Simetrización de una transformación lineal entre dos representaciones de un grupo finito (un tema de la teoría de representaciones de grupos)

Egor Maximenko, Evelyn Sánchez Dorantes
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de septiembre de 2026

Objetivos de este tema

En este tema, estamos trabajando con grupos finitos
y sus representaciones lineales sobre espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones
y $T\colon V \to W$ es una transformación lineal,
vamos a "simetrizar" T y convertirla en un morfismo de representaciones.

Prerrequisitos para este tema

- el concepto de representación lineal de un grupo finito;
- operaciones con operadores lineales:
  combinaciones lineales y composición (multiplicación);
- multiplicación de los elementos de un grupo por un elemento fijo.

1. Notación y definiciones básicas

2. Simetrización de una transformación lineal

1 Notación y definiciones básicas

2 Simetrización de una transformación lineal

Transformaciones lineales

En este tema, trabajamos solamente con espacios vectoriales complejos de dimensión finita.

Dados espacios vectoriales V y W, denotamos por $\mathrm{L}(V, W)$ o $\mathrm{Hom}(V, W)$
el conjunto de todas las transformaciones lineales $V \to W$.

$\mathrm{L}(V, W)$ es un espacio vectorial.

$\mathrm{L}(V) \coloneqq \mathrm{L}(V, V)$ es el álgebra de todos los operadores lineales $V \to V$.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $\mathrm{GL}(V)$ al grupo de sus automorfismos
(isomorfismos $V \to V$).

Representaciones lineales finito-dimensionales de grupos finitos

En este tema, trabajamos solamente con grupos finitos.

Una representación lineal de un grupo G sobre un espacio vectorial V es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$.

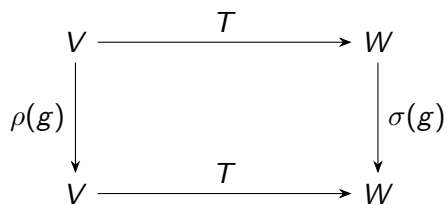
Vamos a trabajar solamente con representaciones lineales, por eso decimos simplemente representación.

Si $\dim(V) = n$, se dice que n es el grado de la representación ρ.

Morfismo entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.
Un morfismo entre ρ y σ es una transformación lineal $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$

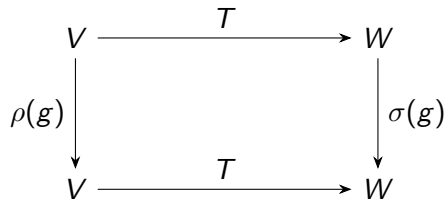


$$\mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V,W) \coloneqq \{T \in \mathrm{L}(V,W)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \sigma(g)T\}.$$

Isomorfismo entre representaciones

Sean $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones del grupo G.
Un isomorfismo entre ρ y σ es un isomorfismo de espacios vectoriales $T\colon V \to W$ tal que

$$\forall g \in G \qquad T\rho(g) = \sigma(g)T.$$



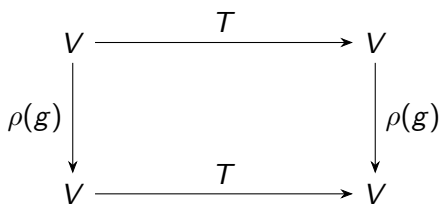
El centralizador (conmutante) de una representación

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación.

El centralizador de ρ se define como el conjunto de todos los morfismos entre ρ y ρ:

$$\mathcal{C}(\rho) \coloneqq \mathrm{Hom}_{G,\rho,\rho}(V,W) \coloneqq \Big\{ T \in \mathrm{L}(V)\colon \quad \forall g \in G \quad T\rho(g) = \rho(g)T \Big\}.$$

Es fácil de ver que $\mathcal{C}(\rho)$ es una subálgebra de $\mathrm{L}(V)$. Más aún, $I \in \mathcal{C}(\rho)$.



Repaso: multiplicación de los elementos de un grupo por un elemento fijo

Proposición

Sea G un grupo y sea $a \in G$. Definimos $\varphi\colon G \to G$,

$$\varphi(g) \coloneqq g\,a \qquad (g \in G).$$

Entonces, φ es una biyección y

$$\varphi^{-1}(h) = h\,a^{-1} \qquad (h \in G).$$

1 Notación y definiciones básicas

2 Simetrización de una transformación lineal

Simetrización de una transformación lineal

Teorema

Sean G un grupo finito,

V y W espacios vectoriales de dimensión finita,

$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\sigma\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones de G,

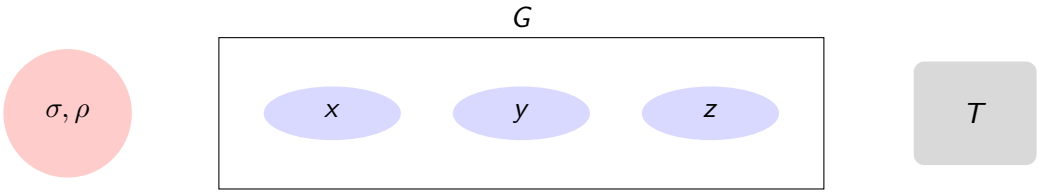
$T \in \mathrm{L}(V, W)$.

