Un ejemplo que muestra la importancia de la integrabilidad absoluta en el teorema de Fubini

Elitania Guzmán Hernández,
Jessica Azuceti Moreno Zacarias
Con sugerencias del profesor Egor Maximenko
Análisis Matemático III

Veamos que la hipótesis de que f sea integrable es esencial para obtener el resultado del Teorema de Fubini.

Recordemos el Teorema de Fubini:

Teorema (de Fubini)**.** *Sean* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *y* $(Y,\mathcal{G},\nu)$ *espacios de medida* σ*-finita,* $f\in L^1(X\times Y,\mathcal{F}\times\mathcal{G},\mu\times\nu,\mathbb{C})$.

1. *Entonces para* μ*-ctp,* $x\in X$, $f_x\in L^1(Y,\mathcal{G},\nu,\mathbb{C})$,

   para ν*-ctp,* $y\in Y$, $f^y\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$.

2. *Definimos* $u\colon X\to\mathbb{C}$, $v\colon Y\to\mathbb{C}$,

$$u(x):=\int_Y f_x\,d\nu,\qquad v(y):=\int_X f^y\,d\mu.$$

   Más precisamente,

$$u(x):=\begin{cases}\displaystyle\int_Y f_x\,d\nu\,, & si\ f_x\in L^1(Y,\mathcal{G},\nu,\mathbb{C});\\ 0\,, & si\ f_x\notin L^1(Y,\mathcal{G},\nu,\mathbb{C}),\end{cases}$$

$$v(y):=\begin{cases}\displaystyle\int_X f^y\,d\mu\,, & si\ f^y\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C});\\ 0\,, & si\ f^y\notin L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}).\end{cases}$$

   Entonces $u\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$, $v\in L^1(Y,\mathcal{G},\nu,\mathbb{C})$.

3. *Entonces*

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\times\nu)=\int_X u\,d\mu=\int_Y v\,d\nu\,.$$

Construcción del contraejemplo.

Sean $X = Y \coloneqq [0,1]$, $\quad \mu = \nu \coloneqq$ la medida de Lebesgue.
Claro que μ es σ-finita.

Definición 1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$, definida por:

$$a_n \coloneqq 1 - \frac{1}{n}.$$

Notemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

$$n < n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}\ .$$

$\therefore \quad n < n+1 \quad \Rightarrow \quad a_n < a_{n+1}.$

Además $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos el intervalo (a_n, a_{n+1}) como P_n.

Calculemos su medida:

$$\begin{aligned}
\mu(P_n) = a_{n+1} - a_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

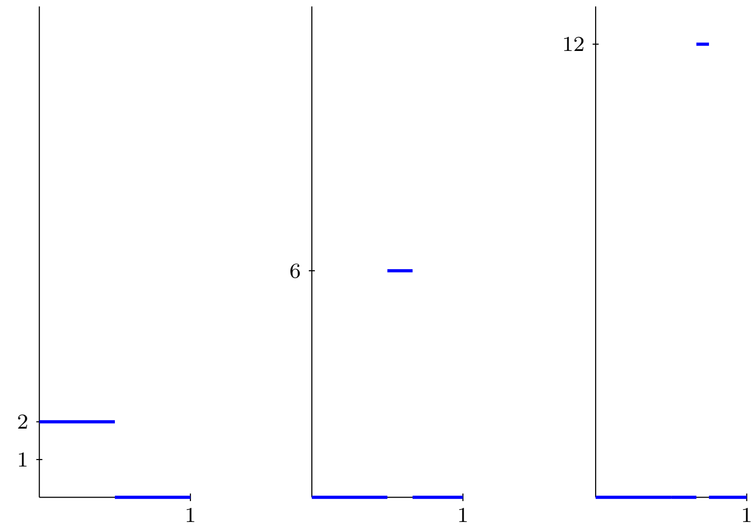
Definición 2. Sea $g_n \coloneqq [0,1] \to [0,+\infty)$, definida por:

$$g_n \coloneqq \frac{1}{\mu(P_n)} \cdot \mathbf{1}_{P_n} = n(n+1) \cdot \mathbf{1}_{P_n}.$$

Por ejemplo,

$$g_1 = 2 \cdot \mathbf{1}_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}\,, \qquad g_2 = 6 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)}\,, \qquad g_3 = 12 \cdot \mathbf{1}_{\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right)}\,.$$

Observe las gráficas de $g_1,\ g_2,\ g_3$ (con escalas diferentes de abscisas y ordenadas) :



Observación 3. Si $x \in P_k,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{k\},$ entonces $g_n(x) = 0$.

