Teorema del valor intermedio (repaso)

Los siguientes dos teoremas son conocidos como teorema del valor intermedio, teorema de Bolzano-Cauchy, teorema de Bolzano.

1. Teorema del valor intermedio, caso especial. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que toma valores con signos opuestos en los exremos del intervalo $[a, b]$, esto es, $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Teorema del valor intermedio, caso general. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$, esto es, $f(a) < f(b)$ o $f(a) > f(b)$. Entonces para todo u entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = u$.

Ejemplos numéricos

3. Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.

$$f(x) = 2^x + 4x + 3.$$

4. Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.

$$f(x) = \cos(2x) - 3x + 4.$$

Ejercicios teóricos

5. Explique el sentido geométrico del teorema del valor intermedio, primero en el caso especial y luego en el caso general.

6. Muestre que la primera versión del teorema es un caso especial de la segunda versión.

7. Demuestre el teorema del valor intermedio en el caso general usando el caso especial del mismo teorema.

8. Sean $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ y $g\colon [0, 1] \to [0, 1]$ funciones continuas tales que

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad g(0) = 1, \qquad g(1) = 0.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

9. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$f(a) \leq g(b) \qquad \text{y} \qquad f(b) \geq g(a).$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

10. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua tal que

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = 3a + 5, \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = 3b + 5.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 3c + 5$.