangle_H &= \langle f,\varphi_j\rangle_H-\mu_j\\ \langle f,\varphi_j\rangle_H-\langle g_0,\varphi_j\rangle_H &= \langle f,\varphi_j\rangle_H-\mu_j\\ \mu_j &= \langle g_0,\varphi_j\rangle_H\end{aligned}$$

2. Si $\langle f - g_0, \varphi_j \rangle_H = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle f - g_0, \varphi_j \rangle_H = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle f, \varphi_j \rangle_H - \langle g_0, \varphi_j \rangle_H = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \langle f, \varphi_j \rangle_H = \langle g_0, \varphi_j \rangle_H \\ &\Leftrightarrow \quad \langle f, \varphi_j \rangle_H = \sum_{k=-n}^{n} \mu_k \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_H \\ &\Leftrightarrow \quad \mu_j = \langle f, \varphi_j \rangle_H \end{aligned}$$

O equivalentemente:

$$g_0 = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle_H \varphi_k$$

Así:

$$\begin{aligned} \langle g_0, \varphi_j \rangle_H &= \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle_H \varphi_k, \varphi_j \right\rangle_H \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle_H \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_H \\ &= \langle f, \varphi_k \rangle_H \delta_{j,j} \\ &= \langle f, \varphi_j \rangle_H \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\langle f, \varphi_j \rangle_H = \langle g_0, \varphi_j \rangle_H \implies \langle f - g_0, \varphi_j \rangle_H = 0 \implies f - g_0 \perp \varphi_j, \forall j \in [|-n, n|] \,.$$

A partir de ahora, trataremos de responder lo que significa que $\mu_j = \langle f, \varphi_j \rangle_H$.

Lema 21. $\forall \lambda_j \in \mathbb{C},\ f \in H,\ j \in \mathbb{Z},\ \varphi_j$ función básica de Fourier, se tiene que:

$$\left(\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle_H\right) \overline{\left(\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle_H\right)} = \lambda_j \overline{\lambda_j} - \lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle_H - \overline{\lambda_j} \langle f, \varphi_j \rangle_H + \langle f, \varphi_j \rangle_H \overline{\langle f, \varphi_j \rangle_H}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left(\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle_H\right) \overline{\left(\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle_H\right)} &= \left(\lambda_j - \langle f, \varphi_j \rangle_H\right) \left(\overline{\lambda_j} - \overline{\langle f, \varphi_j \rangle_H}\right) \\ &= \lambda_j \overline{\lambda_j} - \lambda_j \langle f, \varphi_j \rangle_H - \overline{\lambda_j} \langle f, \varphi_j \rangle_H + \langle f, \varphi_j \rangle_H \overline{\langle f, \varphi_j \rangle_H} \end{aligned}$$

□

Teorema 22 (Desigualdad de Bessel). Sea $f \in H$, se tiene que:

$$g_0 = \sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j, g = \sum_{j=-n}^{n} \lambda_j \varphi_j \implies \|f\|_H^2 \geq \sum_{j=-n}^{n} \left| \langle f, \varphi_j \rangle_H \right|^2 = \sum_{j=-n}^{n} \left| \hat{f}_j \right|^2$$

Más aún:

$$\|f - g\|_H \geq \|f - g_0\|_H \,, \|f - g\|_H = \|f - g_0\|_H \Leftrightarrow \lambda_j = \langle f, \varphi_j \rangle_H = \hat{f}_j, \forall j \in [|-n, n|]$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_H^2 &= \left\langle f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j, f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\rangle_H \\
&= \left\langle f, f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\rangle_H - \left\langle \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j, f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\rangle_H \\
&= \|f\|_H^2 - \left\langle f, \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\rangle_H - \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\left\langle \varphi_j, f-\sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\varphi_j\right\rangle_H \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H - \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\left(\left\langle\varphi_j, f\right\rangle_H - \sum_{j=-n}^{n}\overline{\lambda_j}\left\langle\varphi_j,\varphi_j\right\rangle_H\right) \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H - \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\left\langle\varphi_j, f\right\rangle_H + \sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n}\lambda_j\overline{\lambda_k}\left\langle\varphi_j,\varphi_k\right\rangle_H \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H - \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H} + \sum_{j=-n}^{n}\lambda_j\overline{\lambda_j}\delta_{j,j} \\
&= \|f\|_H^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left(-\overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H - \lambda_j\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H} + \lambda_j\overline{\lambda_j}\right)
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H \overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H}$ dentro de la suma:

