Teorema de la convergencia de Vitali para sucesiones uniformemente integrables

Tarea Adicional

Paolo Alejandro Balam Aguilar Mata
Rocio Daniela Pérez Cruz

con sugerencias del profesor Egor Maximenko

Objetivos. Estudiar el concepto de la *integrabilidad uniforme* de un conjunto de funciones y demostrar el teorema de la convergencia de Vitali.

Prerrequisitos. Integral y sus propiedades, el lema de Fatou, el teorema de Egórov.

Índice

1. Conjuntos de funciones uniformemente integrables

Un papel crucial en esta teoria hace el conjunto de los puntos donde una función f toma valores absolutos más grandes que un número dado, y la integral de $|f|$ sobre este conjunto.
Sea $(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ un espacio de medida.

1 Notación. Dada una función $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ y un número $M > 0$, pongamos

$$A(f, M) := \{x \in X : |f(x)| \geq M\}, \qquad V(f, \mu, M) := \int_{A(f,M)} |f| \, d\mu.$$

Como μ será fija en todos los razonamientos, en vez de $V(f, \mu, M)$ escribiremos solo $V(f, M)$.

2 Definición. Sea C un subconjunto de $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$. Se dice que C es *uniformemente integrable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que para cada $f \in C$ se cumple que $V(f, M) < \epsilon$.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall f \in C \quad V(f, M) < \epsilon.$$

3 Proposición. *Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, C)$. Entonces*

$$\int_{A(f,M)} |f| \, d\mu = \int_X 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu = \int_X (1_{[M,+\infty)} \circ |f|) \cdot |f| \, d\mu.$$

Demostración. En efecto, para la primera igualdad notemos que

$$(1_{A(f,M)} |f|)(x) = \begin{cases} 1_{A(f,M)}(x) \, |f(x)| = |f(x)| & si \;\; x \in A(f, M), \\ \\ 0 & si \;\; x \notin A(f, M). \end{cases} \tag{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_X 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu &= \int_{A(f,M)} 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu + \int_{X \setminus A(f,M)} 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu \\ &= \int_{A(f,M)} 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu. \end{aligned} \tag{3}$$

Porque en el dominio de integración $X \setminus A(f, M)$, la función se anula. Además, por (2) tenemos la igualdad $(1_{A(f,M)} |f|)(x) = |f(x)|$ para cada

$x \in A(f, M)$, luego

$$\int_{A(f,M)} 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu = \int_{A(f,M)} |f| \, d\mu.$$

$\therefore$ Por (3)

$$\int_X 1_{A(f,M)} |f| \, d\mu = \int_{A(f,M)} |f| \, d\mu.$$

Ahora, para la segunda parte de la igualdad, notemos que

$$(1_{[M,+\infty)} \circ f)(x) = \begin{cases} (1_{[M,+\infty)})(f(x)) = 1 & si \quad f(x) \in [M, +\infty) \\ & si \quad\; x \in A(f, M), \\ \\ (1_{[M,+\infty)})(f(x)) = 0 & si \quad\; x \notin A(f, M). \end{cases}$$

Entonces

$$((1_{[M,+\infty)} \circ f) \cdot |f|)(x) = \begin{cases} |f(x)| & si \quad x \in A(f, M), \\ 0 & si \quad x \notin A(f, M). \end{cases} \tag{4}$$

Calculando la integral, resulta

$$\int_X \mathbb{1}_{[M,+\infty)} \circ f) \cdot |f| \, d\mu = \int_{A(f,M)} (\mathbb{1}_{[M,+\infty)} \circ f) \cdot |f| \, d\mu, \tag{5}$$

pues de (4) la función se anula en $X \setminus A(f, M)$.

Finalmente, de (4) y de (5)

$$\int_X 1_{[M,+\infty)} \circ f) \cdot |f| \, d\mu = \int_{A(f,M)} (|f| \, d\mu.$$

$\square$

Es fácil ver que la expresión $V(f, M)$ depende de M de manera **decreciente**.

