# Propiedades espectrales de los operadores que forman una representación de un grupo finito

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
México

14 de septiembre de 2026

1. Repaso de prerrequisitos
2. Resultado principal

# Objetivos

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de un grupo finito $G$ de orden $m$ en un espacio vectorial $V$ de dimensión finita.

Vamos a mostrar que los operadores $\rho(g)$, donde $g \in G$, tienen algunas propiedades espectrales especiales:

- son diagonalizables,
- sus valores propios son raíces de la unidad de orden $m$.

# Prerrequisitos

- El concepto de representación de un grupo en un espacio vectorial.
- Correspondencia entre matrices y operadores lineales
  en espacios vectoriales de dimensión finita.
- El criterio de matriz diagonalizable, en términos de sus polinomios anuladores.
- El teorema del mapeo de espectros para matrices complejas.

# Correspondencia entre operadores y matrices, repaso

Sea $V$ un espacio vectorial complejo de dimensión finita $n$.

$\mathcal{L}(V) :=$ el conjunto de los operadores lineales $V \to V$.

Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base ordenada de $V$.

Definimos $\Phi\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\Phi(T) := T_{\mathcal{B}} = \text{la matriz asociada al operador } T \text{ en la base } \mathcal{B}.$$

$\Phi$ es un isomorfismo de álgebras complejas con identidad.

# Correspondencia entre operadores y matrices, repaso

Sea $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ otra base ordenada de $V$ y sea $P$ la matriz de cambio de base:

$$c_k = \sum_{j=1}^{n} P_{j,k} b_j.$$

Entonces,

$$T_{\mathcal{C}} = P^{-1} T_{\mathcal{B}} P.$$

Las matrices $T_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{B}}$ tienen:

- el mismo polinomio característico,
- el mismo ideal de polinomios anuladores,
- los mismos valores propios, etc.

# El teorema del mapeo de espectros, repaso

**Teorema**

Si $V$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $A \in \mathcal{L}(V)$ y $f$ es un polinomio, entonces

$$\mathrm{sp}(f(A)) = f[\mathrm{sp}(A)].$$

# El teorema del mapeo de espectros, repaso

**Teorema**

Si $V$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $A \in \mathcal{L}(V)$ y $f$ es un polinomio, entonces

$$\operatorname{sp}(f(A)) = f[\operatorname{sp}(A)].$$

Por definición, $f[\operatorname{sp}(A)]$ es la imagen del conjunto $\operatorname{sp}(A)$ bajo la función polinomial $f$.
Si $X \subseteq \mathbb{C}$,

$$f[X] \coloneqq \{w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in X \quad w = f(z)\}.$$

# Propiedades espectrales de los operadores lineales que forman una representación

**Teorema**

Si $G$ un grupo finito de orden $m$,

$V$ un espacio vectorial complejo de dimensión $n$,

$\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación,

$g \in G$,

entonces $\rho(g)$ es un operador diagonalizable y

$$\mathrm{sp}(\rho(g)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ z^m = 1\}.$$

En particular,

$$\mathrm{sp}(\rho(g)) \subsetneq \mathbb{T}, \qquad \text{donde} \qquad \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1\}.$$

# Demostración, inicio

Sea

$$A \coloneqq \rho(g).$$

Por la suposición, $G$ es un grupo finito de orden $m$. Esto implica que

$$g^m = 1_G.$$

Como $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es un homomorfismo de grupos,

$$A^m = \rho(g)^m = \rho(g^m) = \rho(1_G) = I_V.$$

# Demostración, continuación

Consideremos el siguiente polinomio:

$$f(z) := z^m - 1.$$

Entonces, $f$ es un polinomio anulador de $A$:

$$f(A) = A^m - I_V = 0_{V \leftarrow V}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$f(z) = \prod_{k=0}^{m} (z - \varepsilon_m^k), \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon_m := \exp \frac{2\pi \mathrm{i}}{m}.$$

Como $f$ se descompone en polinomios de grado 1 con raíces diferentes, $A$ es diagonalizable.

# Demostración, final

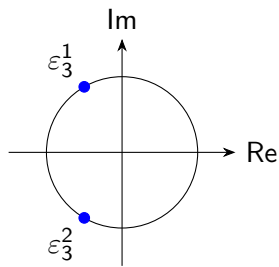
# Ejemplo (repaso)

$\rho\colon \mathbb{Z}_3 \to \mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$,

$$\rho(k+3\mathbb{Z}) \coloneqq B^k, \qquad B \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad \text{Sabemos que} \quad B^3 = I_2.$$

En este ejemplo,

$$\det(xI_2 - B) = x^2 + x + 1 = (x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_3^2)$$

y

$$B = \underbrace{\begin{bmatrix} ??? & ??? \\ ??? & ??? \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} ??? & ??? \\ ??? & ??? \end{bmatrix}}_{P^{-1}}.$$