Fórmula de Taylor-Maclaurin para algunas funciones elementales

Objetivos. Deducir las fórmulas de Taylor-Maclaurin para las funciones

$$e^x, \qquad a^x, \qquad \ln(1+x), \qquad \cos(x), \qquad \operatorname{sen}(x), \qquad (1+x)^p.$$

Requisitos. Tabla de las derivadas, notación $\mathcal{O}$ de Landau, cotas superiores.

1. Fórmula de Taylor. Sea f una función $(n+1)$ veces derivable en un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ y tal que su $(n+1)$-ésima derivada es acotada en $(a-\delta, a+\delta)$:

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M \qquad \forall x \in (a-\delta, a+\delta).$$

Entonces para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$ se tiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \varphi(x),$$

donde φ es una función que cumple con la desigualdad

$$|\varphi(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in (a-\delta, a+\delta).$$

En particular, $\varphi(x) \in \mathcal{O}\big((x-a)^{n+1}\big)$ cuando $x \to a$.

2. Fórmula de Maclaurin. Es el caso particular de la fórmula de Taylor cuando $a = 0$. Sea f una función $(n+1)$ veces derivable en un intervalo $(-\delta, \delta)$ y tal que su $(n+1)$-ésima derivada es acotada en $(-\delta, \delta)$:

$$|f^{(n+1)}(x)| \le M \qquad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

Entonces para todo $x \in (-\delta, \delta)$ se tiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k + \varphi(x),$$

donde φ es una función que cumple con la desigualdad

$$|\varphi(x)| \le \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \forall x \in (-\delta, \delta).$$

En particular, $\varphi(x) \in \mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$ cuando $x \to 0$.

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función exp

3. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = e^x$ y sus valores en el punto 0:

$$f(x) = \qquad\qquad f(0) =$$

$$f'(x) = \qquad\qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad\qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad\qquad f'''(0) =$$

4. Sea $f(x) = e^x$. Escriba las fórmulas generales:

$$f^{(k)}(x) = \qquad\qquad f^{(k)}(0) =$$

5. Muestre que la $(n+1)$-ésima derivada de la función $f(x) = e^x$ es acotada en cualquier intervalo finito. Si $x \in (-\delta, \delta)$, entonces

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \qquad\qquad \leq$$

6. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ hasta el término con x^3 y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^4\big)$:

$$e^x = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \mathcal{O}\big(x^4\big).$$

7. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ hasta el término con x^n y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$:

$$e^x = \qquad + \qquad + \qquad + \ldots + \qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$

8. Escriba la fórmula del ejercicio anterior usando el símbolo $\sum$:

$$e^x = \sum_{k=} \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función a^x

En esta sección suponemos que a es un número fijo tal que $a > 0$ y $a \neq 1$.

9. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = a^x$ y sus valores en el punto 0:

$$f(x) = \qquad\qquad f(0) =$$

$$f'(x) = \qquad\qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad\qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad\qquad f'''(0) =$$

10. Sea $f(x) = a^x$. Escriba las fórmulas generales:

$$f^{(k)}(x) = \qquad\qquad f^{(k)}(0) =$$

11. Muestre que la $(n+1)$-ésima derivada de la función $f(x) = a^x$ es acotada en cualquier intervalo finito. Si $x \in (-\delta, \delta)$, entonces

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \qquad\qquad \leq$$

12. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = a^x$ hasta el término con x^3 y con el término residuo $\mathcal{O}(x^4)$:

$$a^x = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \mathcal{O}(x^4).$$

13. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = a^x$ hasta el término con x^n y con el término residuo $\mathcal{O}(x^{n+1})$:

$$a^x = \qquad + \qquad + \qquad + \ldots + \qquad + \mathcal{O}(x^{(n+1)}).$$

14. Escriba la fórmula del ejercicio anterior usando el símbolo $\sum$:

$$a^x = \sum_{k=} \qquad\qquad + \mathcal{O}(x^{(n+1)}).$$

Factoriales (repaso breve)

15. Calcule:

$$0! = \qquad 1! = \qquad 2! = \qquad 3! = \qquad 4! =$$

16. Sea

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 6.$$

Escriba una fórmula general:

$$x_n =$$

17. Simplifique:

$$\frac{5!}{4!} = \qquad \frac{7!}{8!} = \qquad \frac{(k-1)!}{k!} =$$

Alternación de los signos

18. Escriba los primeros valores de la sucesión $x_n = (-1)^n$:

$$x_0 = \qquad x_1 = \qquad x_2 = \qquad x_3 =$$

19. Escriba los primeros valores de la sucesión $y_n = (-1)^{n+1}$:

$$y_0 = \qquad y_1 = \qquad y_2 = \qquad y_3 =$$

Fórmulas generales para sucesiones

20. Sea

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = -2, \qquad x_4 = 6, \qquad x_5 = -24.$$