4 Proposición. *Sea* $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$*. Entonces la familia de conjuntos* $(A(f,M))_{M>0}$ *es decreciente y la familia de números* $(V(f,M))_{M>0}$ *es decreciente, es decir para cualesquiera* $M_1, M_2 > 0$ *con* $M_1 < M_2$ *se tiene*

$$A(f, M_1) \supseteq A(f, M_2),$$

$$V(f, M_1) \geq V(f, M_2).$$

Demostración. En efecto, sea $M_1, M_2 > 0$ con $M_1 < M_2$. Sea $x \in A(f, M_2)$ entonces $|f(x)| > M_2 > M_1$, así que $x \in A(f, M_1)$.
Notemos que

$$V(f, M_2) = \int_{A(f,M_2)} |f| \, d\mu \leq \int_{A(f,M_1)} |f| \, d\mu = V(f, M_1),$$

por la monotonía de la integral sobre el dominio de integración. $\square$

Usando esta observación, podemos dar otras formas equivalentes de la definición 2.

5 Proposición. *Sea* C *un subconjunto de* $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *C es uniformemente integrable,*
2. $\forall \epsilon > 0 \qquad \exists M > 0 \qquad \sup_{f \in C} V(f, M) < \epsilon,$
3. $\forall \epsilon > 0 \qquad \inf_{M>0} \sup_{f \in C} V(f, M) < \epsilon,$
4. $\inf_{M>0} \sup_{f \in C} V(f, M) = 0,$
5. $\lim_{M \to \infty} \sup_{f \in C} V(f, M) = 0.$

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como C es uniformemente integrable entonces para $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que para cada $f \in C$ se cumple que $V(f, M) < \epsilon$.

Entonces ϵ es una cota superior para el conjunto $\{V(f, M) : f \in C\}$ entonces $\sup_{f \in C} V(f, M) < \epsilon$.

2. $\Rightarrow$ 1. Si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \sup_{f \in C} V(f, M) < \epsilon$ entonces $\forall f \in C, \quad V(f, M) < \sup_{f \in C} V(f, M) < \epsilon$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $B := \left\{ \sup_{f \in C} V(f, M) : M > 0 \right\}$.

Como por hipótesis para $\epsilon > 0$ $\exists M_\epsilon > 0$ tal que $\sup_{f \in C} V(f, M_\epsilon) < \epsilon$. Si $\text{ínf(B)} = \sup_{f \in C} V(f, M_\epsilon)$, hemos terminado.

De otra forma, como $\text{ínf(B)} < \sup_{f \in C} V(f, M) \quad \forall \; M > 0$. En particular, para M_ϵ se tiene $\text{ínf}(B) < \sup_{f \in C} V(f, M_\epsilon) < \epsilon \Rightarrow \inf_{M>0} \; \sup_{f \in C} \; V(f, M) < \epsilon$.

3. $\Rightarrow$ 2. Sea $B := \left\{ \sup_{f \in C} V(f, M) : M > 0. \right\}$. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Si $\text{ínf}(B) < \epsilon$, entonces $\exists \quad M_1$ tal que $\text{ínf}(B) = \sup_{f \in C} V(f, M_1) < \epsilon$.

3. $\iff$ 4. Trivial.

(4) $\iff$ (5)Por la proposición 4,la familia $\left\{ \sup_{f \in C} V(f, M) \right\}_{M>0}$ es decreciente, luego su límite coincide con el infimo de los valores. $\square$

2. Familias Uniformemente Integrables

La siguiente definición es muy similar a la definición 2. Formalmente aplicamos la definición 2 al conjunto $C {:=} \{f_j : j \in J\}$.

6 Definición. Sea $(f_j)_{j\in J}$ una familia pertenecientes a $L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Se dice que C es una *familia de funciones uniformemente integrable.*

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists M > 0 \qquad \forall j \in J \qquad V(f_j, M) < \epsilon.$$

7 Ejemplo. Consideremos $[0,1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente regla:

$$f_n = n1_{[0,\frac{1}{n}]}$$

Mostremos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es uniformemente integrable.

