Seminario ESFM
Introducción a los límites inversos

Rocío Leonel

11 de octubre de 2018

¿Por qué límites inversos y para qué?

- Herramienta que nos ayuda a crear espacios topológicos con determinadas características.

¿Por qué límites inversos y para qué?

- Herramienta que nos ayuda a crear espacios topológicos con determinadas características.
- Sirven para modelar ciertos problemas; crecimiento de población (bacterias), economía, entre otros.

Espacios Topológicos

- Espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos.

Espacios Topológicos

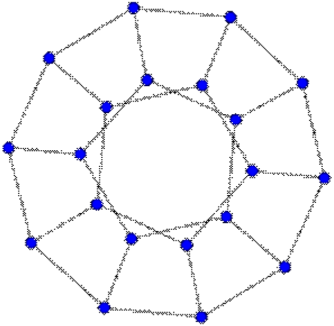
- Espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos.

Más ejemplos

- Gráficas

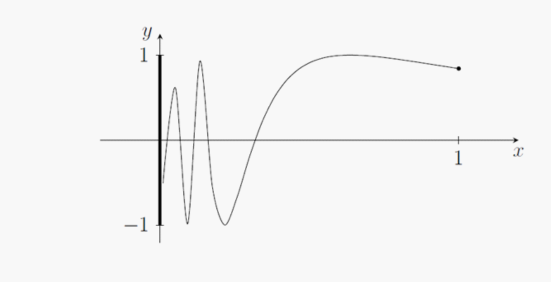
Más ejemplos

- Gráficas



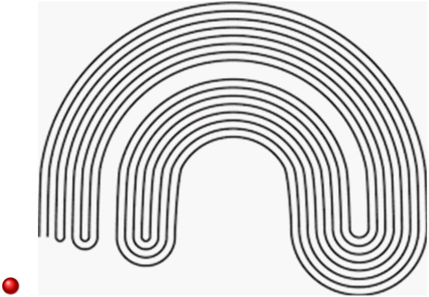
- Cerradura de la gráfica de la función sen(1/x)

- Cerradura de la gráfica de la función sen(1/x)



- Knaster o herradura de Smale

- Knaster o herradura de Smale



Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, \ldots$

Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, \ldots$
- Funciones de ligadura: $f_i : X_{i+1} \to X_i$ continua para cada $i = 1, 2, \ldots$

Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, \ldots$
- Funciones de ligadura: $f_i : X_{i+1} \to X_i$ continua para cada $i = 1, 2, \ldots$

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} X_5 \longleftarrow \cdots$$

Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, ...$
- Funciones de ligadura: $f_i : X_{i+1} \to X_i$ continua para cada $i = 1, 2, ...$
-

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} X_5 \longleftarrow \cdot$$

- El límite inverso de los espacios X_i con las funciones de ligadura f_i se define como:

Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, ...$
- Funciones de ligadura: $f_i : X_{i+1} \to X_i$ continua para cada $i = 1, 2, ...$
- $$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} X_5 \longleftarrow .$$
- El límite inverso de los espacios X_i con las funciones de ligadura f_i se define como:
- $\{(x_1, x_2, ...) \in \Pi_{i=1}^{\infty} X_i : f_i\,(x_{i+1}) = x_i$ para cada $i \in N\}$

Límites Inversos

- Espacios topológicos; X_i espacio topológico para cada $i = 1, 2, \ldots$
- Funciones de ligadura: $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ continua para cada $i = 1, 2, \ldots$
-

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_3} X_4 \xleftarrow{f_4} X_5 \longleftarrow \cdot$$

- El límite inverso de los espacios X_i con las funciones de ligadura f_i se define como:
- $\left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in \Pi_{i=1}^{\infty} X_i : f_i\left(x_{i+1}\right) = x_i \text{ para cada } i \in N \right\}$
- $\underleftarrow{lim} \left\{ X_i, f_i \right\}$

Observaciones

- $\underset{\leftarrow}{lim}\{X_i, f_i\} \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$

Observaciones

- $\underset{\longleftarrow}{lim}\{X_i, f_i\} \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$
- Asociar una topología

Observaciones

- $\underset{\leftarrow}{lim} \{X_i, f_i\} \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$
- Asociar una topología
- Bajo ciertas condiciones $\underset{\leftarrow}{lim} \{X_i, f_i\}$ es conexo, compacto y no vacío.

