Un lema sobre intervalos.

Sofía Cano Flores.

Abril 2020.

Lema 1. *Supongamos* $r \in \mathbb{N}$*,*

$$a \leq c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \cdots \leq c_r \leq d_r \leq b.$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{r}(d_k - c_k) \leq (b-a).$$

Demostración. Usando la cadena de desigualdades dada por hipótesis, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r}(d_k - c_k) &= (d_1 - c_1) + (d_2 - c_2) + \cdots + (d_{r-1} - c_{r-1}) + (d_r - c_r) \\ &\leq (d_1 - c_1) + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_{r-1} - d_{r-2}) + (d_r - d_{r-1}) \\ &= d_r - c_1 \\ &\leq b - a.\end{aligned}$$

$\therefore \quad \sum_{k=1}^{r}(d_k - c_k) \leq b - a.$ $\square$

Lema 2. *Supongamos* $m, n \in \mathbb{N}$*,*

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m,$$

$$c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \cdots \leq c_n \leq d_n,$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists j \in \{1, \ldots, m\} \quad [c_k, d_k] \subseteq [a_j, b_j]\,.$$

Sea $p := \min\{j \in \{1,\dots,n\} \ : \ [c_j, d_j] \subseteq [a_m, b_m]\}$.
Entonces, si $i \in \{1,\dots,p-1\}$ *y* $t \in \{1,\dots,m\}$ *son tales que* $[c_i, d_i] \subseteq [a_t, b_t]$*, se debe cumplir que* $t < m$.

Demostración. Denotemos,

$$\mathcal{M} := \{j \in \{1,\dots,n\} \ : \ [c_j, d_j] \subseteq [a_m, b_m]\}.$$

Procedamos por contradicción y supongamos que $t \geq m$.

$$t = m \quad \vee \quad t > m.$$

1. Si $t = m$, entonces dado que $i < p$, se contradiciría el hecho de que p es el mínimo del conjunto $\mathcal{M}$.

2. Supongamos que $t > m$, entonces tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$a_m \leq c_p \leq d_p \leq b_m \leq \cdots \leq a_t \leq c_i \leq d_i \leq b_t. \tag{1}$$

   Por otro lado, como $i < p$:

$$c_i \leq d_i \leq \cdots \leq c_p \leq d_p. \tag{2}$$

   Entonces de 1 y 2, obtenemos que $c_i = d_i = c_p = d_p$. Particularmente esto implica que $[c_i, d_i] \subseteq [a_m, b_m]$, lo cual contradice que p sea el mínimo del conjunto $\mathcal{M}$

Como en ambos casos se obtiene una contradicción, concluimos que $t < m$. □

Proposición 1. *Supongamos* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m,$$

$$c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \cdots \leq c_n \leq d_n,$$

$$\forall k \in \{1,\dots,n\} \quad \exists j \in \{1,\dots,m\} \quad [c_k, d_k] \subseteq [a_j, b_j].$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) \leq \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j).$$

Demostración. Queremos probar lo siguiente:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) \leq \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j)}_{\mathcal{A}(m)}.$$

Procedamos por inducción sobre m.

$\mathcal{A}(1)$ se sigue del lema 1.

Para tener una idea más clara de la demostración, probemos $\mathcal{A}(2)$.

Pongamos $p := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ [c_k, d_k] \subseteq [a_2, b_2]\}$.

Por el lema 2, tenemos lo siguiente:

$$\forall j \in \{1, \ldots, p-1\} \ \ [c_j, d_j] \subseteq [a_1, b_1],$$

y por la definición de p:

$$\forall j \in \{p, \ldots, n\} \ \ [c_j, d_j] \subseteq [a_2, b_2].$$

Por lo anterior y el lema 1, tenemos que:

$$\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) = \sum_{j=1}^{p-1}(d_j - c_j) + \sum_{j=p}^{n}(d_j - c_j) \leq (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2).$$

Supongamos que se cumple $\mathcal{A}(m)$ y probemos $\mathcal{A}(m+1)$.

Pongamos $p := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \ : \ [c_k, d_k] \subseteq [a_{m+1}, b_{m+1}]\}$.

Si $p = 1$, no quedaría nada por probar. Entonces, supongamos $p > 1$.

