

Definición del límite de una función

1. Escriba las siguientes definiciones ($a, b \in \mathbb{R}$):

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$;

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$;

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

Usando sólo la definición del límite, demuestre que:

2. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 5x) = -6$.

3. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+4} = 3$.

4. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 5}{x - 2} = +\infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x^2}{x + 7} = +\infty$.

6. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2 - x}{x - 5} = -\infty$.

7. Escriba el criterio de límite de una función en términos de sucesiones.

8. Sea $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que toda sucesión (x_n) en $[0, 1)$ que converge al punto 1 tiene un límite finito. Demuestre que los límites de estas sucesiones son iguales. Concluya de allí que $f(x)$ tiene un límite cuando $x \rightarrow 1$.