Notemos que g_n está normalizada respecto a la integración.

$$\begin{aligned}\int_X g_n d\mu = \int_0^1 g_n d\mu &= \int_0^1 n(n+1) \cdot \mathbf{1}_{P_n}\ d\mu \\ &= n(n+1) \int_0^1 \mathbf{1}_{P_n}\ d\mu = n(n+1) \cdot \mu(P_n) \\ &= n(n+1) \cdot \frac{1}{n(n+1)} = 1\,.\end{aligned}$$

Definición 4. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n(x) - g_{n+1}(x)\right) g_n(y).$$

Proposición 5 (Los valores de la función f en varias partes del dominio)**.**

$$f(x,y) = \begin{cases} g_1(x)g_1(y), & x \in P_1; \\ -g_k(x)g_{k-1}(y) + g_k(x)g_k(y), & x \in P_k,\ k \geq 2; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} g_k(x)g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y), & y \in P_k; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} g_k(x)g_k(y), & x \in P_k,\ y \in P_k; \\ -g_{k+1}(x)g_k(y), & x \in P_{k+1},\ y \in P_k; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases} \tag{3}$$

Demostración. (1): Si $x \in P_1$, entonces para cada $n \geq 2$ tenemos $g_n(x) = 0$ y $g_{n+1}(x) = 0$, por eso

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x) - g_{n+1}(x)\right] g_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x)g_n(y) - g_{n+1}(x)g_n(y)\right] \\ &= [g_1(x)g_1(y) - \cancelto{0}{g_2(x)}g_1(y)] \\ &\quad + [\cancelto{0}{g_2(x)}g_2(y) - \cancelto{0}{g_3(x)}g_2(y)] \\ &\quad + [\cancelto{0}{g_4(x)}g_4(y) - \cancelto{0}{g_5(x)}g_4(y)] \\ &\quad + \qquad \cdots \\ &\quad + [\cancelto{0}{g_{k-1}(x)}g_{k-1}(y) - \cancelto{0}{g_k(x)}g_{k-1}(y)] \\ &\quad + [\cancelto{0}{g_k(x)}g_k(y) - \cancelto{0}{g_{k+1}(x)}g_k(y)] \\ &\quad + \qquad \cdots \qquad = g_1(x)g_1(y). \end{aligned}$$

Supongamos $x \in P_k$, con $k \geq 2$, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(x)g_n(y) - g_{n+1}(x)g_n(y) \begin{cases} \text{puede ser distinto de cero}, & n = k-1 \quad \vee \quad n = k; \\ = 0, & n < k-1 \quad \vee \quad k < n. \end{cases}$$

y se tiene por la Observación 3 que $g_n(x) = 0$ para $n \neq k$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x) - g_{n+1}(x)\right] g_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x)g_n(y) - g_{n+1}(x)g_n(y)\right] \\ &= [\cancelto{0}{g_{k-1}(x)}g_{k-1}(y) - g_k(x)g_{k-1}(y)] \\ &\quad + [g_k(x)g_k(y) - \cancelto{0}{g_{k+1}(x)}g_k(y)] \quad = -g_k(x)g_{k-1}(y) + g_k(x)g_k(y). \end{aligned}$$