Escriba una fórmula general:

$$x_n =$$

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $\ln(1+x)$

21. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = \ln(1+x)$ y sus valores en el punto 0:

$$f(x) = \qquad\qquad f(0) =$$

$$f'(x) = \qquad\qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad\qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad\qquad f'''(0) =$$

$$f^{(4)}(x) = \qquad\qquad f^{(4)}(0) =$$

$$f^{(5)}(x) = \qquad\qquad f^{(5)}(0) =$$

22. Sea $f(x) = \ln(1+x)$. Escriba las fórmulas generales (para $k \geq 1$):

$$f^{(k)}(x) = \qquad\qquad f^{(k)}(0) =$$

23. Muestre que la $(n+1)$-ésima derivada de la función $f(x) = \ln(1+x)$ es acotada en cualquier intervalo $(-\delta, \delta)$, donde $\delta \in (0,1)$. Si $x \in (-\delta, \delta)$, entonces

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| = \qquad \leq$$

24. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \ln(1+x)$ hasta el término con x^4 y con el término residuo $\mathcal{O}(x^5)$:

$$\ln(1+x) = \qquad - \qquad + \qquad - \qquad + \mathcal{O}(x^5).$$

25. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \ln(1+x)$ hasta el término con x^n y con el término residuo $\mathcal{O}(x^{n+1})$:

$$\ln(1+x) = \qquad - \qquad + \qquad - \ \ldots\ + \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$

26. Escriba la fórmula del ejercicio anterior usando el símbolo $\sum$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=} \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función cos

27. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = \cos(x)$ y sus valores en el punto 0:

$$f(x) = \qquad\qquad f(0) =$$

$$f'(x) = \qquad\qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad\qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad\qquad f'''(0) =$$

$$f^{(4)}(x) = \qquad\qquad f^{(4)}(0) =$$

$$f^{(5)}(x) = \qquad\qquad f^{(5)}(0) =$$

$$f^{(6)}(x) = \qquad\qquad f^{(6)}(0) =$$

$$f^{(7)}(x) = \qquad\qquad f^{(7)}(0) =$$

$$f^{(8)}(x) = \qquad\qquad f^{(8)}(0) =$$

$$f^{(9)}(x) = \qquad\qquad f^{(9)}(0) =$$

28. Notación para escribir la alternación de los signos.
Calcule los primeros valores de la sucesión $a_k = (-1)^k$:

$$a_0 = (-1)^0 = \qquad a_1 = \qquad a_2 = \qquad a_3 =$$

Calcule los primeros valores de la sucesión $b_k = (-1)^{k+1}$:

$$b_0 = \qquad b_1 = \qquad b_2 = \qquad b_3 =$$

29. Se considera la función $f(x) = \cos(x)$. Escriba una fórmula general para sus derivadas de órdenes pares:

$$f^{(2k)}(x) = \qquad\qquad f^{(2k)}(0) =$$

30. Se considera la función $f(x) = \cos(x)$. Escriba una fórmula general para sus derivadas de órdenes impares:

$$f^{(2k+1)}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad f^{(2k+1)}(0) =$$

31. Muestre que todas las derivadas de la función $f(x) = \cos(x)$ son acotadas en $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq$$

32. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \cos(x)$ incluyendo los sumandos con coeficientes nulos, hasta el término con x^7, con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^8\big)$:

$$\cos(x) =$$

33. Escriba la fórmula del ejercicio anterior quitando los sumandos con coeficientes nulos:

$$\cos(x) =$$

34. Escriba los primeros 5 sumandos no nulos del desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función cos y el término residuo en forma $\mathcal{O}$:

$$\cos(x) =$$

35. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \cos(x)$ hasta el término con x^{2n} y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^{2n+2}\big)$:

$$\cos(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \ \ldots \ + \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{2n+2}\big).$$

36. Escriba la fórmula del ejercicio anterior con $\sum$:

$$\cos(x) = \sum_{k=}^{n} \frac{(-1)}{\qquad} x^{2k} + \mathcal{O}\big(\qquad\qquad \big).$$

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función sen

37. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y sus valores en el punto 0:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= & f(0) &= \\
f'(x) &= & f'(0) &= \\
f''(x) &= & f''(0) &= \\
f'''(x) &= & f'''(0) &= \\
f^{(4)}(x) &= & f^{(4)}(0) &= \\
f^{(5)}(x) &= & f^{(5)}(0) &= \\
f^{(6)}(x) &= & f^{(6)}(0) &= \\
f^{(7)}(x) &= & f^{(7)}(0) &= \\
f^{(8)}(x) &= & f^{(8)}(0) &= \\
f^{(9)}(x) &= & f^{(9)}(0) &=
\end{aligned}
$$

