La fórmula de complementos para la función Gamma

Luis Alberto De la O Moya
con sugerencias de estilo de Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de julio de 2020

Objetivo: demostrar la fórmula de complementos para la función Gamma:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} \qquad (0 < x < 1).$$

Objetivo: demostrar la fórmula de complementos para la función Gamma:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} \qquad (0 < x < 1).$$

Prerrequisitos:

- Integrales impropias de funciones positivas,
- Cambios de variable en integrales,
- Regla de Leibniz para derivar integrales de Lebesgue respecto al parametro,
- Solución de ecuaciones diferenciales lineales homogeneas de primer orden.

Repaso: la función Gamma

Definición (función Gamma)

Dado $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Repaso: propiedades de la función Gamma

Proposición (la ecuación funcional para Γ, o bien la relación de recurrencia)

Para cada $x > 0$,
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Proposición (relación de Γ con el factorial)

Dado $n \in \mathbb{N}$
$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

En particular, $\Gamma(1) = 1$.

Repaso: la función Beta

Definición (función Beta)

Para $x, y > 0$,

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, \mathrm{d}t.$$

Repaso: propiedades de la función Beta

Proposición (Beta en términos de Gamma)

Sean $x, y > 0$, entonces

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Proposición (Beta como cierta integral sobre $\mathbb{R}^+$)

Sean $x, y > 0$, entonces

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t.$$

Proposición

Sean $x, y \in (0,1)$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Sabemos que

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,\mathrm{d}t,$$

Usamos la fórmula de B en términos de Γ, con $y = 1-x$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

¿Cómo probaremos la fórmula de complementos?

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t} \longrightarrow \boxed{f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\,\mathrm{d}t}$$

¿Cómo probaremos la fórmula de complementos?

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\downarrow$$

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda)$$

¿Cómo probaremos la fórmula de complementos?

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \longrightarrow f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\longrightarrow f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda) \longrightarrow f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda}$$

¿Cómo probaremos la fórmula de complementos?

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda)$$

$$f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

¿Cómo probaremos la fórmula de complementos?

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda)$$

$$f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Definición de $f_x(\lambda)$

Sea $x \in (0,1)$ fijo, y $\lambda \in (-\pi,\ \pi)$ definimos la siguiente función:

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t + 1}\,\mathrm{d}t$$

Lema 1 (La derivada de f_x)

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda)$$

Demostración.

$$f_x'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^\infty t^{x-1}(e^{i\lambda}t+1)^{-1}dt\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\lambda}(t^{x-1}(e^{i\lambda}t+1)^{-1}dt)$$

No vamos a justificar en esta presentación el uso de la regla de Leibniz.

$$f_x'(\lambda) = -ie^{i\lambda}\int_0^\infty t^x(e^{i\lambda}t+1)^{-2}dt = -ie^{i\lambda}\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^x(e^{i\lambda}t+1)^{-2}dt$$

Vamos a integrar por partes esta última integral, para ello hacemos:

$$u = t^x \quad \to \quad \frac{du}{dt} = xt^{x-1},$$

$$\frac{dv}{dt} = (e^{i\lambda}t+1)^{-2} \quad \to \quad v = -\frac{1}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}t+1)}.$$

$$f_x'(\lambda) = -ie^{i\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{t^x}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}t+1)}\bigg|_0^b + \int_0^b \frac{xt^{x-1}}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}t+1)}dt\right)$$

$$
\begin{aligned}
f_x'(\lambda) &= -ie^{i\lambda} \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{t^x}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}t+1)}\Bigg|_0^b + \int_0^b \frac{xt^{x-1}}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}t+1)}dt \right) \\
&= -ie^{i\lambda} \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{b^x}{e^{i\lambda}(e^{i\lambda}b+1)} + \frac{x}{e^{i\lambda}} \int_0^b \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}dt \right) \\
&= -ie^{i\lambda} \lim_{b\to\infty} \frac{x}{e^{i\lambda}} \int_0^b \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}dt = -ix \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}dt.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$f_x'(\lambda) = -ix \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1} dt,$$

y recordando que

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\, \mathrm{d}t,$$

entonces

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda).$$

Hemos demostrado el Lema.

Repaso: ecuación diferencial de la forma $\phi'(x) = a\phi(x)$

Si

$$\phi'(\lambda) = a\phi(\lambda),$$

entonces existe C constante tal que

$$\phi(\lambda) = Ce^{a\lambda}.$$

Por el lema anterior sabemos que

$$f_x'(\lambda) = -ixf_x(\lambda).$$

Tenemos una ecuación de la forma $\phi'(\lambda) = a\phi(\lambda)$, con $a = -ix$, por lo tanto,

$$f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda},$$

donde $g(x)$ depende solo de x.