(2): Si $y \in P_k$, se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$g_n(x)g_n(y) - g_{n+1}(x)g_n(y) \begin{cases} \text{puede ser distinto de cero,} & n = k, \\ = 0, & n \neq k. \end{cases}$$

y por la Observación 3, $g_n(y) = 0$ para $n \neq k$, entonces

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x) - g_{n+1}(x)\right] g_n(y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n(x)g_n(y) - g_{n+1}(x)g_n(y)\right] \\ &= [g_{k-1}(x)\cancelto{0}{g_{k-1}(y)} - g_k(x)\cancelto{0}{g_{k-1}(y)}] \\ &\quad + [g_k(x)g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y)] \\ &\quad + [g_{k+1}(x)\cancelto{0}{g_{k+1}(y)} - g_{k+2}(x)\cancelto{0}{g_{k+1}(y)}] \quad = g_k(x)g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y). \end{aligned}$$

(3): Si $x \in P_k,\ y \in P_k$, usando la formula (2) de ésta Proposición se tiene

$$f(x,y) = g_k(x)g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y) = g_k(x)g_k(y) - \cancelto{0}{g_{k+1}(x)}g_k(y) = g_k(x)g_k(y).$$

Supongamos $x \in P_{k+1},\ y \in P_k$, análogamente por la formula (2) se tiene

$$f(x,y) = g_k(x)g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y) = \cancelto{0}{g_k(x)}g_k(y) - g_{k+1}(x)g_k(y) = -g_{k+1}(x)g_k(y).$$

$\square$

Así, usando la definición de g_n, se tienen los siguientes corolarios.

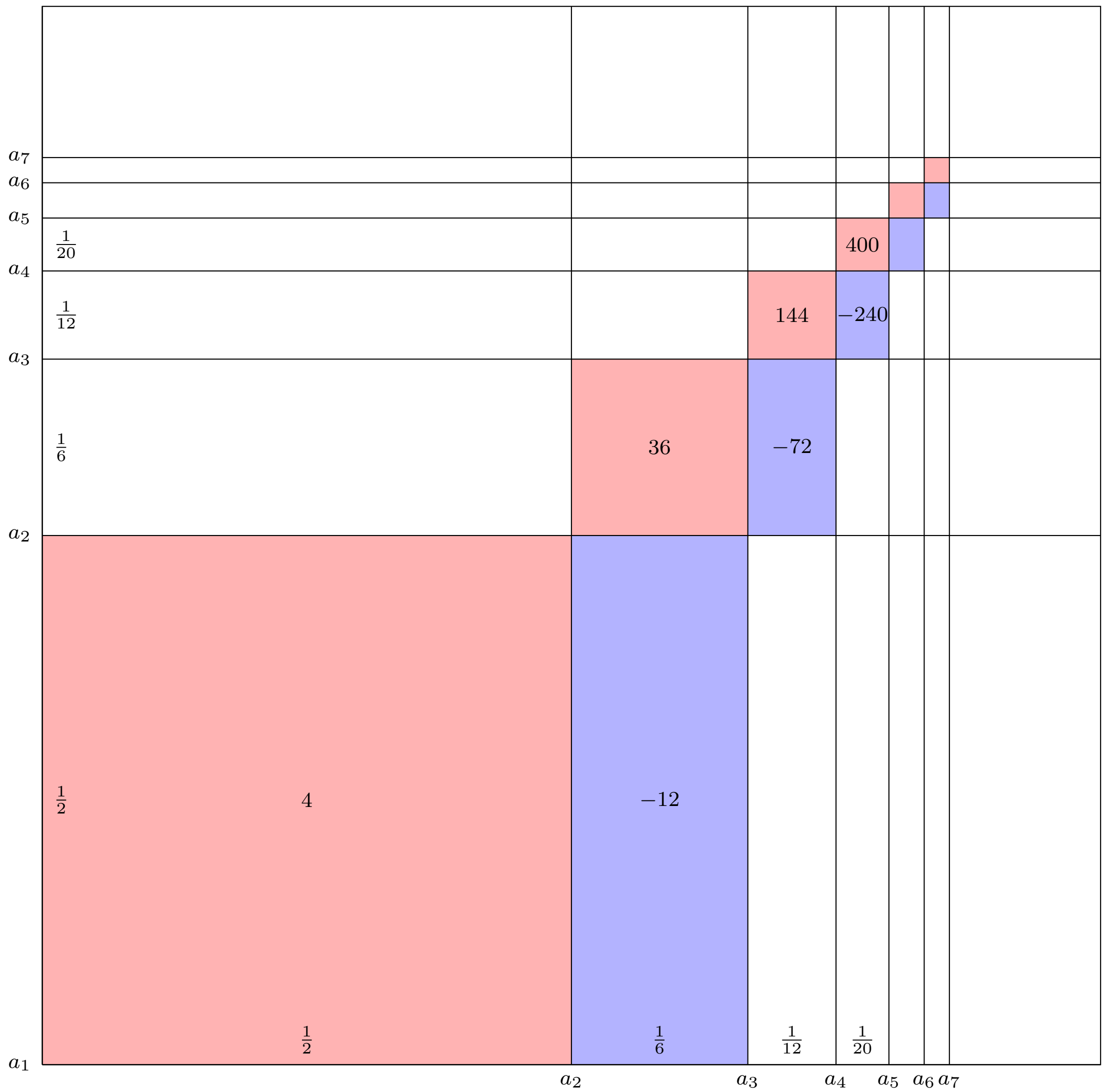
Corolario 6.

