Polinomios simétricos completos

Luis Angel González Serrano
En base de estudios conjuntos con:
Egor Maximenko y Mario Alberto Moctezuma Salazar

ESFM - IPN

Seminario “Matrices y operadores”
14 Octubre de 2020

Ejemplos de polinomios completos, $n = 2$

$$\mathrm{h}_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2,$$

$$\mathrm{h}_3(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,$$

$$\mathrm{h}_4(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2$$

Ejemplos de polinomios completos, $n = 2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) &= 1,\\
\mathrm{h}_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2,\\
\mathrm{h}_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2,\\
\mathrm{h}_3(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,\\
\mathrm{h}_4(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2
\end{aligned}
$$

Ejemplos de polinomios completos, $n = 2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) &= 1, \\
\mathrm{h}_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2, \\
\mathrm{h}_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2, \\
\mathrm{h}_3(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2, \\
\mathrm{h}_4(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 \\
\mathrm{h}_5(x_1, x_2) &= x_1^5 + x_2^5 + x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3.
\end{aligned}
$$

Ejemplos de polinomios completos, $n = 2$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) &= 1,\\
\mathrm{h}_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2,\\
\mathrm{h}_2(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2,\\
\mathrm{h}_3(x_1, x_2) &= x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,\\
\mathrm{h}_4(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 + x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2\\
\mathrm{h}_5(x_1, x_2) &= x_1^5 + x_2^5 + x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3.
\end{aligned}
$$

Se define $\mathrm{h}_m(x_1, x_2) = 0$ si $m < 0$.

Ejemplos de polinomios completos, $n = 3$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1, \\
\mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\
\mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 \\
&\qquad + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3,
\end{aligned}
$$

Ejemplos de polinomios completos, $n = 3$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) &= 1, \\
\mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\
\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\
\mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 \\
&\qquad + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3, \\
\mathrm{h}_4(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_2^3 x_3 + x_1 x_3^3 \\
&\qquad + x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 \\
&\qquad + x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2.
\end{aligned}
$$

Definición combinatoria

El polinomio simétrico completo de orden m en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es la suma de todos los monomios de grado total m:

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Definición combinatoria

El polinomio simétrico completo de orden m en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es la suma de todos los monomios de grado total m:

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Otra forma equivalente de la definición:

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$

Definición combinatoria

El polinomio simétrico completo de orden m en n variables $x_1, \ldots, x_n$ es la suma de todos los monomios de grado total m:

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m \\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Otra forma equivalente de la definición:

$$\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}.$$

Ejemplo de las definiciones equivalentes:

$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^0 + x_1^0 x_2^2 + x_1 x_2,$$
$$\mathrm{h}_2(x_1, x_2) = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_2.$$

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,

Ejercicio:

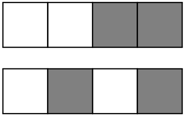
¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,

 $\longrightarrow$ x_1^2

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?

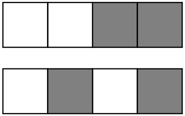
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



$\longrightarrow \quad x_1^2$

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \dots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,

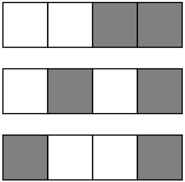


$\longrightarrow \quad x_1^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2$

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,

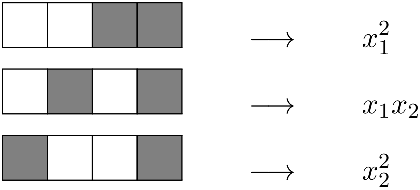


$\longrightarrow \quad x_1^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2$

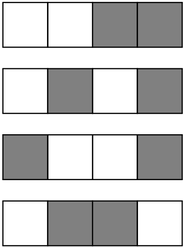
Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \dots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



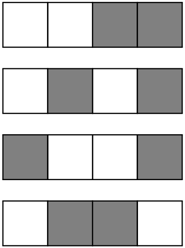
$\longrightarrow \quad x_1^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2$