Ejemplos

- **Límites Inversos en el intervalo [0,1]**

Ejemplos

- **Límites Inversos en el intervalo [0,1]**
- $X_i = [0, 1]$ para cada $i = 1, 2, ...$

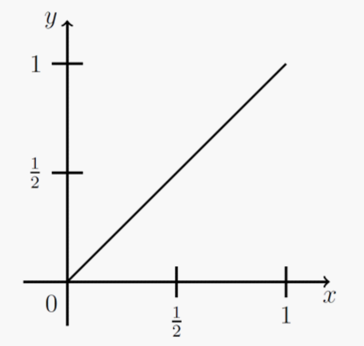
Ejemplos

- **Límites Inversos en el intervalo [0,1]**
- $X_i = [0, 1]$ para cada $i = 1, 2, \ldots$

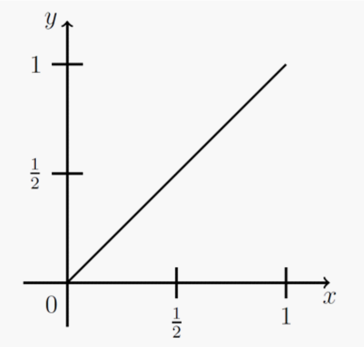
- $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continua y $f = f_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots$

Ejemplos

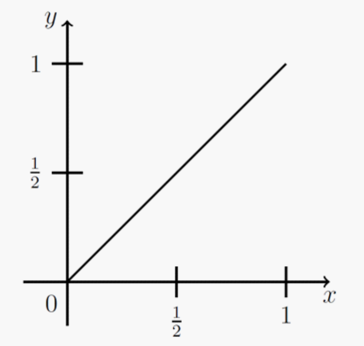
- **Límites Inversos en el intervalo [0,1]**
- $X_i = [0,1]$ para cada $i = 1, 2, \ldots$
- $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua y $f = f_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots$
- $\underset{\leftarrow}{lim}\{[0,1], f\} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \Pi_{i=1}^{\infty}[0,1] : x_i = f(x_{i+1}) \text{ para cada } i \in N\}$



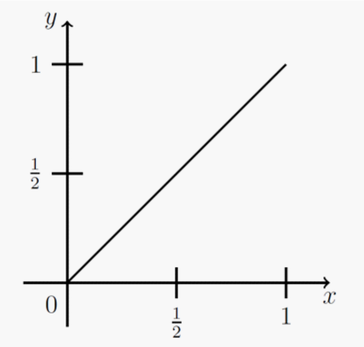
y
1
$\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{2}$
1
x

- 

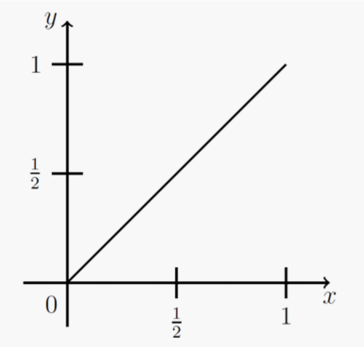
- $(x_1, x_2, \ldots) \in \underleftarrow{\lim}\{[0,1], f\}$

- 

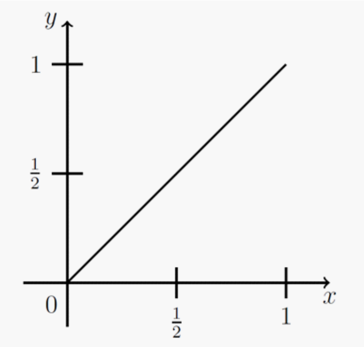
- $(x_1, x_2, \ldots) \in \underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$
- $x_i = f(x_{i+1})$ para cada $i \in N$



- $(x_1, x_2, \ldots) \in \varprojlim \{[0,1], f\}$
- $x_i = f(x_{i+1})$ para cada $i \in N$
  - $x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_i = 0$



- $(x_1, x_2, ...) \in \underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$
- $x_i = f(x_{i+1})$ para cada $i \in N$
  - $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_i = 0$
- $(0,0,0,.....) \in \underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$



- $(x_1, x_2, \ldots) \in \underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$
- $x_i = f(x_{i+1})$ para cada $i \in N$
  - $x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_i = 0$
- $(0,0,0,\ldots\ldots) \in \underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$
- $\underleftarrow{lim}\{[0,1], f\} \approx [0,1]$

- Resultado

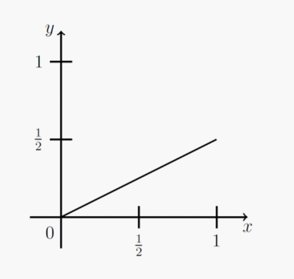
- Resultado
- TEOREMA:

- Resultado
- TEOREMA:
- Si $X_i = X$ para cada $i \in N$, y f_i es un homeomorfismo para cada $i \in N$, entonces

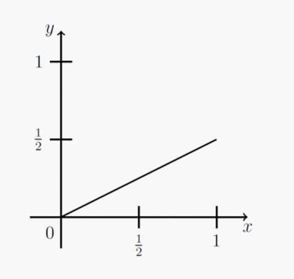
- Resultado
- TEOREMA:
- Si $X_i = X$ para cada $i \in N$, y f_i es un homeomorfismo para cada $i \in N$, entonces
- $\varprojlim \{X_i, f_i\}$ es homeomorfo a X.

