# Sucesiones acotadas

**1. Definición (sucesión acotada).** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *acotada* si existe un número $M \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$|a_n| \leq M.$$

En otras palabras, una sucesión se llama acotada si el conjunto de sus valores es acotado.

Demuestre que las sucesiones definidas mediante las siguientes reglas son acotadas:

**2.** $a_n = 3 - \dfrac{5}{n}$.

**3.** $a_n = 5 + 4\cos(n)$.

Obtenga una cota inferior positiva para cada una de las siguientes sucesiones:

**4.** $a_n = 2 + \dfrac{3}{n}$.

**5.** $a_n = 5 - \dfrac{2}{n}$.

**6.** $a_n = 4 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{3n^2}$.

**7.** $a_n = \left|1 - \dfrac{4\cos(n)}{n}\right|$.

**8.** $a_n = \left|2 - \dfrac{7\cdot(-1)^n}{n}\right|$.

Demuestre que las siguientes sucesiones son acotadas:

**9.** $a_n = \dfrac{5n+7}{2n+3}$.

**10.** $a_n = \dfrac{5\,\mathrm{sen}(n) - 2n}{n+3}$.

**11.** $a_n = \dfrac{7-n}{2n-5}$.

**12.** $a_n = \dfrac{7-n}{n+2\cos(n)}$.

**13.** $a_n = \dfrac{2n^2-n+5}{3n^2-2n-4}$.

**14.** $a_n = \sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2-n}$.

## Ejemplos de sucesiones no acotadas

**15.** Demuestre que la sucesión $\quad a_n = \sqrt{n} \quad$ no es acotada.

**16.** Demuestre que la sucesión $\quad a_n = \bigl(1 + (-1)^n\bigr)n^2 \quad$ no es acotada.

## Sucesiones acotadas superiormente o inferiormente

**17. Definición (sucesión acotada superiormente).** Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama *acotada superiormente* si existe un número $b \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$a_n \le b.$$

**18.** Escriba la definición de la sucesión acotada inferiormente.

**19.** Demuestre que una sucesión es acotada si y sólo si es acotada superiormente e inferiormente.

**20.** Demuestre que la sucesión $a_n = -n^2$ es acotada superiormente pero no es acotada inferiormente.

## Suma y producto de sucesiones acotadas

**21.** Sean $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas, esto es, existen números positivos $C_1$ y $C_2$ tales que para todo $n$ natural se cumplen las desigualdades

$$|a_n| \le C_1, \qquad |b_n| \le C_2.$$

Demuestre que la sucesión $a + b \coloneqq (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ también es acotada, esto es, encuentre un número positivo $C$ tal que

$$|a_n + b_n| \le C \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por supuesto, $C$ será expresado en términos de $C_1$ y $C_2$.

**22.** Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ y sea $\lambda$ un número. Demuestre que la sucesión $\lambda a \coloneqq (\lambda a_n)_{n=1}^{\infty}$ también es acotada.

**23.** Sean $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones acotadas. Demuestre que su producto $ab \coloneqq (a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ también es una sucesión acotada.

**24.** Sea $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada y sea $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no acotada. Demuestre que su suma $c = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión no acotada.

**25.** Dé un ejemplo de dos sucesiones no acotadas tales que su producto sea una sucesión acotada.

## Desigualdades para la progresión geométrica

**26.** Demuestre la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad (n=1,2,\ldots;\ x>-1).$$

**27.** Demuestre que para algún $C>0$

$$2^n \geq Cn^3 \qquad (n=1,2,\ldots).$$

**28.** Demuestre que la siguiente sucesión es acotada:

$$x_n = \frac{n^4}{3^n}.$$

**29.** Demuestre que la siguiente sucesión es acotada:

$$x_n = \frac{3n+7}{2^n+5}.$$