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_H^2 &= \|f\|_H^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left(-\overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H - \lambda_j\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H} + \lambda_j\overline{\lambda_j} + \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H} - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H}\right) \\
&= \|f\|_H^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left(\lambda_j\overline{\lambda_j} - \lambda_j\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H} - \overline{\lambda_j}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H + \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H}\right) - \sum_{j=-n}^{n}\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\overline{\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H}
\end{aligned}$$

Y por el *lema* 21, se tiene que :

$$\begin{aligned}
\|f-g\|_H^2 &= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\left|\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left(\lambda_j - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right)\overline{\left(\lambda_j - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right)} \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\left|\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left|\lambda_j - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{j=-n}^{n}\left|\lambda_j - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2 \geq 0$$

Se obtiene:

$$\|f-g\|_H^2 \geq \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\left|\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2$$

Es evidente que :

$$\begin{aligned}
\|f-g_0\|_H^2 &= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\left|\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n}\left|\lambda_j - \left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2 \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n}\left|\left\langle f,\varphi_j\right\rangle_H\right|^2
\end{aligned}$$

Así:

$$\|f-g\|_H^2 \geq \|f-g_0\|_H^2$$

Y como $\|f-g_0\|_H^2 \geq 0$, se tiene que :

$$\|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 \geq 0 \implies \|f\|_H^2 \geq \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 .$$

Finalmente, veamos que :

$$\|f-g\|_H = \|f-g\|_H \Leftrightarrow \forall j \in [|-n,n|]\; \lambda_j = \langle f,\varphi_j\rangle_H = \hat{f}_j.$$

- $\Rightarrow$)

$$\|f-g\|_H = \|f-g\|_H \implies \|f-g\|_H^2 = \|f-g\|_H^2$$

Y tenemos que:

$$\|f-g\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n} \left|\lambda_j - \langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 .$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \|f-g_0\|_H^2 &= \left\langle f - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, f - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\rangle_H \\ &= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 . \end{aligned}$$

Así:

$$\|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n} \left|\lambda_j - \langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 .$$

$$\sum_{j=-n}^{n} \left|\lambda_j - \langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall j \in [|-n,n|]\,, \lambda_j = \langle f,\varphi_j\rangle_H = \hat{f}_j.$$

- $\Leftarrow$)
Supongamos que para cada $j \in [|-n,n|]\,, \lambda_j = \langle f,\varphi_j\rangle_H = \hat{f}_j$.
Entonces:

$$\begin{aligned} \|f-g\|_H^2 &= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n} \left|\lambda_j - \langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 \\ &= \|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 \\ &= \|f-g_0\|_H^2 . \end{aligned}$$

Luego, tomando raices en ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene que :

$$\left|\|f-g_0\|_H^2\right| = \sqrt{\|f-g_0\|_H^2} = \sqrt{\|f-g\|_H^2} = \left|\|f-g\|_H^2\right|.$$

Y como $\|f-g\|_H \geq 0$ y $\|f-g_0\|_H \geq 0$, tenemos :

$$\|f-g\|_H = \|f-g_0\|_H .$$

$\square$

Lema 23 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

$$\forall f,g \in H, |\langle f,g\rangle_H| \leq \|f\|_H \|g\|_H .$$

Demostración. Sean $f, g \in H$.
Si $g = 0_H$, no hay nada que demostrar.
Supongamos que $g \neq 0$.
Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f-\lambda g, f-\lambda g\rangle_H \\ &= \langle f, f-\lambda g\rangle_H - \langle \lambda g, f-\lambda g\rangle_H \\ &= \langle f,f\rangle_H - \overline{\lambda}\langle f,g\rangle_H - \lambda\langle g,f\rangle_H + \lambda\overline{\lambda}\langle g,g\rangle_H \\ &= \langle f,f\rangle_H - \overline{\lambda}\langle f,g\rangle_H - \lambda\overline{\langle f,g\rangle_H} + |\lambda|^2\langle g,g\rangle_H . \end{aligned}$$