- $f(x) = \frac{1}{2}x$

- $f(x) = \frac{1}{2}x$

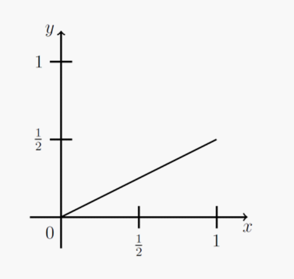
- 

- $f(x) = \frac{1}{2}x$

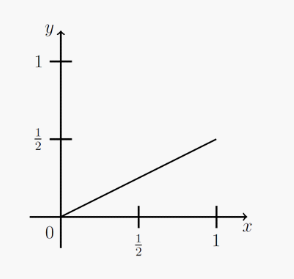
- 

- si $x_1 = \frac{1}{2}$

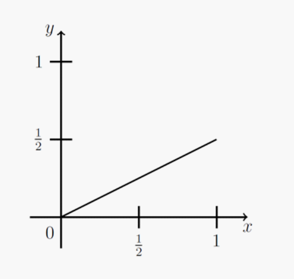
- $f(x) = \frac{1}{2}x$

- 

- si $x_1 = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \ldots\right) \notin \underleftarrow{lim}\left\{[0,1], f\right\}$

- $f(x) = \frac{1}{2}x$
- 

- si $x_1 = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \ldots\right) \notin \underset{\leftarrow}{lim}\left\{[0,1], f\right\}$
- $\underset{\leftarrow}{lim}\left\{[0,1], f\right\}$

- $f(x) = \frac{1}{2}x$
- 

- si $x_1 = \frac{1}{2}$
- $\left(\frac{1}{2}, x_2, x_3, \ldots\right) \notin \underset{\longleftarrow}{lim}\left\{[0,1], f\right\}$
- $\underset{\longleftarrow}{lim}\left\{[0,1], f\right\}$
- $\underset{\longleftarrow}{lim}\left\{[0,1], f\right\} = \left\{(0,0,\ldots\ldots)\right\} \approx \{0\}$

- $X_1 = (0, 1]$, $X_2 = (0, \frac{1}{2}]$, $X_3 = (0, \frac{1}{3}]$ en general $X_n = (0, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in N$.

- $X_1 = (0, 1]$, $X_2 = (0, \frac{1}{2}]$, $X_3 = (0, \frac{1}{3}]$ en general $X_n = (0, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in N$.
- Defina $f_i : X_{i+1} \to X_i$ como $f_{i+1}(x) = x$.

- $X_1 = (0, 1]$, $X_2 = (0, \frac{1}{2}]$, $X_3 = (0, \frac{1}{3}]$ en general $X_n = (0, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in N$.

- Defina $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ como $f_{i+1}(x) = x$.
- $\underset{\leftarrow}{lim} \{[0, 1], f\} = \emptyset$.

- Otro resultado

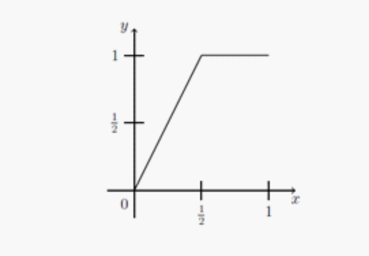
- Otro resultado
- TEOREMA

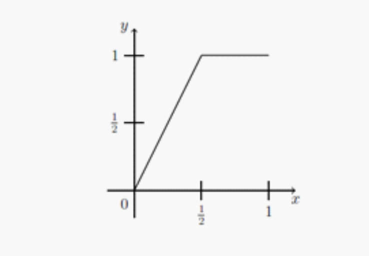
- Otro resultado
- TEOREMA
- Si cada espacio topológico X_i es un continuo y las funciones de ligadura, f_i, son suprayectivas, entonces el $\underleftarrow{lim}\{X_i, f_i\}$ es un continuo.