$\longrightarrow \quad x_2^2$

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



$$\longrightarrow \quad x_1^2$$

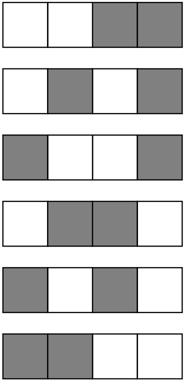
$$\longrightarrow \quad x_1 x_2$$

$$\longrightarrow \quad x_2^2$$

$$\longrightarrow \quad x_1 x_3$$

Ejercicio:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



$\longrightarrow \quad x_1^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2$

$\longrightarrow \quad x_2^2$

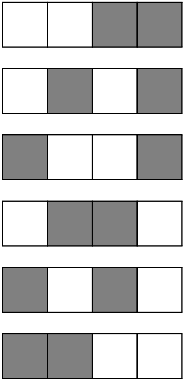
$\longrightarrow \quad x_1 x_3$

$\longrightarrow \quad x_2 x_3$

$\longrightarrow \quad x_3^2$

EJERCICIO:

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?
Por ejemplo: Calculemos el número de sumando de $\mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3)$,



$\longrightarrow \quad x_1^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2$

$\longrightarrow \quad x_2^2$

$\longrightarrow \quad x_1 x_3$

$\longrightarrow \quad x_2 x_3$

$\longrightarrow \quad x_3^2$

Respuesta: $\binom{4}{2}$

Otro ejemplo:

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$

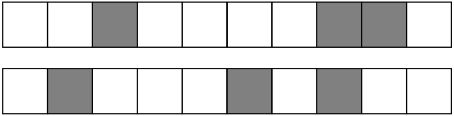
 $\longrightarrow$ $x_1^2 x_2^4 x_4$

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$\longrightarrow \quad x_1^2 x_2^4 x_4$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2^3 x_3 x_4^2$

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$

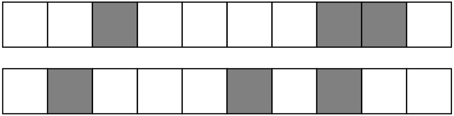


$$\longrightarrow \quad x_1^2 x_2^4 x_4$$

$$\longrightarrow \quad x_1 x_2^3 x_3 x_4^2$$

¿Cuantos sumandos hay?

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$



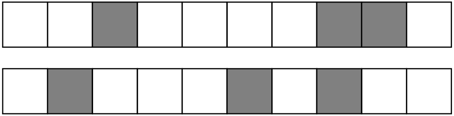
$\longrightarrow \quad x_1^2 x_2^4 x_4$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2^3 x_3 x_4^2$

¿Cuantos sumandos hay?

Respuesta: $\dbinom{10}{3}$.

Otro ejemplo: Veamos solo dos sumandos de $\mathrm{h}_7(x_1, x_2, x_3, x_4)$



$\longrightarrow \quad x_1^2 x_2^4 x_4$

$\longrightarrow \quad x_1 x_2^3 x_3 x_4^2$

¿Cuantos sumandos hay?

Respuesta: $\binom{10}{3}$.

¿Cuantos sumandos hay en $\mathrm{h}_m(x_1, \ldots, x_n)$?

Hacia una fórmula recursiva

Hacia una fórmula recursiva

Recordemos el polinomio completo de grado tres para tres variables:

$$\mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_1 x_2 x_3$$

Hacia una fórmula recursiva

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3 \\
&\quad + x_3^2x_1+x_3^2x_2+x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^3+x_2^3+x_1^2x_2+x_2^2x_1\right) \\
&\quad + x_3\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)
\end{aligned}$$

Hacia una fórmula recursiva

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 \\
&\quad + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_3 \\
&= \left(x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1\right) \\
&\quad + x_3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\right) \\
&= \mathrm{h}_3(x_1,x_2) + x_3\,\mathrm{h}_2(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

Nota:

Denotemos a la lista $x_1, \ldots, x_n$ por x.