$$f(x,y) = \begin{cases} k^2(k+1)^2, & x \in P_k,\ y \in P_k; \\ -k(k+1)^2(k+2), & x \in P_{k+1},\ y \in P_k; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Corolario 7.

$$|f(x,y)| = \begin{cases} k^2(k+1)^2, & x \in P_k,\ y \in P_k; \\ k(k+1)^2(k+2), & x \in P_{k+1},\ y \in P_k; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe la gráfica de f para los primeros números naturales, se muestran en color rojo las partes del dominio donde f toma valores positivos y en color azul las partes del dominio donde f toma valores negativos:



Calculemos algunas integrales para valores de x y y específicos:

$$\begin{aligned} y = 0.3, \quad \int_0^1 f(x,y)dx &= \int_0^1 (g_1(x) - g_2(x))g_1(y)dx \\ &= \int_0^1 g_1(x)g_1(y)dx - \int_0^1 g_2(x))g_1(y)dx \\ &= (2)(2)\cdot\frac{1}{2} - (2(2+1))(2)\cdot\frac{1}{6} = 2 - \frac{12}{6} \\ &= 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 0.55, \quad \int_0^1 f(x,y)dx &= \int_0^1 (g_2(x) - g_3(x))g_2(y)dx \\ &= \int_0^1 g_2(x)g_2(y)dx - \int_0^1 g_3(x)g_2(y)dx \\ &= (6)(6)\cdot\frac{1}{6} - (3(3+1))(6)\cdot\frac{1}{12} = 6 - 6 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0.3, \quad \int_0^1 f(x,y)dy &= \int_0^1 g_1(x)g_1(y)dy \\ &= (2)(2)\cdot\frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0.55, \quad \int_0^1 f(x,y)dy &= \int_0^1 (-g_2(x)g_1(y) + g_2(x))g_2(y))dy \\ &= -\int_0^1 g_2(x)g_1(y)dy + \int_0^1 g_2(x))g_2(y)dy \\ &= -(6)(2)\cdot\frac{1}{2} + (6)(6)\cdot\frac{1}{6} \\ &= -6 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Veamos que

$$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy\,.}$$

Denotemos la integral interior respecto de x y de y como sigue:

$$u(x) \coloneqq \int_0^1 f(x,y)dy,$$

$$v(y) \coloneqq \int_0^1 f(x,y)dx.$$

Calculemos $\int_0^1 u(x)dx$.