- Otro resultado
- TEOREMA
- Si cada espacio topológico X_i es un continuo y las funciones de ligadura, f_i, son suprayectivas, entonces el
  $\underleftarrow{lim}\{X_i, f_i\}$ es un continuo.
- Espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

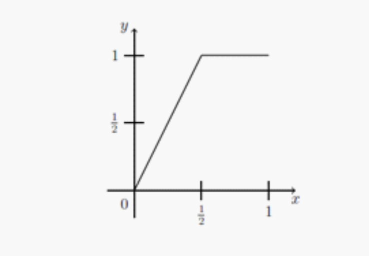
- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

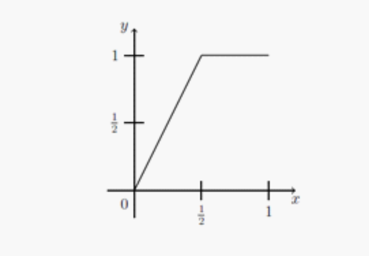


- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
    - 

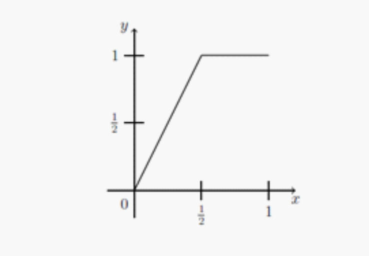
- $(0, 0, 0, \ldots)$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- 

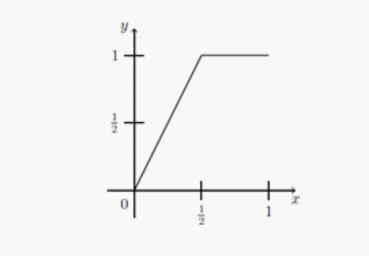
- $(0, 0, 0, \ldots)$
- $x_1 \in [0, 1)$, $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- 

- $(0, 0, 0, \ldots)$
- $x_1 \in [0, 1)$, $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$
- $\left(x_1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{4}, \frac{x_1}{8}, \ldots\right)$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- 

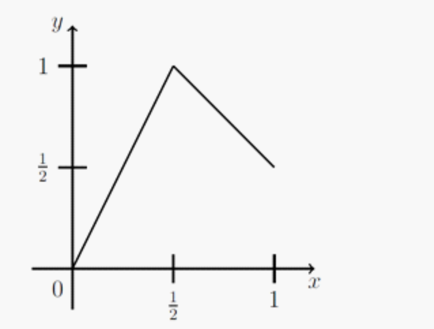
- $(0, 0, 0, \ldots)$
- $x_1 \in [0, 1)$, $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$
- $\left(x_1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{4}, \frac{x_1}{8}, \ldots\right)$
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 1$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$
- 

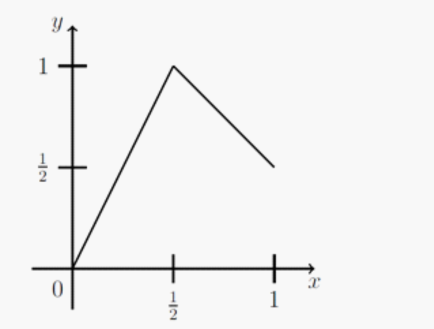
- $(0, 0, 0, \ldots)$
- $x_1 \in [0, 1)$, $x_2 = \frac{x_1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$
- $\left(x_1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{4}, \frac{x_1}{8}, \ldots\right)$
- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$
- $\underleftarrow{lim} \{X_i, f_i\}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = \frac{3}{2} - x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = \frac{3}{2} - x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$



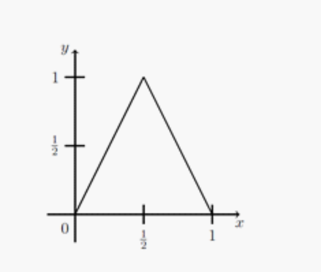
- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = \frac{3}{2} - x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

- 

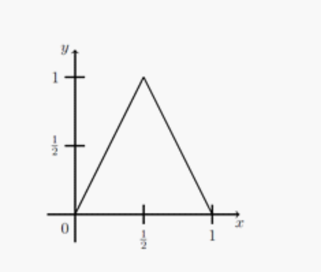
- $\underleftarrow{lim}\{X_i, f_i\}$ es homeomorfo a la cerradura de la gráfica de la función $\mathrm{sen}(1/x)$.

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$



- $f(x) = 2x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

- 

- Knaster o herradura de Smale

- TEOREMA

- TEOREMA
- Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Si f tiene un punto de periodo tres, entonces $\underleftarrow{lim}\{[0,1], f\}$ contiene un indescomponible.

- TEOREMA
- Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua. Si f tiene un punto de periodo tres, entonces $\underleftarrow{lim}\left\{[0,1], f\right\}$ contiene un indescomponible.

- Gracias