Nota:
Denotemos a la lista $x_1, \ldots, x_n$ por x.

Proposición (Fórmula recursiva de los polinomios completos)

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

Nota:
Denotemos a la lista $x_1, \ldots, x_n$ por x.

Proposición (Fórmula recursiva de los polinomios completos)

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

Demostración:

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n+1}=m+1\\ k_1,\ldots,k_{n+1}\geq 0}} x_1^{k_1}\cdots x_{n+1}^{k_{n+1}}$$

Nota:
Denotemos a la lista $x_1, \ldots, x_n$ por x.

Proposición (Fórmula recursiva de los polinomios completos)

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) &= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n+1}=m+1 \\ k_1,\ldots,k_{n+1}\geq 0}} x_1^{k_1}\cdots x_{n+1}^{k_{n+1}} \\
&= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1 \\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \\
&+ \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n+1}=m+1 \\ k_{n+1}>0}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{n+1}^{k_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1 \\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$

$$+ x_{n+1} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n+k_{n+1}-1=m \\ k_{n+1}-1\geq 0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n+1}^{k_{n+1}-1}$$

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1 \\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$$
$$+ x_{n+1} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n+k_{n+1}-1=m \\ k_{n+1}-1\geq 0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n+1}^{k_{n+1}-1}$$

Denotemos $j_1 = k_1, \ldots, j_n = k_n, j_{n+1} = k_{n+1} - 1$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) &= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1\\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
&\qquad + x_{n+1} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n+k_{n+1}-1=m\\ k_{n+1}-1\geq 0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n+1}^{k_{n+1}-1} \\
&= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1\\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
&\qquad + x_{n+1} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{n+1}=m\\ j_{n+1}\geq 0}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_{n+1}^{j_{n+1}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) &= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1\\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
&\qquad + x_{n+1} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n+k_{n+1}-1=m\\ k_{n+1}-1\geq 0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{n+1}^{k_{n+1}-1} \\
&= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+1\\ k_{n+1}=0}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \\
&\qquad + x_{n+1} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{n+1}=m\\ j_{n+1}\geq 0}} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_{n+1}^{j_{n+1}} \\
&= \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Diagrama para la fórmula recursiva

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

$$\begin{array}{cccc}
\mathrm{h}_0(x_1) & \mathrm{h}_1(x_1) & \mathrm{h}_2(x_1) & \mathrm{h}_3(x_1) \\[1em]
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) & \mathrm{h}_1(x_1, x_2) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2) & \mathrm{h}_3(x_1, x_2) \\[1em]
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{array}$$

Diagrama para la fórmula recursiva

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{h}_0(x_1) & \mathrm{h}_1(x_1) \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1) & \mathrm{h}_3(x_1) \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) \arrow[r] & \mathrm{h}_1(x_1, x_2) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2) & \mathrm{h}_3(x_1, x_2) \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}$$

Diagrama para la fórmula recursiva

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\, \mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{h}_0(x_1) & \mathrm{h}_1(x_1) \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1) & \mathrm{h}_3(x_1) \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) \arrow[r] & \mathrm{h}_1(x_1, x_2) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2) & \mathrm{h}_3(x_1, x_2) \arrow[d] \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) & \mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}$$

Diagrama para la fórmula recursiva

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) = \mathrm{h}_{m+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_m(x, x_{n+1}).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{h}_0(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_1(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_3(x_1) \arrow[d] \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_1(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1, x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_3(x_1, x_2) \arrow[d] \\
\mathrm{h}_0(x_1, x_2, x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_1(x_1, x_2, x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_2(x_1, x_2, x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_3(x_1, x_2, x_3)
\end{tikzcd}$$

