Ecuaciones de Yule-Walker

Angelica Garcia Leon

2 de marzo de 2015

Definición de proceso autorregresivo de orden p

El proceso autorregresivo de orden p se define por:

$$X_n = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k X_{n-k} + W_n & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

Donde la sucesión $(W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) es un proceso de ruido blanco con las siguientes propiedades:

- Para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{E}[W_n] = 0$.
- Para toda $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{Var}[W_n] = \sigma$.
- Para toda $n \neq k$, $\mathrm{Cov}[W_n, W_k] = 0$.

Propiedades de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Lema 1. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $k \leq n$, $\mathbb{E}[X_k] = 0$.*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre n. Para $n = 0$, tenemos:

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[W_0] = 0.$$

Supongamos que es cierto para n, esto es, para cada $k \leq n$ se tiene que $\mathbb{E}[X_k] = 0$. Por demostrar que es cierto para X_{n+1}.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}] &= \mathbb{E}\left[-\sum_{k=1}^{p} a_k X_{n-k} + W_n\right] = -\sum_{k=1}^{p} a_k \mathbb{E}[X_{n-k}] + \mathbb{E}[W_n] \\ &= -\sum_{k=1}^{p} a_k \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $m < n$, $\mathbb{E}[X_m W_n] = 0$.*

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre n. Para $n = 1$ se tiene:

$$\mathbb{E}[X_0 W_1] = \mathbb{E}[W_0 W_1] = 0.$$

Supongamos que es cierto que dado $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_m W_n] = 0$ para cada $m < n$. Por demostrar que para cada $m < n+1$, $\mathbb{E}[X_m W_{n+1}] = 0$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_m W_{n+1}] &= \mathbb{E}\left[\left(-\sum_{k=1}^{p} a_k X_{m-k} + W_{m+1}\right) W_{n+1}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{p} a_k \mathbb{E}\left[X_{m-k} W_{n+1}\right] + \mathbb{E}[W_{m+1} W_{n+1}],
\end{aligned}$$

es claro que $m - k < n + 1$, por lo tanto, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\mathbb{E}[X_{m-k} W_{n+1}] = 0$, además $m < n$ por lo que $\mathbb{E}[W_{m+1} W_{n+1}] = 0$ y así se obtiene lo que queríamos demostrar,

$$\mathbb{E}[X_m W_{n+1}] = 0 \quad \text{para cada} \quad m < n + 1.$$

$\square$

Lema 3. *Para cada* $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{E}[X_n W_n] = \sigma$.

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre n. Para $n = 0$ se tiene:

$$\mathbb{E}[X_0 W_0] = \mathbb{E}[W_0 W_0] = \mathrm{Var}[W_0] = \sigma.$$

Supongamos que es válido para n, es decir, supongamos que $\mathbb{E}[X_n W_n] = \sigma$. Para $n + 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1} W_{n+1}] &= \mathbb{E}\left[\left(-\sum_{k=1}^{p} a_k X_{n-k} + W_{n+1}\right) W_{n+1}\right] \\
&= -\sum_{k=1}^{p} a_k \mathbb{E}[X_{n-k} W_{n+1}] + \mathbb{E}[W_{n+1} W_{n+1}].
\end{aligned}$$

Por el lema anterior sabemos que $\mathbb{E}[X_k W_n] = 0$ para cada $k < n$, por lo tanto, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\mathbb{E}[X_{n-k} W_{n+1}] = 0$, de aquí se sigue que:

$$\mathbb{E}[X_{n+1} W_{n+1}] = 0 + \mathbb{E}[W_{n+1} W_{n+1}] = \mathrm{Var}[W_{n+1}] = \sigma.$$

$\square$

Ecuaciones de Yule-Walker para el proceso AR(3)

El proceso autorregresivo de orden 3, está dado por:

$$X_n = \begin{cases} -a_1 X_{n-1} - a_2 X_{n-2} - a_3 X_{n-3} + W_n & n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

La covarianza de orden j, es:

$$\gamma_j = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n])(X_{n-j} - \mathbb{E}[X_{n-j}])].$$

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, tenemos que, $\gamma_j = \mathbb{E}[X_n X_{n-j}]$. Aplicando la definición del proceso autorregresivo de orden 3 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \mathbb{E}[(-a_1 X_{n-1} - a_2 X_{n-2} - a_3 X_{n-3} + W_n) X_{n-j}] \\
&= -a_1 \mathbb{E}[X_{n-1} X_{n-j}] - a_2 \mathbb{E}[X_{n-2} X_{n-j}] - a_3 \mathbb{E}[X_{n-3} X_{n-j}] + \mathbb{E}[W_n X_{n-j}] \\
&= -a_1 \mathbb{E}[X_{n-1} X_{(n-1)-(j-1)}] - a_2 \mathbb{E}[X_{n-2} X_{(n-2)-(j-2)}] - a_3 \mathbb{E}[X_{n-3} X_{(n-3)-(j-3)}] + 0 \\
&= -a_1 \gamma_{j-1} - a_2 \gamma_{j-2} - a_3 \gamma_{j-3},
\end{aligned}$$

donde $j = 1, 2, 3$ por ser una proceso autorregresivo de orden 3. Puesto que la covarianza es simétrica, tendremos que $\gamma_k = \gamma_{-k}$.
Ahora calculemos la covarianza de orden cero γ_0 (equivalentemente la varianza).

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \mathbb{E}[(-a_1 X_{n-1} - a_2 X_{n-2} - a_3 X_{n-3} + W_n) X_n] \\
&= -a_1 \mathbb{E}[X_{n-1} X_n] - a_2 \mathbb{E}[X_{n-2} X_n] - a_3 \mathbb{E}[X_{n-3} X_n] + \mathbb{E}[W_n X_n] \\
&= -a_1 \gamma_{-1} - a_2 \gamma_{-2} - a_3 \gamma_{-3} + \sigma \\
&= -a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 - a_3 \gamma_3 + \sigma
\end{aligned}$$

Las ecuaciones

$$\gamma_j = -a_1 \gamma_{j-1} - a_2 \gamma_{j-2} - a_3 \gamma_{j-3}$$

para $j = 1, 2, 3$, o equivalentemente

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -a_1 \gamma_0 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2, \\
\gamma_2 &= -a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_0 - a_3 \gamma_1, \\
\gamma_3 &= -a_1 \gamma_2 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_0.
\end{aligned} \tag{1}$$

junto con la ecuación

$$\gamma_0 = -a_1 \gamma_1 - a_2 \gamma_2 - a_3 \gamma_3 + \sigma$$

son las ecuaciones de Yule-Walker para el proceso autorregresivo de orden 3. En forma matricial el sistema (1), se puede escribir como sigue:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar los parámetros del proceso basta resolver el sistema de ecuaciones anterior.

En general, las ecuaciones de Yule-Walker para un proceso autorregresivo de orden p están dadas por:

$$\gamma_j = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{j-k} \tag{2}$$

para $j = 1, 2, \ldots, p$ y para $j = 0$

$$\gamma_0 = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_k + \sigma.$$

En forma matricial (2) el sistema se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_p \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \ddots & \vdots \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \ddots & \gamma_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma_1 \\ \gamma_p & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \\ \vdots \\ -a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix}.$$