Solución. Queremos ver que

$$\exists\ \epsilon > 0 \quad \forall\ M > 0 \quad \exists\ n \in \mathbb{N} \quad V(f_n, M) \geq \epsilon.$$

Sea $\epsilon = 1$, $M > 0$ arbitrarios. Tenemos que

$$\begin{aligned} A(f_n, M) &= \{x \in X : |f_n(x)| \geq M\} = \{x \in [0,1] : |f_n(x)| \geq M\} \\ &= \{x \in [0,1] : f_n(x) \geq M\} = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{n}\right], & \text{si } n \geq M, \\ \emptyset, & \text{si } n < M. \end{cases} \end{aligned}$$

Asi que dado $K \geq M$, tenemos que

$$\int_{A(f_k,M)} |f_k|\, d\mu = \int_{[0,\frac{1}{k}]} |f_k|\, d\mu = k \int_{[0,\frac{1}{k}]} d\mu = k\ \mu\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) = 1 = \epsilon.$$

$\therefore$ Basta tomar $\epsilon = 1 \quad \forall M > 0$ tomando $K = \lceil M \rceil \qquad V(f_n, M) \geq \epsilon$
$\therefore$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es uniformemente integrable.

8 Ejemplo. Consideramos $[0,1]$ con la medida de Lebesgue μ. Definimos la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la siguiente regla:

$$f_n = \sqrt{n}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}.$$

Solución.
Sea $\epsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ calculamos $A(f_n, M)$

$$A(f_n, M) = \{x \in X : |f_n(x)| \geq M\} = \begin{cases} [0, \frac{1}{n}] & si \quad \sqrt{n} \geq M, \\ \emptyset & si \quad \sqrt{n} < M. \end{cases}$$

Si $A(f_n, M) = \emptyset$ hemos terminado.
En el otro caso, cuando $A(f_n, M) = [0, \frac{1}{n}]$ la integral queda como:

$$\int_{A(f_n,M)} |f_n| \, d\mu = \int_{[0,\frac{1}{n}]} |f_n| \, d\mu = \sqrt{n} \int_{[0,\frac{1}{n}]} d\mu = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

y como $\sqrt{n} \geq M \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{M}$.

$\therefore$ Basta tomar M$< \frac{1}{\epsilon}$.

De (6) se sigue que

$$\int_{A(f_n,M)} |f_n| \, d\mu < \epsilon.$$

9 Proposición (Una familia de funciones dominada por una función integrable es uniformemente integrable)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones en $M(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ dominada por una función integrable h:*

1. $h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, \infty])$,
2. $|f_j| \leq h$ *para cada* $j \in J$.

Entonces la familia $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.

Para demostrar la 9, demostraremos primero los siguientes lemas.

10 Lema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones en $M(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ dominada por una función integrable h:*

1. $h \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, \infty])$,
2. $|f_j| \leq h$ *para cada* $j \in J$.

Entonces para todo $M > 0$ y $\forall j \in \mathbb{N}$, $A(f_j, M) \subseteq A(h, M)$.

Demostración. En efecto, sea $f_j \in (f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $x \in A(f_j, M)$ entonces $|f_j(x)| \geq M \Rightarrow h(x) \geq M$ por lo que $x \in A(h, M)$. □

11 Lema. *Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0,\infty])$, esto es, $f \in M(X, \mathcal{F}, [0,\infty])$ y $\displaystyle\int_X f d\mu < \infty$*
Entonces $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \int_{A(f,M)} f d\mu = 0$

Demostración. Definimos $\varphi : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ como $\varphi(Y) := \int_Y f d\mu$. Sabemos que φ es una premedida.
Definimos $A_{+\infty} := \{x \in X : f(x) = +\infty\}$. Entonces $\mu(A_{+\infty}) = 0$, luego $\varphi(A_{+\infty}) = \int_{A_{+\infty}} f d\mu = 0$.