Algoritmo en SageMath

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{h}_0(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_1(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_3(x_1) \arrow[d] \\
\mathrm{h}_0(x_1,x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_1(x_1,x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_2(x_1,x_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{h}_3(x_1,x_2) \arrow[d] \\
\mathrm{h}_0(x_1,x_2,x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_1(x_1,x_2,x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_2(x_1,x_2,x_3) \arrow[r] & \mathrm{h}_3(x_1,x_2,x_3)
\end{tikzcd}$$

```
def hom_recur(x,m):
    n = len(x)
    A = matrix(parent(x[0]), n, m+1)
    A[0][0] = x[0] ** 0
    for k in range(m):
        A[0][k+1] = x[0] * A[0][k]
    for j in range(n):
        for k in range(m):
            A[j+1][k+1] = A[j][k+1] + x[j] * A[j+1][k]
    return [A[n][k] for k in range(m+1)]
```

Ejercicio

Proposición

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) - \mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+2}) = (x_{n+1} - x_{n+2})\, \mathrm{h}_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}).$$

Ejercicio

Proposición

$$\mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+1}) - \mathrm{h}_{m+1}(x, x_{n+2}) = (x_{n+1} - x_{n+2})\, \mathrm{h}_m(x, x_{n+1}, x_{n+2}).$$

Indicación al ejercicio: Usar la fórmula recursiva.

Función generadora

Dada una sucesión $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ se define su función generadora como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$$

Función generadora

Dada una sucesión $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ se define su función generadora como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k$$

Función generadora de la sucesión $(\mathrm{h}_m)_{m=0}^{\infty}$

$$\mathrm{H}(x_1,\ldots,x_n)(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{h}_m(x_1,\ldots,x_n)t^m.$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_{j+1}(x, x_{n+1})t^{j+1}$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_{j+1}(x, x_{n+1})t^{j+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathrm{h}_{j+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1}\end{aligned}$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_{j+1}(x, x_{n+1})t^{j+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathrm{h}_{j+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1} \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{h}_j(x)t^j\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1}\end{aligned}$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1}) t^j = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_{j+1}(x, x_{n+1}) t^{j+1} \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathrm{h}_{j+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1} \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{h}_j(x) t^j\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x) t^j + x_{n+1} t \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1}) t^j
\end{aligned}$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = (1 - x_{n+1}t)\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_{j+1}(x, x_{n+1})t^{j+1} \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\mathrm{h}_{j+1}(x) + x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1} \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{h}_j(x)t^j\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(x_{n+1}\,\mathrm{h}_j(x, x_{n+1})\right) t^{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x)t^j + x_{n+1}t \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x, x_{n+1})t^j \\
&= \mathrm{H}(x)(t) + x_{n+1}t\,\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t).
\end{aligned}$$

Otra forma equivalente:

$$\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) = \frac{\mathrm{H}(x)(t)}{(1 - x_{n+1}t)}$$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Demostración: Por Inducción sobre n

$$\mathrm{H}(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x_1) t^j$$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Demostración: Por Inducción sobre n

$$\mathrm{H}(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x_1) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 t)^j$$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Demostración: Por Inducción sobre n

$$\mathrm{H}(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x_1) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 t)^j = \frac{1}{1 - x_1 t}.$$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Demostración: Por Inducción sobre n

$$\mathrm{H}(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x_1) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 t)^j = \frac{1}{1 - x_1 t}.$$

Suponiendo para n, demostremos para $n+1$

Proposición

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Demostración: Por Inducción sobre n

$$\mathrm{H}(x_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{h}_j(x_1) t^j = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 t)^j = \frac{1}{1 - x_1 t}.$$

Suponiendo para n, demostremos para $n+1$

$$\mathrm{H}(x, x_{n+1})(t) \overset{\text{Lem}}{=\!=} \frac{\mathrm{H}(x)(t)}{1 - x_{n+1}t} \overset{\text{H.I.}}{=\!=} (1 - x_{n+1}t)^{-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Recordemos que

$$\mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t}$$

Lema

$$\mathrm{H}(x)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1 - x_i t},$$

donde

$$C_i = \frac{x_i^{n-1}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Demostración: Supongamos que existe C_i que cumple la igualdad, entonces para $n = 2$

$$\frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)} = \frac{C_1}{1 - x_1 t} + \frac{C_2}{1 - x_2 t},$$