Si $x \in P_1$, usando la fórmula (1) de la Proposición 5, se tiene

$$u(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 g_1(x)g_1(y)dy = g_1(x)\int_0^1 g_1(y)dy = g_1(x) = 2.$$

Supongamos ahora que $x \in P_k$, con $k \geq 2$, usando la fórmula (1) de la Proposición 5, se tiene

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 f(x,y)\,dy \\ &= \int_0^1 \left(-g_k(x)g_{k-1}(y) + g_k(x)g_k(y)\right) dy \\ &= -\int_0^1 g_k(x)g_{k-1}(y)dy + \int_0^1 g_k(x)g_k(y)dy \\ &= g_k(x)\int_0^1 g_k(y)dy - g_k(x)\int_0^1 g_{k-1}(y)dy \\ &= g_k(x)\cdot 1 - g_k(x)\cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$u(x) = \begin{cases} 2, & x \in P_1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{[0,1]} u(x)\,dx = \int_{P_1} u(x)\,dx + \int_{[0,1]\setminus P_1} u(x)\,dx = \int_{P_1} u(x)\,dx = \int_{P_1} 2dx$$
$$= 2 \cdot \mu(P_1) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Ahora calculemos: $\int_0^1 v(y)dy$:

Supongamos que $y \in P_j$, usando la fórmula (2) de la Proposición 5, se tiene

$$\begin{aligned}
v(y) &= \int_0^1 f(x,y)dx \\
&= \int_0^1 (g_j(x)g_j(y) - g_{j+1}(x)g_j(y))dx \\
&= \int_0^1 (g_j(x)g_j(y) - \int_0^1 g_{j+1}(x)g_j(y))dx \\
&= g_j(y)\int_0^1 g_j(x)dx - g_j(y)\int_0^1 g_{j+1}(x)dx \\
&= g_j(y)\cdot 1 - g_j(y)\cdot 1 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \int_0^1 v(y)dy = \int_0^1 0\ dx = 0.$$

$$\therefore \quad 1 = \int_0^1 u(x)dx \neq \int_0^1 v(y)dy = 0.$$

Proposición 8. *La función f no es acotada.*

Demostración. Sea $M > 0$.

Tomamos $k = \lceil M \rceil$, luego usando el Corolario 7 cuando $x \in P_k$, $y \in P_k$.

$$0 < M \leq \lceil M \rceil \leq \lceil M \rceil^2 < \lceil M \rceil^2 (\lceil M \rceil + 1)^2 = |f(x,y)|$$

También se obtiene el resultado cuando $x \in P_{k+1}$, $y \in P_k$, pues

$$0 < M \leq \lceil M \rceil \leq \lceil M \rceil^2 < \lceil M \rceil (\lceil M \rceil + 1)^2 (\lceil M \rceil + 2) = |f(x,y)|$$

$\therefore |f(x,y)| > M$.

Luego f no es acotada. $\square$

¿$f \in L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$?

Denotemos por A al conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(P_n \times P_n)$, por B al conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(P_{n+1} \times P_n)$ y por C al conjunto $(X \times Y) \setminus (A \cup B)$.

Claro que $X \times Y = A \cup B \cup C$ con A, B y C disjuntos a pares.

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} |f|\, d(\mu \times \nu) &= \int_A |f|\, d(\mu \times \nu) + \int_B |f|\, d(\mu \times \nu) + \int_C |f|\, d(\mu \times \nu) \\
&= \int_A |f|\, d(\mu \times \nu) + \int_B |f|\, d(\mu \times \nu) \\
&= \int_{P_n \times P_n} \sum_{n=1}^{\infty} |f|\, d(\mu \times \nu) + \int_{P_{n+1} \times P_n} \sum_{n=1}^{\infty} |f|\, d(\mu \times \nu) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{P_n \times P_n} |f|\, d(\mu \times \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{P_{n+1} \times P_n} |f|\, d(\mu \times \nu) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)^2 \cdot \frac{1}{n^2(n+1)^2} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^2(n+2) \cdot \frac{1}{n(n+1)^2(n+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1 \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

$\therefore f \notin L^1(X \times Y, \mathcal{F} \times \mathcal{G}, \mu \times \nu, \mathbb{C})$.

La hipótesis de que f sea integrable es esencial.

Referencias

[1] W. Rudin. Real and Complex Analysis. 3rd ed. (1987). McGrow-Hill.