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A(f, m) = f^{-1}\left[\bigcap_{m\in\mathbb{N}} [m, +\infty]\right] = f^{-1}[\{+\infty\}] = A_{+\infty}.$$

Como vimos en 4, la sucesión $(A(f,m))_{m\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Además, $\varphi < +\infty$. Aplicando la continuidad de φ por arriba:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(A(f, m)) = \varphi(A_{+\infty}) = 0.$$

□

Demostración de la proposición 9. Tenemos

$$\sup_{j\in J} \int_{A(f_j,M)} |f_j| d\mu \leq \sup_{j\in J} \int_{A(f_j,M)} h d\mu \leq \int_{A(h,M)} h d\mu,$$

luego

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{j\in J} \int_{A(f_j,M)} |f_j| d\mu \leq \lim_{M\to\infty} \int_{A(h,M)} h d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{M\to\infty} \sup_{j\in J} \int_{A(f_j,M)} |f_j| d\mu = 0.$$

$\therefore$ Utilizando la equivalencia de la proposición 5, la familia $(f_j)_{j\in J}$ es uniformemente integrable. □

3. Teorema de la Convergencia de Vitali y su recíproco.

12 Proposición. *Sea $C \subset L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ un conjunto de funciones uniformemente integrable. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \delta$ se tiene*

$$\int_E |f| d\mu < \epsilon \qquad \text{para cada } f \in C.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, como C es uniformemente integrable, existe $M > 0$ tal que

$$\int_{A(f,M)} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall f \in C.$$

Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2M}$ y sea $E \in F$ tal que $\mu(E) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_E |f| d\mu &= \int_{E \cap A(f,M)} |f| d\mu + \int_{E \setminus A(f,M)} |f| d\mu \\
&\leq \int_{A(f,M)} |f| d\mu + \int_{E \setminus A(f,M)} M d\mu \\
&\leq \int_{A(f,M)} |f| d\mu + \int_E M d\mu \\
&< \frac{\epsilon}{2} + M\delta = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

13 Teorema. *Teorema de la convergencia de Vitali. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, es decir, $\mu(X) < \infty$. Supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ con las siguientes propiedades:*

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *es uniformemente integrable,*
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge $\mu - c.t.p.$ a una función g,*
3. $\mu(\{x \in X : g(x) = \infty\}) = 0.$

Entonces $g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g|\, d\mu = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in N}$ es uniformemente integrable, por la proposición 12 tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $\forall D \in F \mu(D) < \delta$ se tiene

$$\int_D |f_n| d\mu < \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Por el teorema de Egorov tenemos que (f_n) converge casi uniformemente a g, entonces existe $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) < \delta$ y $f \overset{X\setminus E}{\Longrightarrow} g$.
Sea $\alpha = \frac{\epsilon}{3\mu(X\setminus E)}$ como (f_n) converge uniformemente a g en $X \setminus E$ entonces $\exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq k \;\; \forall x \in X \setminus E \quad |f_n(x) - g(x)| < \alpha$.
Luego

$$\int_{X\setminus E} |f_n - g| d\mu < \int_{X\setminus E} \alpha d\mu = \alpha\mu(X \setminus E) = \frac{\epsilon\mu(X \setminus E)}{3\mu(X \setminus E)} = \frac{\epsilon}{3}. \tag{8}$$

Además, como $\mu(E) < \delta$, se cumple (7).
Por el lema de Fatou, tenemos

$$\int_E |g| d\mu = \int_E \liminf_{n\to\infty} |f_n| d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n| d\mu < \frac{\epsilon}{3}. \tag{9}$$

Finalmente, para cada $n \geq k$

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n - g| d\mu &= \int_E |f_n - g| d\mu + \int_{X\setminus E} |f_n - g| d\mu \\
&\leq \int_E |f_n| d\mu + \int_E |g| d\mu + \int_{X\setminus E} |f_n - g| d\mu \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se tiene por (7), (8) y (9).
Además, por la desigualdad inversa del triángulo se tiene

$$\int_X |g| d\mu \leq \int_X |f_n| d\mu + \int_X |f_n - g| d\mu < +\infty.$$

□

Para espacios de medida finita, debido a la proposición 9, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se puede obtener como un corolario del teorema 13.

El siguiente teorema se puede considerar como el recíproco al teorema de la convergencia de Vitali.

14 Teorema. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, esto es, $\mu(X) < \infty$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ tal que para cada E en F existe un límite de la sucesión de integrales*

$$\int_E f_n \, d\mu$$

Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable.