Un acercamiento a los sistemas de funciones iteradas

Seminario departamental

Gamaliel Yafte Téllez Sánchez

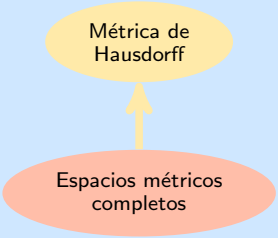
Escuela Superior de Física y Matemáticas - I. P. N.

16 de Agosto del 2018

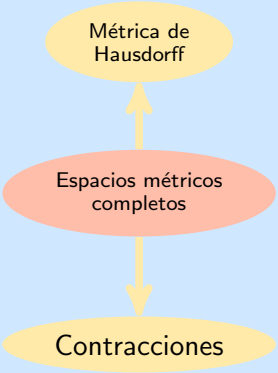
Contenido

Espacios métricos completos

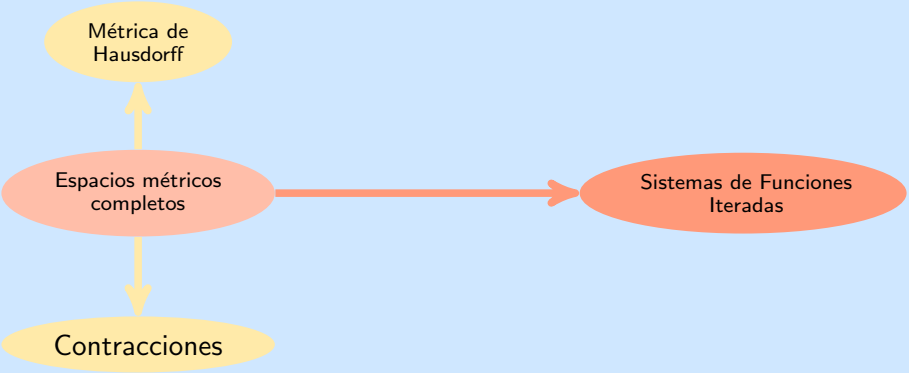
Contenido



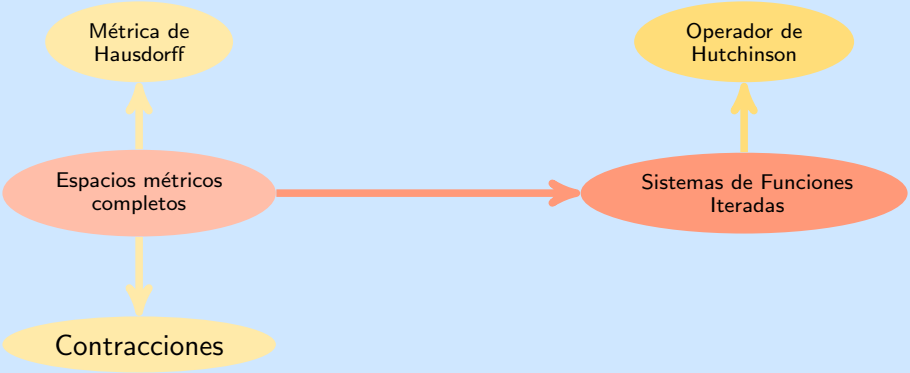
Contenido


Métrica de Hausdorff
Espacios métricos completos
Contracciones

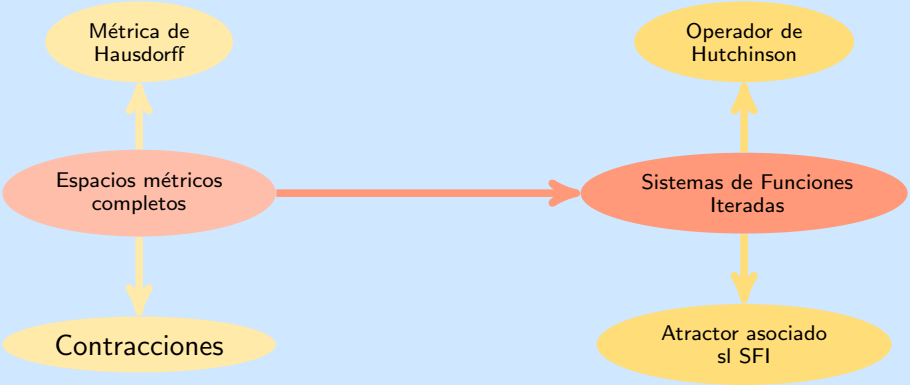
Contenido


Métrica de Hausdorff
Espacios métricos completos
Sistemas de Funciones Iteradas
Contracciones

Contenido


Métrica de Hausdorff
Operador de Hutchinson
Espacios métricos completos
Sistemas de Funciones Iteradas
Contracciones

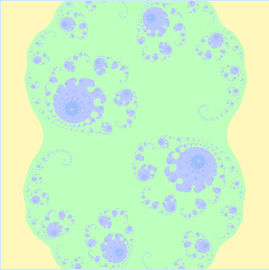
Contenido


Métrica de Hausdorff
Operador de Hutchinson
Espacios métricos completos
Sistemas de Funciones Iteradas
Contracciones
Atractor asociado sl SFI

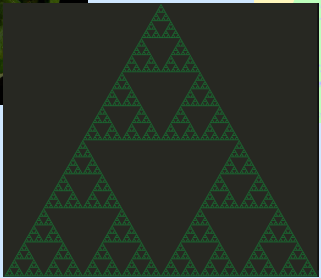
Un objeto se llama **fractal**, si no puede ser descrito a partir de geometría elemental y cumple una propiedad de autosimilitud.

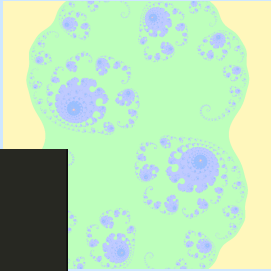
Un objeto se llama **fractal**, si no puede ser descrito a partir de geometría elemental y cumple una propiedad de autosimilitud.

Un objeto se llama **fractal**, si no puede ser descrito a partir de geometría elemental y cumple una propiedad de autosimilitud.



Un objeto se llama **fractal**, si no puede ser descrito a partir de geometría elemental y cumple una propiedad de autosimilitud.





Espacios métricos completos

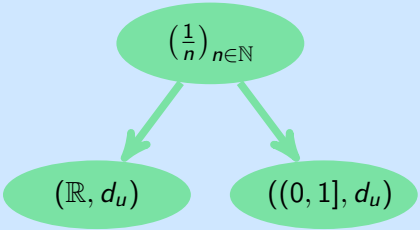
(X, d) **denotará un espacio métrico.**

(X, d) denotará un espacio métrico.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(X, d) denotará un espacio métrico.

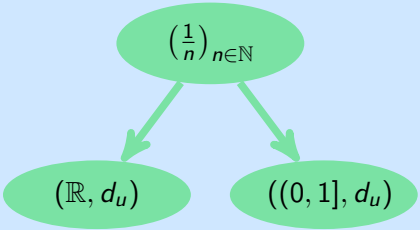
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.



(X, d) denotará un espacio métrico.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

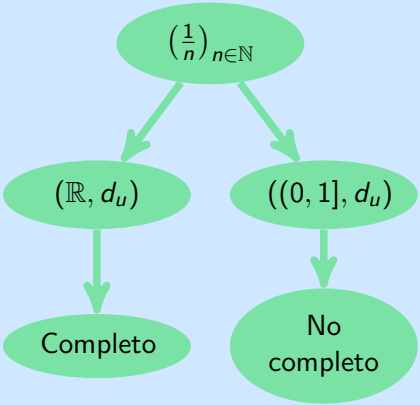
(X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.



(X, d) denotará un espacio métrico.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una **sucesión de Cauchy**, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy es convergente.



$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$(\mathbb{R}, d_u)$,

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$(\mathbb{R}, d_u)$, $\quad A = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$$(\mathbb{R}, d_u), \qquad A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 3, 5\}$$

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$$(\mathbb{R}, d_u), \qquad A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 3, 5\}$$

$$d_u(A, B) = 1$$

$$\mathcal{H}(X) := \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset \ \wedge \ A \text{ es compacto}\}$$

Sen $x \in X$ y $B \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(x, B) = \operatorname*{mín}_{b \in B}\{d(x, b)\}.$$

Sea $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$d(A, B) = \operatorname*{máx}_{a \in A}\{d(a, B)\}.$$

$$(\mathbb{R}, d_u), \qquad A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 3, 5\}$$

$$d_u(A, B) = 1 \quad \text{pero} \quad d_u(B, A) = 2$$

Métrica de Hausdorff

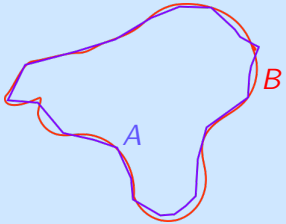
Sea $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$,

$$h(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Métrica de Hausdorff

Sea $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$,

$$h(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

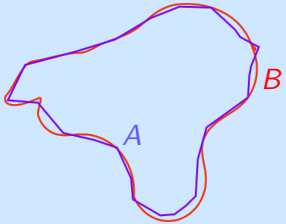


$h(A, B) \to 0$

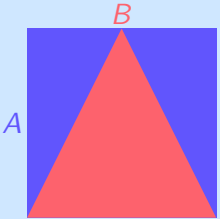
Métrica de Hausdorff

Sea $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, tal que $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$,

$$h(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\}.$$



$h(A, B) \to 0$



$h(A, B) \neq 0$

Teorema (Completitud de $\mathcal{H}(X)$)

Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{H}(X), h)$ también lo es.

[Barnsley1988] *M. F. Barnsley*, **Fractals Everywhere**, Academic Press Inc, 1ra edición, ISBN: 0-12-079062-9s; (1988).

Teorema (Completitud de $\mathcal{H}(X)$)

Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces $(\mathcal{H}(X), h)$ también lo es.

[Barnsley1988] *M. F. Barnsley*, **Fractals Everywhere**, Academic Press Inc, 1ra edición, ISBN: 0-12-079062-9s; (1988).

[Hausdorff1937] *F. Hausdorff*, **Set Theory (Traducción de la 3ra Edición de Grundzüge der Mengenlehre)**, Chelsea Publishing Company, 2da edición; (1957).

Contracciones

$f : X \to X$ se dice que es una **contración** si existe $C \in [0, 1)$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y).$$

Contracciones

$f : X \to X$ se dice que es una **contración** si existe $C \in [0, 1)$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y).$$

$([1, 2], d_u)$,

Contracciones

$f : X \to X$ se dice que es una **contración** si existe $C \in [0, 1)$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y).$$

$([1, 2], d_u)$, $r_2 : [1, 2] \to [1, 2]$ tal que,

$$r_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Contracciones

$f : X \to X$ se dice que es una **contración** si existe $C \in [0,1)$ tal que $\forall x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x,y).$$

$([1,2], d_u)$, $r_2 : [1,2] \to [1,2]$ tal que,

$$r_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

$$\Rightarrow \quad d_u(r_2(x), r_2(y)) \leq \tfrac{1}{2} d_u(x,y).$$

Teorema del punto fijo de Banach

Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$ de f. Sea $x \in X$, entonces

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} f^{\circ(n)}(x), \quad f^{\circ(n)}(x) = \underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x)$$

Teorema del punto fijo de Banach

Si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción, entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$ de f. Sea $x \in X$, entonces

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} f^{\circ(n)}(x), \quad f^{\circ(n)}(x) = \underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x)$$

$$r_2\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Sistemas de funciones iteradas

$\{(X, d), f_1, ..., f_n\}$ es un **sistema de funciones iteradas (SFI)**, si

$\{(X, d), f_1, ..., f_n\}$ es un **sistema de funciones iteradas (SFI)**, si

- (X, d) es un espacio métrico completo.

$\{(X, d), f_1, ..., f_n\}$ es un **sistema de funciones iteradas (SFI)**, si

- (X, d) es un espacio métrico completo.
- $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $f_j : X \to X$ es una contracción.