En particular, si $\lambda = \frac{\langle f,g\rangle_H}{\langle g,g\rangle_H}$, se tiene que:

$$0 \leq \langle f,f\rangle_H - \frac{|\langle f,g\rangle_H|^2}{\langle g,g\rangle_H}.$$

Por lo que:

$$|\langle f,g\rangle_H| \leq \|f\|_H \|g\|_H .$$

□

Lema 24 (Continuidad del producto interno). Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ sucesiones que conbergen puntualmente a f y a g respectivamente.
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_H = \langle f,g\rangle_H$$

Demostración. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, es una succesión acotada.
Consideremos $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq M$.
Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| &= |\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f_n,g\rangle_H + \langle f_n,g\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| \\ &\leq |\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f_n,g\rangle_H| + |\langle f_n,g\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| \\ &= |\langle f_n, g_n - g\rangle_H| + |\langle f_n - f, g\rangle_H| . \end{aligned}$$

Por el lema 23, se tiene que:

$$|\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| \leq \|f_n\| \|g_n - g\| + \|g\| \|x_n - x\|$$

Finalmente, como $\|f_n\|$ es acotado :

$$|\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| \leq M\|g_n - g\| + \|g\| \|x_n - x\| .$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle f_n,g_n\rangle_H - \langle f,g\rangle_H| = 0.$$

□

Teorema 25 (Riesz-Fischer). Sea $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sucesión de funciones básicas de Fourier en H. Sea $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, es decir:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty.$$

Entonces:

$$\exists g \in H, \forall k \in \mathbb{Z} \ni a_k = \langle g, \varphi_k\rangle_H .$$

Además:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 = \langle g,g\rangle_H = \|g\|_H^2 .$$

Demostración. Definamos

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$.
Procedamos por casos:

- $m = n$
  $g_n - g_m = 0$

- $m < n$
  $-n \qquad \cdots - m - 1 - m \qquad \ldots \qquad m \quad m+1 \quad \ldots \quad n$

  $$g_n - g_m = \sum_{l=-n}^{n} a_l \varphi_l - \sum_{j=-m}^{m} a_j \varphi_j = \sum_{l=-n}^{-m-1} a_l \varphi_l + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \varphi_j.$$

  Como $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

  $$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|_H^2 &= \left\| \sum_{l=-n}^{-m-1} a_l \varphi_l + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_H^2 \\ &= \left\| \sum_{l=-n}^{-m-1} a_l \varphi_l \right\|_H^2 + \left\| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \varphi_j \right\|_H^2 \\ &= \sum_{l=-n}^{-m-1} |a_l|^2 + \sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2 . \end{aligned}$$

- $n < m$
  $-m \qquad \cdots - n - 1 \quad - n \quad \ldots \qquad n \quad n+1 \quad \ldots \quad m$

  $$g_n - g_m = \sum_{l=-n}^{n} a_l \varphi_l - \sum_{j=-m}^{m} a_j \varphi_j = -\sum_{l=-m}^{-n-1} a_l \varphi_l - \sum_{j=n+1}^{m} a_j \varphi_j.$$

  Como $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

  $$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|_H^2 &= \left\| -\sum_{l=-m}^{-n-1} a_l \varphi_l - \sum_{j=n+1}^{m} a_j \varphi_j \right\|_H^2 \\ &= \left\| \sum_{l=-m}^{-n-1} a_l \varphi_l + \sum_{j=n+1}^{m} a_j \varphi_j \right\|_H^2 \\ &= \left\| \sum_{l=-m}^{-n-1} a_l \varphi_l \right\|_H^2 + \left\| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \varphi_j \right\|_H^2 \\ &= \sum_{l=-m}^{-n-1} |a_l|^2 + \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|^2 . \end{aligned}$$

En cualquier caso, dado que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|g_n - g_m\|_H^2 &= \sum_{l=-n}^{-m-1} |a_l|^2 + \sum_{j=m+1}^{n} |a_j|^2 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty \\ \|g_n - g_m\|_H^2 &= \sum_{l=-m}^{-n-1} |a_l|^2 + \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|^2 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto, $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como H es completo, $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es convergente.
Esto garantiza la existencia de un $g \in H$ tal que :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k - g \right\|_H = 0.$$

Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g - \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k \right\|_H^2 = 0. \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left\langle g - \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k , g - \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k \right\rangle_H = 0.$$

Consideremos $i \geq N, N \in \mathbb{N}$. Sea $l \geq i$.

$$\langle g, \varphi_i \rangle_H = \langle g_l, \varphi_i \rangle_H + \langle g - g_l, \varphi_i \rangle_H .$$

Notemos que:

$$\langle g - g_l, \varphi_i \rangle_H < \langle g - g_l, g - g_l \rangle_H < \left\langle g - \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k , g - \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k \right\rangle_H .$$

Por el lema 24, se tiene que:

$$\langle g - g_l, \varphi_i \rangle_H = 0.$$

para l suficientemente grande.
Y:

$$\langle g_l, \varphi_i \rangle_H = \left\langle \sum_{k=-l}^{l} a_k \varphi_k , \varphi_i \right\rangle_H = \sum_{k=-l}^{l} a_k \langle g_k, \varphi_i \rangle_H = a_i.$$

Por lo que: $a_i = \langle g, \varphi_i \rangle_H$.
Finalmente, por la continuidad de la norma de H y porque x^2 es una función continua, al tomar el límite cuando n tiende a infinito, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=-n}^{n} a_k \varphi_k - g \right\|_H^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\|g\|_H^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\langle g, \varphi_k \rangle_H|^2 + \sum_{k=-n}^{n} \left| a_k - \langle g, \varphi_j \rangle_H \right|^2 \right) \\ &= \|g\|_H^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, \varphi_k \rangle_H|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| a_k - \langle g, \varphi_j \rangle_H \right|^2 . \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|g\|_H^2 + \sum_{k=-n}^{n} \left| a_k - \langle g, \varphi_j \rangle_H \right|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle g, \varphi_k \rangle_H|^2 .$$

Como $a_i = \langle g, \varphi_i \rangle_H$, y por el teorema 21, se concluye que :

$$\|g\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, \varphi_k \rangle_H|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \|g\|_H^2 < +\infty.$$

□

Proposición 26 (Identidad de Parseval). Sea $f \in H$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j \right\|_H = 0 \ \wedge \ \|f\|_H^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left| \langle f, \varphi_j \rangle_H \right|^2 .$$

Demostración. Veamos que la siguiente sucesión es de Cauchy en H :

$$\left\{\sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$.
Procedamos por casos:

- $m = n$

$$\sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j - \sum_{l=-m}^{m} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j = 0.$$

- $m < n$

  $-n \quad \cdots - m - 1 - m \quad \ldots \quad m \quad m+1 \quad \ldots \quad n$

  Como $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j - \sum_{l=-m}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_j\right\|_H^2 &= \left\|\sum_{j=-n}^{-m-1} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j + \sum_{l=m+1}^{n} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_l\right\|_H^2 \\
&= \left\|\sum_{j=-n}^{-m-1} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j\right\|_H^2 + \left\|\sum_{l=m+1}^{n} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_l\right\|_H^2 \\
&= \sum_{j=-n}^{-m-1} \left|\langle f, \varphi_j \rangle_H\right|^2 + \sum_{l=m+1}^{n} \left|\langle f, \varphi_l \rangle_H\right|^2.
\end{aligned}$$

- $n < m$

  $-m \quad \cdots - n - 1 \quad - n \quad \ldots \quad n \quad n+1 \quad \ldots \quad m$

  Como $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal, por el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j - \sum_{l=-m}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_j\right\|_H^2 &= \left\|- \sum_{j=-m}^{-n-1} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j - \sum_{l=n+1}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_l\right\|_H^2 \\
&= \left\|\sum_{j=-m}^{-n-1} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j + \sum_{l=n+1}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_l\right\|_H^2 \\
&= \left\|\sum_{j=-m}^{-n-1} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j\right\|_H^2 + \left\|\sum_{l=n+1}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_l\right\|_H^2 \\
&= \sum_{j=-m}^{-n-1} \left|\langle f, \varphi_j \rangle_H\right|^2 + \sum_{l=n+1}^{m} \left|\langle f, \varphi_l \rangle_H\right|^2.
\end{aligned}$$

Como $f \in H$, $\|f\|_H^2 < +\infty$.
Dado $N = \max\{n, m\}$ y por el teorema 21, en cualquier caso, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=-n}^{n} \langle f, \varphi_j \rangle_H \varphi_j - \sum_{l=-m}^{m} \langle f, \varphi_l \rangle_H \varphi_j\right\|_H^2 &= \sum_{j=-n}^{-m-1} \left|\langle f, \varphi_j \rangle_H\right|^2 + \sum_{l=m+1}^{n} \left|\langle f, \varphi_l \rangle_H\right|^2 \\
&< \sum_{k=-N}^{N} \left|\langle f, \varphi_k \rangle_H\right|^2 \\
&\leq \|f\|_H^2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j - \sum_{l=-m}^{m} \langle f,\varphi_l\rangle_H \varphi_j \right\|_H^2 &= \sum_{j=-m}^{-n-1} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 + \sum_{l=n+1}^{m} \left|\langle f,\varphi_l\rangle_H\right|^2 \\
&< \sum_{k=-N}^{N} \left|\langle f,\varphi_k\rangle_H\right|^2 \\
&\leq \|f\|_H^2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\left\{\sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como H es completo, $\left\{\sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
Esto garantiza la existencia de un $g \in H$ tal que :

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\|_H = 0.$$

Esto implica que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\|_H^2 = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} \left\langle g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\rangle_H = 0.$$

Veamos que $f = g$:
Consideremos $n > k \geq N, N \in \mathbb{N}$.

$$\langle g,\varphi_k\rangle_H = \left\langle \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_H + \left\langle g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_H.$$

Notemos que:

$$\left\langle g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_H < \left\langle g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\rangle_H.$$

Por el lema 24, se tiene que:

$$\left\langle g - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_H = 0.$$

para k suficientemente grande.
Y:

$$\left\langle \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j, \varphi_k \right\rangle_H = \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \langle \varphi_j,\varphi_k\rangle_H = \langle f,\varphi_k\rangle_H.$$

Por lo que: $\langle g,\varphi_k\rangle_H = \langle f,\varphi_k\rangle_H \Leftrightarrow \langle f-g,\varphi_k\rangle_H = 0$.
Así, por lo comentado anteriormente, $f = g$ casi en todas partes. Pero como los elementos de H son clases de equivalencia, se tiene que $f = g$.
Finalmente, por la continuidad de la norma de H y porque x^2 es una función continua, al tomar el límite cuando n tiende a infinito, se tiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{j=-n}^{n} \langle f,\varphi_j\rangle_H \varphi_j \right\|_H^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\|f\|_H^2 - \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 + \sum_{j=-n}^{n} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H - \langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2 \right) \\
&= \|f\|_H^2 - \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\langle f,\varphi_j\rangle_H\right|^2
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|f\|_H^2 = \sum_{j=-n}^{n} |\langle g, \varphi_k \rangle_H|^2 .$$

Es decir:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi)} |f|^2 \, d\mu = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \langle f, \varphi_j \rangle_H \right|^2 .$$

$\square$

Demostración alternativa. Definamos la función $i : H \to \ell^2(\mathbb{Z})$ como:

$$\forall f \in H, \; i(f) \coloneqq (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \, , \; a_k \coloneqq \langle f, \varphi_k \rangle_H \, .$$

Por el teorema 21, i está bien definida, ya que :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty.$$

Y por el teorema 24, se tiene el resultado. $\square$

Definición 27 (Sucesión ortonormal maximal)*.* Diremos que una sucesión ortonormal $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es maximal si deja de ser ortonormal al agregarle a la sucesión cualquier otro elemento de H de tal forma que ese elemento no sea perteneciente a la sucesión ortonormal $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Concluyamos con la siguiente proposición:

Proposición 28*.* En todo espacio separable, toda base ortonormal es una sucesión ortonormal maximal.

Demostración. Sea $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una base ortonormal en H. Si suponemos que dicha base no constituye un conjunto ortonormal maximal, entonces existirá $g \in H, g \neq 0$ tal que $\forall k \in \mathbb{Z}, \langle g, e_k \rangle_H = 0$.
Como $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal, g puede expresarse mediante su serie de Fourier con respecto a $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle g, e_k \rangle_H \, e_k.$$

Pero como $\forall k \in \mathbb{Z}, \; \langle g, e_k \rangle_H = 0$, entonces $x = 0$ casi en todas partes, lo cual es una contradicción.
$\square$

Convolución Periódica

Definición 29 (Convolución periódica de dos funciones). Si $f, g \in X$, cuyo dominio es $[-\pi, \pi]$, decimos que $f * g$ es la convolución de f y g y la definimos como :

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)d\mu(s), \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Notemos que si se fija t en la definición anterior, $f * g$ está bien definida, pues su integrando es una función continua de s, al ser producto de dos funciones continuas.
Más aún, por la observación 4, es posible que la diferencia de dos elementos en $[-\pi, \pi]$ no pertenezca a $[-\pi, \pi]$.
Esto es un problema, que se puede resolver considerando una *función extendida* de f, la cuál denotaremos simplemente por f_{ext}. Esta función será de tal forma que sea periódica y continua en toda la recta real, y de tal forma que restringida al intervalo $[-\pi, \pi]$, sea igual a la función original f.

Definición 30 (Función Extendida). Sea $f \in X$ cuyo dominio es $[-\pi, \pi]$.
Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene :

$$f_{\text{ext}}(x) := f(x - 2\pi k).$$

Es decir, esta función está definida como sigue:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists k = k(x) \in \mathbb{Z} \ni x - 2\pi k \in [-\pi, \pi].$$

En este caso, se tiene que: $f = f_{\text{ext.}}$ Por simplicidad de notación, cuando consideremos a f fuera de $[-\pi, \pi]$, se supondrá que se está trabajando con esta función extendida.

Lema 31. Sean $f, g, h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

1. $f * g$ es $2\pi-$periódica.
2. $f * g = g * f$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h, f * (\lambda g) = (\lambda f) * g$

Demostración.

1.
   Sea $x \in [-\pi, \pi)$, arbitrario pero fijo.
   Como $f(x) = f(x + 2\pi k), \forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (f * g)(x + 2\pi k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} f_{\text{ext}}(x + 2\pi k - s)\, g(s)d\mu(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi)} f_{\text{ext}}(x - s)\, g(s)d\mu(s) \\ &= (f * g)(x) \end{aligned}$$

2.
   Notemos primero que si $F \in X$, entonces :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{[a,a+2\pi)} F d\mu = \int_{[-\pi,\pi)} F d\mu.$$

Sea $t \in [-\pi, \pi)$, arbitrario pero fijo. Haciendo el cambio de variable $u = t - s$, se tiene :

$$\begin{aligned}
(g * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_{\text{ext}}(t-s) f(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) f_{\text{ext}}(t-u) d\mu(u) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-u) g(u) d\mu(u) \\
&= (f * g)(t).
\end{aligned}$$

3.

a) $f * (g + h) = f * g + f * h$
Sean $f, g, h \in X$. Sea $t \in [-\pi, \pi)$, arbitrario pero fijo.
Entonces:

$$\begin{aligned}
(f * (g+h))(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)(g+h)(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)(g(s)+h(s)) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s) g(s) d\mu(s) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s) h(s) d\mu(s) \\
&= (f * g)(t) + (f * h)(t) \\
&= ((f * g) + (f * h))(t).
\end{aligned}$$

b) $f * (\lambda g) = (\lambda f) * g$.
Sean $f, g, h \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.Sea $t \in [-\pi, \pi)$, arbitrario pero fijo.
Entonces:

$$\begin{aligned}
(f * (\lambda g))(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s)(\lambda g)(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ext}}(t-s) \lambda g(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f_{\text{ext}}(t-s) g(s) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f_{\text{ext}})(t-s) g(s) d\mu(s) \\
&= ((\lambda f) * g)(t).
\end{aligned}$$

□