Lema 2 (El valor de $g(x)$ como cierta integral real positiva)

Sea $\lambda \in (0,\ \pi)$, entonces

$$g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) = \int_{\cot(\lambda)}^{\infty} \frac{(\mathrm{sen}(\lambda)u - \cos(\lambda))^x}{u^2+1}\,du$$

Demostración.

$$g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) = g(x)\frac{(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x})}{2i} = \frac{f_x(-\lambda) - f_x(\lambda)}{2i}$$

recordando que

$$f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda}.$$

entonces

$$
\begin{aligned}
g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) &= \frac{f_x(-\lambda) - f_x(\lambda)}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty \left(\frac{t^{x-1}}{e^{-i\lambda}t+1} - \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t+1}\right)dt\right) \\
&= \frac{(e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x})}{2i}\int_0^\infty \frac{t^x}{(e^{i\lambda}t+1)(e^{-i\lambda}t+1)}dt \\
&= \mathrm{sen}(\lambda)\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2 + t(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) + 1}dt \\
&= \mathrm{sen}(\lambda)\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2 + 2t\cos(\lambda) + 1}dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) &= \mathrm{sen}(\lambda)\int_0^\infty \frac{t^x}{t^2+2t\cos(\lambda)+1}\,dt\\
&= \mathrm{sen}(\lambda)\int_0^\infty \frac{t^x}{(t+\cos(\lambda))^2+\mathrm{sen}^2(\lambda)}\,dt\\
&= \mathrm{sen}(\lambda)\int_0^\infty \frac{t^x}{\mathrm{sen}^2(\lambda)((\frac{t}{\mathrm{sen}(\lambda)}+\cot(\lambda))^2+1)}\,dt\\
&= \frac{1}{\mathrm{sen}(\lambda)}\int_0^\infty \frac{t^x}{(\frac{t}{\mathrm{sen}(\lambda)}+\cot(\lambda))^2+1}\,dt.
\end{aligned}
$$

$$g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\lambda)} \int_0^{\infty} \frac{t^x}{(\frac{t}{\mathrm{sen}(\lambda)} + \cot(\lambda))^2 + 1} dt.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$u = \frac{t}{\mathrm{sen}(\lambda)} + \cot(\lambda) \quad \to \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{sen}(\lambda)}, \quad t = \mathrm{sen}(\lambda)u - \cos(\lambda).$$

Sustituyendo

$$g(x)\,\mathrm{sen}(\lambda x) = \int_{\cot(\lambda)}^{\infty} \frac{(\mathrm{sen}(\lambda)u - \cos(\lambda))^x}{u^2 + 1} du.$$

Hemos demostrado el lema 2.

Lema 3

$$g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}$$

Demostración. Por el Lema 2,

$$g(x)\operatorname{sen}(\lambda x) = \int_{\cot(\lambda)}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen}(\lambda)u - \cos(\lambda))^x}{u^2+1}\,du.$$

Luego, pasando al limite cuando $\lambda \to \pi$,

$$g(x)\operatorname{sen}(\pi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen}(\pi)u - \cos(\pi))^x}{u^2+1}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \pi.$$

Teorema (La fórmula de complementos de la función Γ)

Para todo $x \in (0,1)$
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Demostración. Por el desarrollo de la derivada de f_x obtuvimos que

$$f_x(\lambda) = g(x)e^{-ix\lambda},$$

además por el lema 3
$$g(x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)},$$

sutituyendo
$$f_x(\lambda) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}e^{-ix\lambda}.$$

Recordando la definición de f_x,

$$f_x(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t + 1}\,\mathrm{d}t.$$

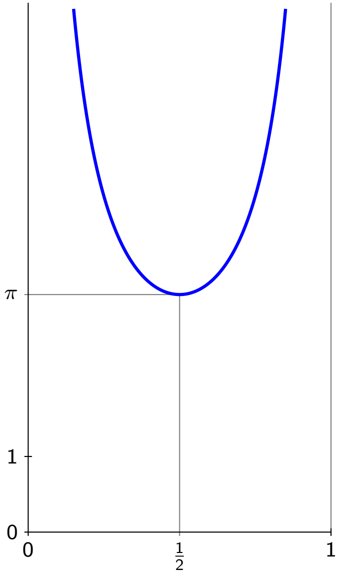
Entonces

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^{i\lambda}t + 1}\,\mathrm{d}t = f_x(\lambda) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)} e^{-ix\lambda},$$

para $\lambda = 0$

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{t + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Esta última integral es igual a $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$.



La gráfica de la función

$$g(x) := \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)},$$

esto es,

$$g(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x).$$

Ejemplos

Ejemplo 1

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Utilizando la fórmula de complementos con $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

luego

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Ejemplo 2

Calcular
$$\int_0^1 t^{1/3}(1-t)^{2/3}dt$$

$$\int_0^1 t^{1/3}(1-t)^{2/3}dt = \mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{2}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{2\pi}{9\Gamma(3)\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3})}$$