$\{(X, d), f_1, ..., f_n\}$ es un **sistema de funciones iteradas (SFI)**, si

- (X, d) es un espacio métrico completo.
- $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $f_j : X \to X$ es una contracción.

[Barnsley1988] *M. F. Barnsley*, **Fractals Everywhere**, Academic Press Inc, 1ra edición, ISBN: 0-12-079062-9s; (1988).

$\{(X,d), f_1, ..., f_n\}$ es un **sistema de funciones iteradas (SFI)**, si

- (X,d) es un espacio métrico completo.
- $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $f_j : X \to X$ es una contracción.

[Barnsley1988] *M. F. Barnsley*, **Fractals Everywhere**, Academic Press Inc, 1ra edición, ISBN: 0-12-079062-9s; (1988).

$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ con

$$f_1(x,y) = \frac{2}{3}(x,y),$$

$$f_2(x,y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y\right),$$

$$f_3(x,y) = \left(\frac{2}{3}x, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right).$$

Operador de Hutchinson

Sea $\{(X, d), f_1, ..., f_n\}$ un SFI. El **operador de Hutchinson** asociado al SFI, se define como

$$\mathfrak{H} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X),$$

$$\mathfrak{H}(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A).$$

Los SFI generan fractales.

Los SFI generan fractales.

Teorema (Operador de Hutchinson como contracción)

Si $\{(X,d), f_1, ..., f_n\}$ es un SFI y que $\forall j \in \{1, ..., n\}$, C_j es el respectivo factor de contracción para f_j, entonces $\mathfrak{H} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ es una contracción y cumple que

$$h(\mathfrak{H}(A), \mathfrak{H}(B)) \leq Sh(A, B),$$

con $S = \max\limits_{j \in \{1,...,n\}} C_j$.

Los SFI generan fractales.

Teorema (Operador de Hutchinson como contracción)

Si $\{(X,d), f_1, ..., f_n\}$ es un SFI y que $\forall j \in \{1, ..., n\}$, C_j es el respectivo factor de contracción para f_j, entonces $\mathfrak{H} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ es una contracción y cumple que

$$h(\mathfrak{H}(A), \mathfrak{H}(B)) \leq Sh(A, B),$$

con $S = \max\limits_{j \in \{1,...,n\}} C_j$.

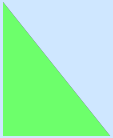
[Hutchinson1981] *J. Hutchinson*, **Fractals and Self-Similarity**, Indian University Mathematics Journal, vol. 30, no. 5, pp. 713-747; (1981).

Atractor asociado a un SFI

Por completitud de $\mathcal{H}(X)$ y el Teorema del Punto Fijo, existe un único $A_0 \in \mathcal{H}(X)$ tal que

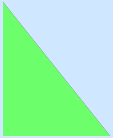
$$\mathfrak{H}(A_0) = A_0.$$

A_0 se llamará el **atractor** asociado al SFI.



$\mathfrak{H}^{\circ(0)}(A) := A$

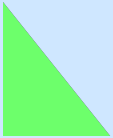
$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ en Diap. 12.



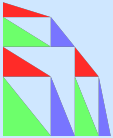
$\mathfrak{H}^{\circ(0)}(A) := A$

$\mathfrak{H}^{\circ(1)}(A)$

$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ en Diap. 12.



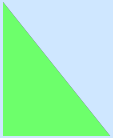
$\mathfrak{H}^{\circ(0)}(A) := A$



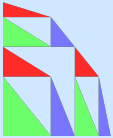
$\mathfrak{H}^{\circ(2)}(A)$

$\mathfrak{H}^{\circ(1)}(A)$

$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ en Diap. 12.

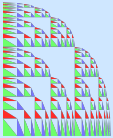


$\mathfrak{H}^{\circ(0)}(A) := A$



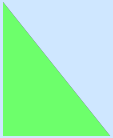
$\mathfrak{H}^{\circ(2)}(A)$

$\mathfrak{H}^{\circ(1)}(A)$

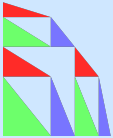


$\mathfrak{H}^{\circ(5)}(A)$

$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ en Diap. 12.