Demostración: Supongamos que existe C_i que cumple la igualdad, entonces para $n = 2$

$$\frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)} = \frac{C_1}{1 - x_1 t} + \frac{C_2}{1 - x_2 t},$$

multiplicando por $1 - x_1 t$ en ambos lados, resulta

$$\frac{1}{1 - x_2 t} = C_1 + \frac{C_2(1 - x_1 t)}{1 - x_2 t}.$$

Demostración: Supongamos que existe C_i que cumple la igualdad, entonces para $n = 2$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)} = \frac{C_1}{1-x_1t} + \frac{C_2}{1-x_2t},$$

multiplicando por $1 - x_1t$ en ambos lados, resulta

$$\frac{1}{1-x_2t} = C_1 + \frac{C_2(1-x_1t)}{1-x_2t}.$$

Entonces tomando $t = x_1^{-1}$

$$C_1 = \frac{x_1}{x_1 - x_2}.$$

Demostración: Supongamos que existe C_i que cumple la igualdad, entonces para $n = 2$

$$\frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)} = \frac{C_1}{1 - x_1 t} + \frac{C_2}{1 - x_2 t},$$

multiplicando por $1 - x_1 t$ en ambos lados, resulta

$$\frac{1}{1 - x_2 t} = C_1 + \frac{C_2(1 - x_1 t)}{1 - x_2 t}.$$

Entonces tomando $t = x_1^{-1}$

$$C_1 = \frac{x_1}{x_1 - x_2}.$$

De manera análoga se obtiene que

$$C_2 = \frac{x_2}{x_2 - x_1}.$$

Para $n = 3$

$$\frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)(1 - x_3 t)}$$

Para $n = 3$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)} =$$

$$\frac{C_1(1-x_2t)(1-x_3t) + C_2(1-x_1t)(1-x_3t) + C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Para $n = 3$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)} =$$

$$\frac{C_1(1-x_2t)(1-x_3t)+C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Multiplicando en ambos lados por, por ejemplo, $1 - x_1t$

$$\frac{1}{(1-x_2t)(1-x_3t)} =$$

$$C_1 + \frac{C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Para $n = 3$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)} = \frac{C_1(1-x_2t)(1-x_3t)+C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Multiplicando en ambos lados por, por ejemplo, $1 - x_1t$

$$\frac{1}{(1-x_2t)(1-x_3t)} = C_1 + \frac{C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Tomando, $t = x_1^{-1}$

Para $n=3$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}=$$

$$\frac{C_1(1-x_2t)(1-x_3t)+C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Multiplicando en ambos lados por, por ejemplo, $1-x_1t$

$$\frac{1}{(1-x_2t)(1-x_3t)}=$$

$$C_1+\frac{C_2(1-x_1t)(1-x_3t)+C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Tomando, $t=x_1^{-1}$

$$C_1=\frac{1}{\left(1-x_2x_1^{-1}\right)\left(1-x_3x_1^{-1}\right)}=\frac{x_1^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.$$

Para $n = 3$

$$\frac{1}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)} =$$

$$\frac{C_1(1-x_2t)(1-x_3t) + C_2(1-x_1t)(1-x_3t) + C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_1t)(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Multiplicando en ambos lados por, por ejemplo, $1 - x_1t$

$$\frac{1}{(1-x_2t)(1-x_3t)} =$$

$$C_1 + \frac{C_2(1-x_1t)(1-x_3t) + C_3(1-x_1t)(1-x_2t)}{(1-x_2t)(1-x_3t)}$$

Tomando, $t = x_1^{-1}$

$$C_1 = \frac{1}{\left(1 - x_2x_1^{-1}\right)\left(1 - x_3x_1^{-1}\right)} = \frac{x_1^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.$$