38. Notación para escribir la alternación de los signos.
Calcule los primeros valores de la sucesión $a_k = (-1)^k$:

$a_0 = (-1)^0 =$ $\qquad a_1 =$ $\qquad a_2 =$ $\qquad a_3 =$

Calcule los primeros valores de la sucesión $b_k = (-1)^{k+1}$:

$b_0 =$ $\qquad b_1 =$ $\qquad b_2 =$ $\qquad b_3 =$

39. Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Escriba una fórmula general para sus derivadas de órdenes pares:

$$f^{(2k)}(x) = \qquad\qquad f^{(2k)}(0) =$$

40. Se considera la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Escriba una fórmula general para sus derivadas de órdenes impares:

$$f^{(2k+1)}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad f^{(2k+1)}(0) =$$

41. Muestre que todas las derivadas de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ son acotadas en $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq$$

42. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ incluyendo los sumandos con coeficientes nulos, hasta el término con x^6, con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^7\big)$:

$$\operatorname{sen}(x) =$$

43. Escriba la fórmula del ejercicio anterior quitando los sumandos con coeficientes nulos:

$$\operatorname{sen}(x) =$$

44. Escriba los primeros 5 sumandos no nulos del desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función sen y el término residuo en forma $\mathcal{O}$:

$$\operatorname{sen}(x) =$$

45. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ hasta el término con x^{2n+1} y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^{2n+3}\big)$:

$$\operatorname{sen}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad + \ \ldots \ + \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{2n+3}\big).$$

46. Escriba la fórmula del ejercicio anterior con $\sum$:

$$\cos(x) = \sum_{k=}^{n} \frac{(-1)}{\qquad} x^{2k+1} + \mathcal{O}\big(\qquad\qquad\big).$$

Coeficientes binominales (repaso muy breve)

Para escribir la fórmula de Taylor-Maclaurin de la función $(1+x)^p$ necesitamos recordar la noción de coeficientes binominales.

Coeficientes binominales (definición).

$$\binom{p}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(p-j).$$

Coeficientes binominales (ejemplos). Calculemos $\binom{p}{0}$ tomando en cuenta que el producto de un conjunto vacío de factores es 1 (por definición):

$$\binom{p}{0} = \frac{1}{0!}\prod_{j:\ \ 0\le j\le -1}(p-j) = 1.$$

Otro ejemplo:

$$\binom{p}{2} = \frac{1}{2!}\prod_{j=0}^{1}(p-j) = \frac{1}{2!}\cdot p\cdot(p-1) = \frac{p(p-1)}{2}.$$

47. Coeficientes binominales (ejemplos).

$$\binom{p}{1} =$$

$$\binom{p}{3} =$$

$$\binom{p}{4} =$$

Desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $(1+x)^p$

En los ejercicios de esta sección suponemos que $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$.

48. Calcule las primeras derivadas de la función $f(x) = (1+x)^p$ y sus valores en el punto 0:

$$f(x) = \qquad\qquad f(0) =$$

$$f'(x) = \qquad\qquad f'(0) =$$

$$f''(x) = \qquad\qquad f''(0) =$$

$$f'''(x) = \qquad\qquad f'''(0) =$$

49. Sea $f(x) = (1+x)^p$. Escriba las fórmulas generales:

$$f^{(k)}(x) = \qquad\qquad f^{(k)}(0) =$$

50. Muestre que la $(n+1)$-ésima derivada de la función $f(x) = (1+x)^p$ es acotada en cualquier intervalo $(-\delta, \delta)$, donde $\delta \in (0,1)$. Si $x \in (-\delta, \delta)$, entonces

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = \qquad\qquad \leq$$

51. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = (1+x)^p$ hasta el término con x^3 y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^4\big)$:

$$(1+x)^p = \qquad + \qquad + \qquad + \qquad + \mathcal{O}\big(x^4\big).$$

52. Escriba el desarrollo de Taylor-Maclaurin de la función $f(x) = (1+x)^p$ hasta el término con x^n y con el término residuo $\mathcal{O}\big(x^{n+1}\big)$:

$$(1+x) = \qquad + \qquad + \qquad + \ldots + \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$

53. Escriba la fórmula del ejercicio anterior usando el símbolo $\sum$:

$$(1+x)^p = \sum_{k=} \qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{(n+1)}\big).$$