Por el lema 1:

$$\sum_{j=p}^{n}(d_j - a_j) \leq (b_{m+1} - a_{m+1}), \tag{3}$$

y usando $\mathcal{A}(m)$ con $p-1$ en vez de n, obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{p-1}(d_j - c_j) \leq \sum_{k=1}^{m}(b_k - a_k). \tag{4}$$

Finalmente sumando 3 y 4, obtenemos lo deseado:

$$\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j) \leq \sum_{k=1}^{m+1}(b_k - a_k).$$

□

A continuación se presenta otra demostración.

Demostración. Queremos probar lo siguiente:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} (d_k - c_k) \leq \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j)}_{\mathcal{H}(n)} .$$

Procedamos por inducción sobre n.

$\mathcal{H}(1)$ es inmediato.

Probemos $\mathcal{H}(2)$.

Tenemos que existen $j, k \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $[c_1, d_1] \subseteq [a_j, b_j]$ y $[c_2, d_2] \subseteq [a_k, b_k]$, entonces $j = k$ ó $j \neq k$.

- Si $j = k$, por el lema 1,tenemos que

$$\sum_{i=1}^{2}(d_i - c_i) \leq b_j - a_j \leq \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

- Si $j \neq k$, entonces:

$$(d_1 - c_1) + (d_2 - c_2) \leq (b_j - a_j) + (b_k - a_k) \leq \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_i).$$

De ambos casos, se concluye lo deseado.

Supongamos que se cumple $\mathcal{H}(n)$ y probemos que se cumple $\mathcal{H}(n+1)$.

Existe $t \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $[c_{n+1}, d_{n+1}] \subseteq [a_t, b_t]$.

Si $t = 1$ entonces por la hipótesis general de la proposición y el lema 2, para todo $j \in \{1, \ldots, m+1\}$ $[c_j, d_j] \subseteq [a_1, b_1]$ y por el lema 1 se concluiría lo deseado.

Supongamos $t > 1$.

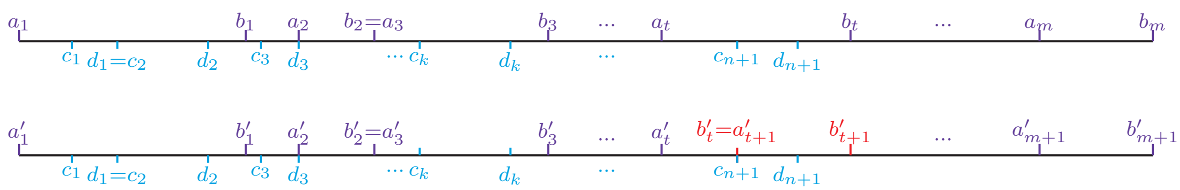
Observemos lo siguiente:

$$[a_t, b_t] = [a_t, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_t]. \tag{5}$$

Definamos una nueva familia de puntos, con ayuda de los puntos que ya tenemos, la cual definirá nuestros nuevos intervalos ”grandes”. Ésta estará dada por:

$$a'_k = \begin{cases} a_k & \text{si} \quad k \in \{1, \dots, t\} \\ \\ c_{n+1} & \text{si} \quad k = t+1 \\ \\ a_{k-1} & \text{si} \quad k \in \{t+2, \dots, m+1\} \end{cases} \qquad b'_k = \begin{cases} b_k & \text{si} \quad k \in \{1, \dots, t-1\} \\ \\ c_{n+1} & \text{si} \quad k = t \\ \\ b_{k-1} & \text{si} \quad k \in \{t+1, \dots, m+1\} \end{cases}$$

Notemos que ésta familia sigue cumpliendo lo que se pedía de hipótesis para la familia original y además $[c_{n+1}, d_{n+1}] \subseteq [a'_{t+1}, b'_{t+1}]$.



Usando el lema 2 y aplicando $\mathcal{H}(n)$ con t en vez de m, a la nueva familia de puntos definida, obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i) \leq \sum_{q=1}^{t}(b'_q - a'_q). \tag{6}$$

Por otro lado, tenemos que

$$d_{n+1} - c_{n+1} \leq b'_{t+1} - a'_{t+1}. \tag{7}$$

Sumando las ecuaciones 6 y 7, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(d_i - c_i) \leq \sum_{q=1}^{t+1}(b'_q - a'_q) \leq \sum_{q=1}^{m+1}(b'_q - a'_q) \leq \sum_{q=1}^{m}(b_q - a_q).$$

La última desigualdad es debida a 5 y al lema 1. $\square$