

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Maestría en Ciencias Físicomatemáticas

Línea de Matemáticas
Examen de conocimientos

Mayo de 2016

Nombre (molde): _____

Instrucciones. El examen dura 2 horas. Está prohibido usar equipos electrónicos (celular, calculadora, etc.), libros y apuntes. El examen consta de dos partes, una es de Cálculo y otra de Álgebra. Es obligatorio contestar las preguntas del problema 1. De los problemas 2, 3, 4 es suficiente resolver algunos dos de ellos, y de los problemas 5, 6, 7 otros dos.

Cálculo

Problema 1.

- I. Enunciar el **teorema del valor medio**.
- II. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. ¿Cuándo se dice que esta sucesión **tiende a menos infinito**, esto es, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$? Escribir la definición.
- III. Enunciar el **teorema de Taylor** (llamado también la **fórmula de Taylor**) con el término de error (el resto) en la forma de Lagrange o en la forma integral.
- IV. Aplicar la fórmula del inciso III a la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en un entorno del punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y expandirla hasta el término con $(x - \pi/4)^3$. Acotar el error.

Problema 2. Sea $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ una **función continua** cuya integral es cero:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Demostrar que $f(x) = 0$ para cada x en $[0, 1]$.

Problema 3. Calcular el **límite**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2}.$$

Problema 4. Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{k/n} \right).$$

En otras palabras, se trata del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{0/n} + 3^{1/n} + 3^{2/n} + \dots + 3^{(n-1)/n}}{n}.$$

Álgebra

Problema 5. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el **operador de proyección ortogonal** sobre el subespacio generado por el vector

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la **matriz asociada** a este operador respecto a la base canónica del espacio \mathbb{R}^2 .

Problema 6. Calcular los **valores y vectores propios** de la matriz del inciso anterior.

Problema 7. Encontrar una **base** en el espacio vectorial de matrices reales **simétricas** 3×3 .