Convolución discreta cíclica y sus aplicaciones

***Darío Coutiño Aquino**

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas

coutinho.1213@gmail.com

Convolución discreta cíclica

Definición 1. Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces su *convolución discreta cíclica*, la cual denotamos por $a * b$, se define como

$$a * b = \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_{(j-k) \bmod n} b_k\right]_{j=0}^{n-1} = \left[\sum_{k=0}^{j} a_{j-k} b_k + \sum_{k=j+1}^{n-1} a_{n+j-k} b_k\right]_{j=0}^{n-1}.$$

Por ejemplo: Si $a, b \in \mathbb{C}^3$, entonces

$$a * b = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{2} a_{(0-k) \bmod 3} b_k \\ \sum_{k=0}^{2} a_{(1-k) \bmod 3} b_k \\ \sum_{k=0}^{2} a_{(2-k) \bmod 3} b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_2 b_2 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \end{bmatrix}.$$

Transformada discreta de Fourier (TDF)

Definición 2. Definimos la matriz $F_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ mediante la regla

$$F_n = \left[\omega_n^{jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}, \qquad \text{donde} \qquad \omega_n = e^{-\frac{2\pi}{n} i}.$$

La transformación lineal $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definida por $x \mapsto F_n x$ se llama la *Transformada Discreta de Fourier*.

Por ejemplo,

$$F_4 = \begin{bmatrix} \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 & \omega_4^0 \\ \omega_4^0 & \omega_4^1 & \omega_4^2 & \omega_4^3 \\ \omega_4^0 & \omega_4^2 & \omega_4^4 & \omega_4^6 \\ \omega_4^0 & \omega_4^3 & \omega_4^6 & \omega_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{\pi}{2} i} & e^{-\pi i} & e^{-\frac{3\pi}{2} i} \\ 1 & e^{-\pi i} & e^{-2\pi i} & e^{-3\pi i} \\ 1 & e^{-\frac{3\pi}{2} i} & e^{-3\pi i} & e^{-\frac{9\pi}{2} i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}.$$

Proposición 1 (La matriz inversa de la matriz F_n). *Se cumple la igualdad*

$$\frac{1}{n} F_n^* F_n = I_n,$$

así que

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n} F_n^* = \frac{1}{n}\left[\omega_n^{-jk}\right]_{j,k=0}^{n-1}.$$

La *Transformada Rápida de Fourier* es un algoritmo que realiza la Transformada Discreta de Fourier de manera muy rápida, con $Cn\log(n)$ operaciones.

Producto de vectores por componentes

Definición 3 (Producto de dos vectores por componentes). Dados dos vectores $a, b \in \mathbb{C}^n$, denotemos por $a \odot b$ su *producto por componentes* definido como

$$a \odot b = \left[a_j b_j\right]_{j=0}^{n-1}.$$

Teorema de convolución para el grupo cíclico de orden n

Teorema 1 (principal). *Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$F_n(a * b) = (F_n a) \odot (F_n b).$$

Corolario 2. *Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$a * b = F_n^{-1}((F_n a) \odot (F_n b)).$$

En el lenguaje MATLAB (o en sus análogos libres GNU Octave, Scilab, FreeMat), el lado derecho de la expresión anterior se puede escribir como:

```
ifft(fft(a) .* fft(b))
```

Multiplicación rápida de matrices circulantes por vectores

Definición 4 (Matriz circulante). Sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sean $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, entonces la entrada (j,k) de la matriz circulante generada por el vector a está dada por:

$$(C_n(a))_{j,k} = a_{(j-k) \bmod n} = \begin{cases} a_{j-k}, & \text{si} \quad j \geq k; \\ a_{n+j-k}, & \text{si} \quad j < k. \end{cases}$$

Por ejemplo: Si $a \in \mathbb{C}^3$, $b \in \mathbb{C}^3$, entonces

$$C_n(a) b = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_2 b_2 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 \end{bmatrix}.$$

Proposición 2 (Producto de matrices circulantes por vectores). *Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$C_n(a) b = a * b.$$

Extensión de una matriz de Toeplitz a una matriz circulante

Para multiplicar una matriz de Toeplitz por un vector, la extendemos a una matriz circulante, y el vector dado extendemos con cero:

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_1 & b_2 \\ a_1 & a_0 & b_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Extensión}} \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & b_1 & b_2 \\ b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En el lenguaje MATLAB los subíndices empiezan con 1, y la matriz de Toeplitz está dada por dos vectores de la siguiente manera:

$$a = \begin{bmatrix} \mathtt{a(1)} \\ \mathtt{a(2)} \\ \mathtt{a(3)} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \mathtt{b(1)} \\ \mathtt{b(2)} \\ \mathtt{b(3)} \end{bmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} \mathtt{a(1)} & \mathtt{b(1)} & \mathtt{b(2)} \\ \mathtt{a(2)} & \mathtt{a(1)} & \mathtt{b(1)} \\ \mathtt{a(3)} & \mathtt{a(2)} & \mathtt{a(1)} \end{bmatrix}.$$

La matriz circulante se determina por su primera columna:

$$c = \left[\mathtt{a(1)},\ \mathtt{a(2)},\ \mathtt{a(3)},\ \mathtt{0},\ \mathtt{0},\ \mathtt{0},\ \mathtt{b(2)},\ \mathtt{b(1)}\right]^\top.$$

Multiplicación rápida de una matriz de Toeplitz por un vector

La siguiente función calcula el producto Tx, donde T es la matriz de Toeplitz generada por dos vectores a y b:

```
function [r] = MulToeplitzByVector(a, b, x),
    n = length(x);
    m = 2 .^ nextpow2(2 * n - 1);
    % c es la columna que genera a la matriz circulante
    c = [a; zeros(m - 2 * n + 1, 1); b(n : -1 : 2)];
    xext = [x; zeros(m - n, 1)];
    y = ifft(fft(c) .* fft(xext));
    r = y(1 : n);
end
```

Para n grandes esta función es más rápida que la multiplicación estándar de MATLAB.

Esta exposición fue dirigida por el Dr. Egor Maximenko y fue parcialmente apoyada por el proyecto IPN-SIP 20150422.