Definimos $S\colon V \to W$,

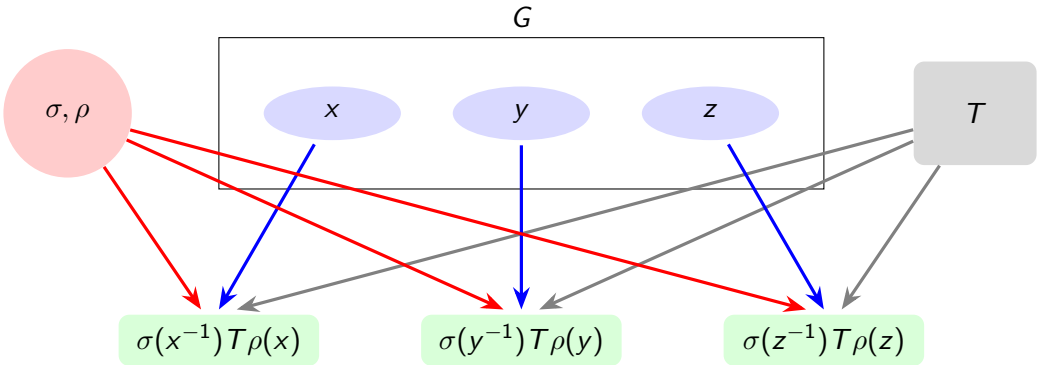
$$S \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g).$$

Entonces, $S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W)$.

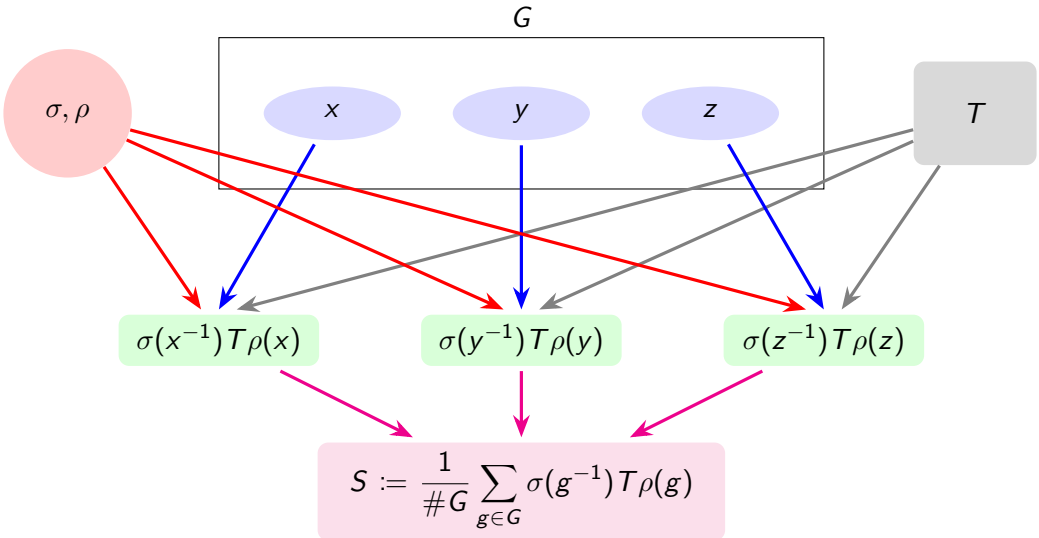
Receta de simetrización



Receta de simetrización



Receta de simetrización

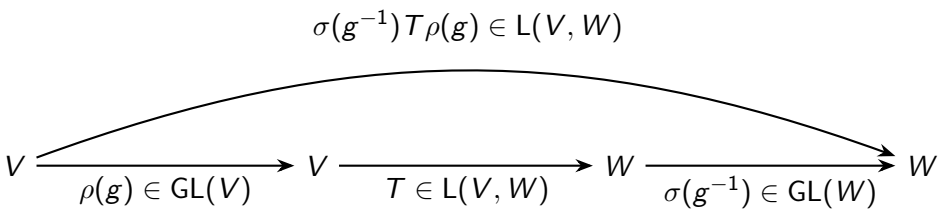


Demostración: S es lineal

De manera más breve,

$$S \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g).$$

Para cada g en G, tenemos la siguiente situación:



Luego $S \in \mathrm{L}(V, W)$, porque S es una combinación lineal de transformaciones lineales.

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a)$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) =$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a)$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) =$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Como ρ es una representación,

$$S\rho(a)$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Como ρ es una representación,

$$S\rho(a) =$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Como ρ es una representación,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga).$$

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Como ρ es una representación,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga).$$

Definimos $\varphi \colon G \to G$, $\varphi(g) \coloneqq g\,a$. Sabemos que φ es una biyección y $\varphi^{-1}(g) = ga^{-1}$.

