

# Límites de algunas funciones trigonométricas

**Desigualdades principales para funciones trigonométricas.** Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

1. Demuestre que para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|.$$

2. Demuestre que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

3. Demuestre que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x_0).$$

4. Demuestre que para todo  $x_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{tg}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{tg}(x) = -\infty.$$

5. Enuncie y demuestre propiedades similares para la función cot.

**Límite de  $\frac{\sin(x)}{x}$  cuando  $x \rightarrow 0$**

6. Escriba la demostración geométrica del teorema que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Calcule los siguientes límites:

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}.$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3}.$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} \right).$