Diagonalización de matrices circulantes por medio de la Transformada Discreta de Fourier

***Mario Guzmán Silverio, Egor Maximenko, Eliseo Sarmiento Rosales**

Instituto Politécnico Nacional

mguzmans1000@alumno.ipn.mx

Matrices circulantes

La forma general de matriz circulante 6×6 es

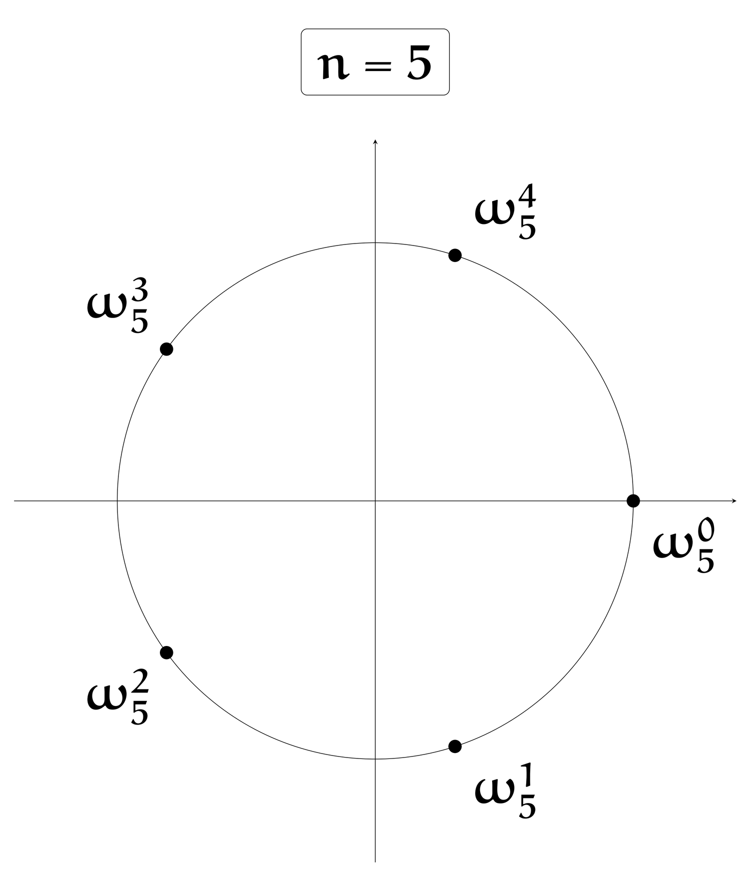
$$\begin{bmatrix} a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 & a_4 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_5 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = C_6(a), \qquad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}.$$

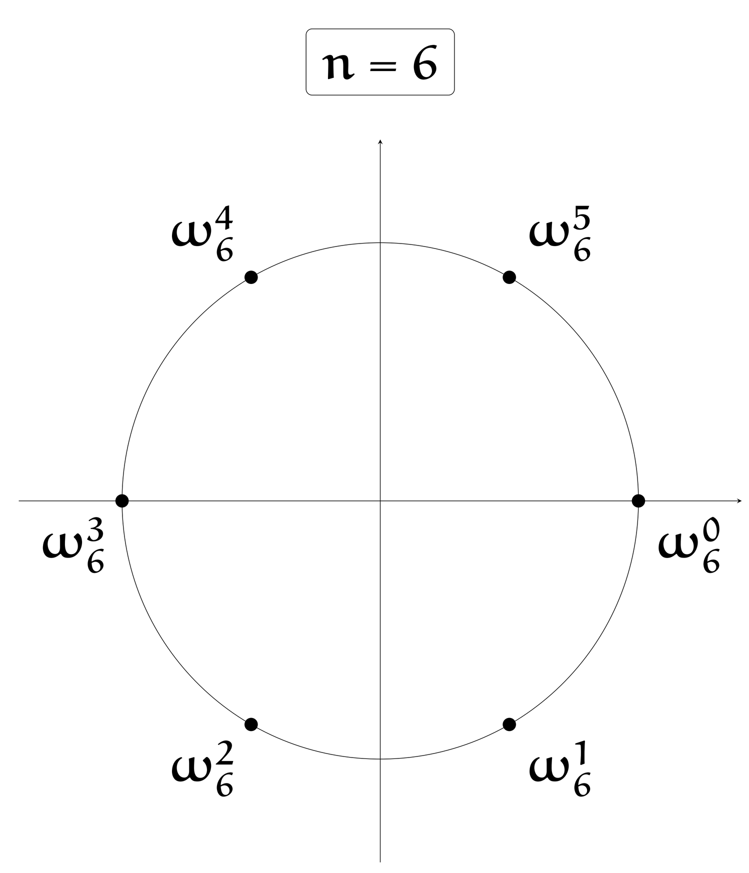
Definición 1 (matriz circulante generada por un vector)**.** Sea $a \in \mathbb{C}^n$. Entonces $C_n(a)$ es una matriz cuadrada de orden n, cuya entrada (j,k) es

$$C_n(a)_{j,k} = \begin{cases} a_{j-k}, & \text{si } j \geq k; \\ a_{n+j-k}, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Raíces de la unidad