De manera análoga, se obtiene la igualdad para C_2 y C_3

Entonces para n, se obtiene que

$$\frac{\displaystyle\sum_{1\leq i\leq n}\prod_{j\neq i} C_i(1-x_jt)}{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n}(1-x_jt)} = \prod_{1\leq j\leq n}\frac{1}{(1-x_jt)}.$$

Entonces para n, se obtiene que

$$\frac{\displaystyle\sum_{1\leq i\leq n}\prod_{j\neq i} C_i(1-x_jt)}{\displaystyle\prod_{1\leq j\leq n}(1-x_jt)} = \prod_{1\leq j\leq n}\frac{1}{(1-x_jt)}.$$

Multiplicando por $1-x_it$

$$C_i + \frac{\displaystyle\sum_{r\neq i}\prod_{j\neq r} C_r(1-x_jt)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(1-x_jt)} = \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{1}{(1-x_jt)}.$$

Entonces para n, se obtiene que

$$\frac{\sum_{1\leq i\leq n}\prod_{j\neq i} C_i(1-x_jt)}{\prod_{1\leq j\leq n}(1-x_jt)} = \prod_{1\leq j\leq n}\frac{1}{(1-x_jt)}.$$

Multiplicando por $1-x_it$

$$C_i + \frac{\sum_{r\neq i}\prod_{j\neq r} C_r(1-x_jt)}{\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}(1-x_jt)} = \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{1}{(1-x_jt)}.$$

Haciendo $t = x_i^{-1}$

$$C_i = \prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}\frac{x_i^{n-1}}{x_i-x_j}.$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x)t^m = \mathrm{H}(x)(t)$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x)t^m = \mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t}$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x)t^m = \mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1 - x_i t}$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) t^m = \mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1 - x_i t}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{(1 - x_i t) \prod_{k\neq i}(x_i - x_k)}$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x)t^m = \mathrm{H}(x)(t) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1 - x_i t} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{(1 - x_i t)\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+m-1}}{\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)} t^m.
\end{aligned}$$

Polinomios completos como combinación lineal de progresiones geométricas

$$\mathrm{h}_m(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{n+m-1}}{\prod_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} h_m(x)t^m = \mathrm{H}(x)(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{1-x_i t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n-1}}{(1-x_i t)\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+m-1}}{\prod_{k\neq i}(x_i - x_k)} t^m.\end{aligned}$$

Por último igualamos los coeficientes.

¿Que pasa si $x_j = x_k$ para algún $j \neq k$ en la forma anterior?

¿Que pasa si $x_j = x_k$ para algún $j \neq k$ en la forma anterior?
Veamos un ejemplo: Por un lado

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_1) = \sum_{j=0}^{m} x_1^{m-j} x_1^{j} = (m+1) x_1^m.$$

¿Que pasa si $x_j = x_k$ para algún $j \neq k$ en la forma anterior?
Veamos un ejemplo: Por un lado

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_1) = \sum_{j=0}^{m} x_1^{m-j} x_1^{j} = (m+1) x_1^m.$$

Por otro lado, recordando que para dos variables se tiene que

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_2) = \frac{x_1^{m+1} - x_2^{m+1}}{x_1 - x_2}.$$

¿Que pasa si $x_j = x_k$ para algún $j \neq k$ en la forma anterior?
Veamos un ejemplo: Por un lado

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_1) = \sum_{j=0}^{m} x_1^{m-j} x_1^j = (m+1)x_1^m.$$

Por otro lado, recordando que para dos variables se tiene que

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_2) = \frac{x_1^{m+1} - x_2^{m+1}}{x_1 - x_2}.$$

Entonces, cuando las dos variables coinciden, por la regla de L'Hôpital

$$\mathrm{h}_m(x_1, x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{x_2^{m+1} - x_1^{m+1}}{x_2 - x_1} = (m+1)x_1^m.$$