Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Maestría en Ciencias Físicomatemáticas

Línea de Matemáticas

Examen de conocimientos

Febrero de 2015

Nombre (molde): ____

Instrucciones. El examen dura 2 horas. Está prohibido usar equipos electrónicos (celular, calculadora, etc.), libros y apuntes. El examen consta de dos partes, una es de Cálculo y otra de Álgebra. Es obligatorio contestar las preguntas del problema 1. De los problemas 2, 3, 4 es suficiente resolver algunos dos de ellos, y de los problemas 5, 6, 7 otros dos.

Cálculo

Problema 1.

I. Enunciar el **teorema del valor medio** (de Lagrange) y explicar su sentido geométrico.

II. Mostrar con ejemplos que cada una de las hipótesis del teorema del valor medio es **esencial**, esto es, al quitarla el teorema ya no es válido.

III. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. ¿Cuándo se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **tiende a infinito**?

IV. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. ¿Cuándo se dice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **no es acotada**? Escribir la definición con cuantificadores, sin usar el concepto de sucesión acotada. Mostrar con un ejemplo que las clases de sucesiones III y IV no coinciden.

Problema 2. Demostrar la desigualdad:

$$\ln(u) \geq 1 - \frac{1}{u} \qquad (u \geq 1).$$

Problema 3. Consideremos la función **coseno hiperbólico** restringiendo su dominio y contradominio de la siguiente manera:

$$f\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty), \qquad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I. Demostrar que la función f es **inyectiva y suprayectiva**.

II. Denotemos por g a la función inversa de f. Hallar $g'(y)$. Sugerencia: recordar y aplicar la fórmula general para la **derivada de la función inversa**, luego simplificar el resultado.

Problema 4. Demostrar que la siguiente función es **acotada** y calcular su **supremo**.

$$f\colon (0,+\infty)\times(0,+\infty)\to(0,+\infty),\qquad f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}.$$

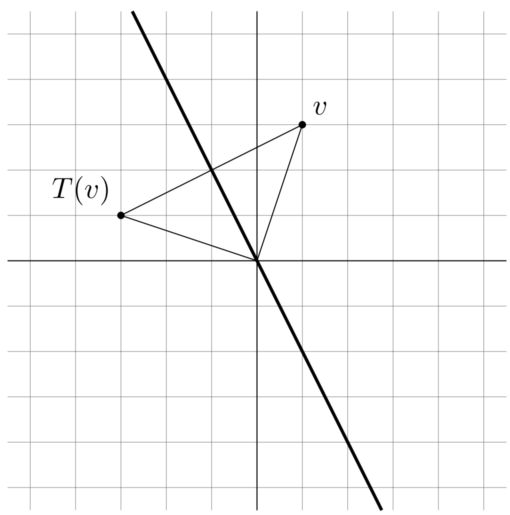
Álgebra

Problema 5. Hallar la forma general de los elementos del **subespacio** S del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **generado** por las matrices F y G:

$$F=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad G=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz $H\in S$ que tenga propiedad involutiva ($H^2=I_2$) y tal que las matrices I_2, H formen una base de S.

Problema 6. El operador lineal $T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es el operador de reflexión ortogonal respecto a la recta $2x+y=0$:



Calcular su **matriz asociada** respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^2$ la cual está formada por los vectores

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Problema 7. Calcular los **valores y vectores propios** del operador lineal T del problema anterior. Hacer comprobaciones. Sugerencia: se puede usar la matriz asociada o el sentido geométrico del operador T.