Funciones continuas

1. Función de Dirichlet. Definamos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestre que f es discontinua en todo punto.

2. Función de Riemann. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida medianta la siguiente regla:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \quad \text{donde} \quad q \geq 1 \quad \text{y} \quad \gcd(p,q) = 1. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en todo punto irracional y discntinua en todo punto racional.

3. Funciones aditivas continuas. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la ecuación funcional

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

para todos los valores reales de x e y. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = cx$$

donde $c = f(1)$. Indicación: primero demuestre que $f(r) = cr$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

4. Sea $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ una función continua que tiene un límite finito en el punto 1. Demuestre que existe una única función continua $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1)$.

Funciones uniformemente continuas

5. Sea $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Demuestre que f tiene un límite finito en el punto 1 y por lo tanto se puede extender hasta una función continua $[0,1] \to \mathbb{R}$.