Desigualdad de Hardy

Ivan Avilés, Jordi Arreortua
23-Abril-2020

Desigualdad de Hardy 1. Sea $f \in L^p((0,+\infty), \mu, [0,+\infty])$, donde $p \in (1,+\infty)$ y μ la medida de Lebesgue. Definimos $g\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty]$ mediante la siguiente fórmula.

$$g(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Entonces

$$\int_0^{+\infty} g^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x)\,dx.$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable $t = sx$ tenemos:

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(sx)\,ds$$

Elejiendo q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y aplicando Hölder obtenemos:

$$g(x) = \int_0^1 f(sx)s^{\frac{1}{pq}}s^{-\frac{1}{pq}}\,ds \leq \left(\int_0^1 f^p(sx)s^{\frac{1}{q}}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 f^p(sx)s^{\frac{1}{q}}\,ds\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 f^p(sx)s^{\frac{1}{q}}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

Elevando a la p:

$$g^p(x) \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}}\left(\int_0^1 f^p(sx)s^{\frac{1}{q}}\,ds\right)$$

Integrando de 0 a $+\infty$ con respecto a x y aplicando el Teorama de Fubini:

$$\int_0^{+\infty} g^p(x)\,dx \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f^p(sx) s^{\frac{1}{q}}\,ds \right) dx = \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \int_0^1 s^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} f^p(sx)\,dx \right) ds$$

Nuevamente hacemos el cambio de variable $t = sx$ y resolviendo la integral sobre s concluimos:

$$\int_0^{+\infty} g^p(x)\,dx \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \int_0^1 s^{\frac{1}{q}-1} \left(\int_0^{+\infty} f^p(t)\,dt \right) ds = \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \left(\int_0^{+\infty} f^p(t)\,dt \right) \int_0^1 s^{\frac{1}{q}-1}\,ds$$

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{q}\right)^{-1} \int_0^{+\infty} f^p(t)\,dt = \left(\frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}-1} \int_0^{+\infty} f^p(t)\,dt = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \int_0^{+\infty} f^p(t)\,dt$$

$\square$