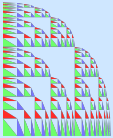
$\mathfrak{H}^{\circ(0)}(A) := A$



$\mathfrak{H}^{\circ(2)}(A)$

$\mathfrak{H}^{\circ(9)}(A)$

$\mathfrak{H}^{\circ(1)}(A)$



$\mathfrak{H}^{\circ(5)}(A)$

$\Sigma := \{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2, f_3\}$ en Diap. 12.

No todo SFI genera un fractal.

No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$A := \{(x,x) | x \in [0,1]\},$$
$$\mathfrak{H}(A) = A.$$

No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

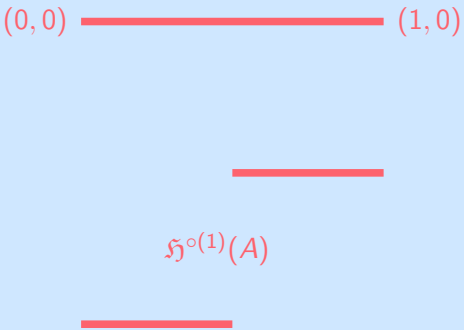
$$A := \{(x,x) | x \in [0,1]\},$$
$$\mathfrak{H}(A) = A.$$

No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$A := \{(x,x) | x \in [0,1]\},$$
$$\mathfrak{H}(A) = A.$$

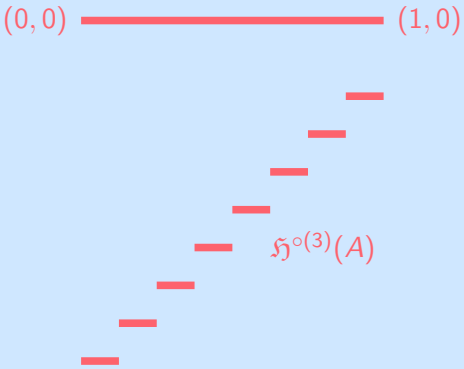


No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$A := \{(x,x) | x \in [0,1]\},$$
$$\mathfrak{H}(A) = A.$$

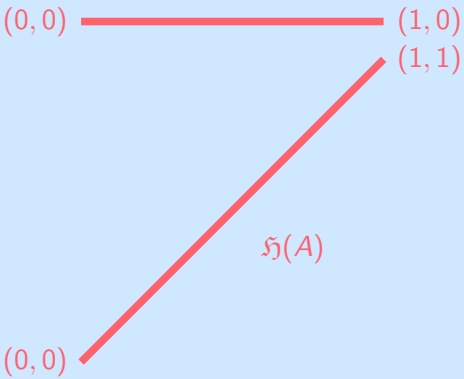


No todo SFI genera un fractal.

$\{(\mathbb{R}^2, d_u), f_1, f_2\}$ tal que

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2}(x,y),$$
$$f_2(x,y) = \frac{1}{2}(x,y) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$A := \{(x,x) | x \in [0,1]\},$$
$$\mathfrak{H}(A) = A.$$



Bibliografía Recomendada

[Mandelbrot1997] *B. Mandelbrot*, **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman and Company, ISBN: 978-0-7167-1186-5; (1997).

Bibliografía Recomendada

[Mandelbrot1997] *B. Mandelbrot*, **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman and Company, ISBN: 978-0-7167-1186-5; (1997).

[Barnsley2006] *M. F. Barnsley*, **SuperFractals**, Cambridge University Press, 1ra edción, ISBN: 978-0-5218-4493-2, (2006).

Bibliografía Recomendada

[Mandelbrot1997] *B. Mandelbrot*, **The Fractal Geometry of Nature**, W. H. Freeman and Company, ISBN: 978-0-7167-1186-5; (1997).

[Barnsley2006] *M. F. Barnsley*, **SuperFractals**, Cambridge University Press, 1ra edción, ISBN: 978-0-5218-4493-2, (2006).

[PJS2004] *H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe*, **Chaos and Fractals, New Frontiers of Science**, Springer, 2da edición, ISBN: 0-387-21823-8; (2004).

¡Gracias!