Proposición 1. $\{z \in \mathbb{C} \colon z^n = 1\} = \{\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$, *donde* $\omega_n \coloneqq e^{-\frac{2\pi}{n}i}$.





Transformada discreta de Fourier (TDF)

Definición 2. Definimos la matriz $F_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ mediante la regla

$$F_n = \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

La transformación lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $x \mapsto F_n x$ se llama la *Transformada Discreta de Fourier*.

Por ejemplo,

$$F_4 = \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{\pi}{2}i} & e^{-\pi i} & e^{-\frac{3\pi}{2}i} \\ 1 & e^{-\pi i} & e^{-2\pi i} & e^{-3\pi i} \\ 1 & e^{-\frac{3\pi}{2}i} & e^{-3\pi i} & e^{-\frac{9\pi}{2}i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Proposición 2 (la matriz inversa de la matriz F_n)**.** *Se cumple la igualdad*

$$\frac{1}{n} F_n^* F_n = I_n,$$

así que

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n} F_n^* = \frac{1}{n}\left[\omega_n^{-jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

Diagonalización de matrices circulantes

Teorema 1 (principal)**.** *Sea* $a \in \mathbb{C}^n$. *Entonces*

$$\frac{1}{n} F_n C_n(a) F_n^* = \mathbf{diag}(F_n a).$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{2} F_2 C_2(a) F_2^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & 0 \\ 0 & a_0 - a_1 \end{bmatrix} = \mathbf{diag}(F_2 a).$$

Multiplicación de polinomios con matrices circulantes

Consideremos los siguientes polinomios

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2, \qquad g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2.$$

Calculamos su producto $h(x)$:

$$h(x) = f(x)g(x) = f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0)x + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0)x^2 + (f_1 g_2 + f_2 g_1)x^3 + f_2 g_2 x^4.$$

Y con matrices circulantes

$$\begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 & f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 & 0 & 0 & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 g_0 \\ f_0 g_1 + f_1 g_0 \\ f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 \\ f_1 g_2 + f_2 g_1 \\ f_2 g_2 \end{bmatrix} = h.$$

Notamos que las componentes del vector h son los coeficientes del producto $f(x)g(x)$.

Teorema 2. *Sean* $f \in \mathbb{C}_n[x]$, $g \in \mathbb{C}_m[x]$ *y*

$$\widetilde{f} = [\underbrace{f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots, 0}_{n+m-1}]^\top, \qquad \widetilde{g} = [\underbrace{g_0, g_1, \ldots, g_m, 0, 0, \ldots, 0}_{n+m-1}]^\top,$$

entonces

$$h = C(\widetilde{f})\widetilde{g},$$

donde h *es el vector de los coeficientes del polinomio* $h(x) = f(x)g(x)$.

Multiplicación de polinomios con la TRF

Usando la fórmula $h = C(\widetilde{f})\widetilde{g}$ podemos expresar h como

$$h = \frac{1}{n} F_n^* \big((F_n \widetilde{f}) \odot (F_n \widetilde{g}) \big),$$

donde $\odot$ es la multiplicación de vectores por componentes.

Con TRF se tiene una complejidad computacional $O(n \log n)$, mientras que la fórmula estándar tiene $O(n^2)$.

Algoritmo de la multiplicación rápida por medio de la TRF

```
function h = fastprod(f, g)
  s = length(f) + length(g) - 1;
  h = ifft(fft(f, s) .* fft(g, s));
end
```

Referencias

[1] C. Gasquet, P. Witomski (1999): Fourier Analysis and Applications.
[2] M. C. Peyra, L. A. Ward (2012): Harmonical Analysis From Fourier to Wavelets.
[3] A. V. Aho, J. D. Ullman, J. E. Hopcroft (1983): Data Structures and Algorithms.

Esta exposición es parcialmente apoyada por el proyecto IPN-SIP 20140639.