Demostración: S entrelaza ρ y σ

Sea $a \in G$. Por propiedades de operaciones con transformaciones lineales,

$$S\rho(a) = \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \right) \rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(g) \rho(a).$$

Como ρ es una representación,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga).$$

Definimos $\varphi \colon G \to G$, $\varphi(g) \coloneqq g\,a$. Sabemos que φ es una biyección y $\varphi^{-1}(g) = ga^{-1}$.

Usemos φ como un cambio de variable en la suma.

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a)$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) =$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga)$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1})\, T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ \hline g=ha^{-1}}}{=}$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T \rho(h).$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T\rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a)$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T\rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a) =$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T\rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(a)\sigma(h^{-1}) T\rho(h)$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T\rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(a)\sigma(h^{-1}) T\rho(h) =$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\sigma(g^{-1})T\rho(ga) \overset{\substack{h=ga\\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G}\sum_{h\in G}\sigma(ah^{-1})T\rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G}\sum_{h\in G}\sigma(a)\sigma(h^{-1})T\rho(h) = \sigma(a)S.$$

S entrelaza ρ y σ

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) T \rho(ga) \overset{\substack{h=ga \\ g=ha^{-1}}}{=\!=\!=} \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(ah^{-1}) T \rho(h).$$

Finalmente,

$$S\rho(a) = \frac{1}{\#G} \sum_{h \in G} \sigma(a)\sigma(h^{-1}) T \rho(h) = \sigma(a) S.$$

Hemos demostrado que

$$S \in \mathrm{Hom}_{G,\rho,\sigma}(V, W).$$

El caso particular, cuando $\rho = \sigma$

Corolario

Sean G un grupo finito,

V un espacio vectorial de dimensión finita,

$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de G,

$T \in \mathrm{L}(V)$.

Definimos $S\colon V \to V$,

$$S \coloneqq \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1})\, T\, \rho(g).$$

Entonces, $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Ejemplo 1

Consideremos una representacional matricial de grado 2 del grupo $G = \mathbb{Z}_2$:

$$\rho(k + 2\mathbb{Z}) := A^k, \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gracias la propiedad $A^2 = I_2$, la definición de ρ es consistente.

Consideremos la matriz

$$T := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Vamos a "simetrizar" T respecto a ρ.

Ejemplo 1

Para $g = 0 + 2\mathbb{Z}$, $-g = 0 + 2\mathbb{Z}$,

$$\rho(g) = A^0 = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \rho(-g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(-g)\, T\, \rho(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1

Para $g = 1 + 2\mathbb{Z}$, $-g = 1 + 2\mathbb{Z}$,

$$\rho(g) = A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \rho(-g) = A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho(-g)\, T\, \rho(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$S = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + d & b + c \\ b + c & a + d \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1

Probemos que S conmuta con $\rho(g)$ para cada g en $\mathbb{Z}_2$.

Es suficiente considerar $g = 1 + 2\mathbb{Z}$.

Notemos que la matriz A intercambia filas al multiplicarse por la izquierda:

$$\rho(1+2\mathbb{Z})S = AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{bmatrix}.$$

Notemos que la matriz A intercambia columnas al multiplicarse por la derecha:

$$S\rho(1+2\mathbb{Z}) = SA = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2

Consideremos una representación matricial de grado 2 del grupo $G = \mathbb{Z}_3$.

$$\rho(k + 3\mathbb{Z}) := A^k, \qquad A := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ya hemos visto este ejemplo en clases pasadas.
Es fácil ver que $A^3 = I_2$ y por eso la definición de ρ es consistente.

Definimos

$$T := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a simetrizar T respecto a ρ.

Ejemplo 2

Escribamos de manera explícita la definición de S, para este ejemplo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}(\rho(0+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(-(0+3\mathbb{Z})) + \rho(1+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(-(1+3\mathbb{Z})) + \rho(2+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(-(2+3\mathbb{Z}))) \\ &= \frac{1}{3}(\rho(0+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(0+3\mathbb{Z}) + \rho(1+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(2+3\mathbb{Z}) + \rho(2+3\mathbb{Z})\,T\,\rho(1+3\mathbb{Z})) \\ &= \frac{1}{3}(T + ATA^2 + A^2TA). \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Ahora, calculemos explícitamente a S. Como

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Verifiquemos que, en efecto, $S \in \mathcal{C}(\rho)$.

Como $\mathbb{Z}_3$ es un grupo cíclico y $1 + 3\mathbb{Z}$ es su generador, es suficiente probar que

$$\rho(1 + 3\mathbb{Z})S = S\rho(1 + 3\mathbb{Z}).$$

Ejemplo 2

$$
\begin{aligned}
\rho(1+3\mathbb{Z})S &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (-1)(1)+(-1)(1) & (-1)(-1)+(-1)(2) \\ (1)(1)+(0)(1) & (1)(-1)+(0)(2) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (1)(-1)+(-1)(1) & (1)(-1)+(-1)(0) \\ (1)(-1)+(2)(1) & (1)(-1)+(2)(0) \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = S\rho(1+3\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$