Fórmula de Taylor-Maclaurin. Expansión de composiciones

Objetivos. Calcular expansiones de composiciones de funciones.

Requisitos. Fórmula de Taylor-Maclaurin para algunas funciones elementales, multiplicación de expansiones asintóticas, propiedades del símbolo $\mathcal{O}$ de Landau.

1. Ejemplo. Expandir la función f en una suma de potencias de x hasta x^5. Escribir el residuo como $\mathcal{O}(x^6)$ cuando $x \to 0$.

$$f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}.$$

Solución. Denotamos $\operatorname{sen}(x)$ por t y escribimos la expansión de Taylor-Maclaurin de $\operatorname{sen}(x)$ hasta x^5:

$$t = \operatorname{sen}(x) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{(rellene bien los espacios)}} + \mathcal{O}(x^6).$$

Notamos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \underbrace{\quad}_{?}$, esto es, $t = \operatorname{sen}(x) \sim x$ cuando $x \to 0$.

Por lo tanto $t^6 \sim x^6$ y $\mathcal{O}(t^6) = \mathcal{O}(x^6)$ cuando $x \to 0$. Expandimos $\exp(t)$ hasta t^5:

$$\exp(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(t^6). \tag{1}$$

Vamos a calcular las expansiones de t^2, t^3, t^4 y t^5 hasta x^5.

$$t^2 = t \cdot t = \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\Bigg)\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\Bigg)$$

$$= \Bigg(\qquad\Bigg)x^2 + \Bigg(\qquad\qquad\qquad\Bigg)x^4 + \mathcal{O}(x^6) =$$

$$t^3 = t^2 \cdot t = \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\Bigg)\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\Bigg)$$

$$= \Bigg(\qquad\Bigg)x^3 + \Bigg(\qquad\qquad\qquad\Bigg)x^5 + \mathcal{O}(x^6) =$$

$$t^4 = t^3 \cdot t = \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

$$=$$

$$t^5 = t^4 \cdot t = \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)\Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg)$$

$$=$$

Sustituimos estas expresiones en la fórmula (1):

$$f(x) = 1 + \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6)\Bigg) + \frac{1}{2}\Bigg(\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6)\Bigg)$$

$$+ \frac{}{}\Bigg(\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6)\Bigg) + \frac{}{}\Bigg(\qquad + \mathcal{O}(x^6)\Bigg)$$

$$+ \frac{}{}\Bigg(\qquad + \mathcal{O}(x^6)\Bigg) + \mathcal{O}(x^6).$$

Calculemos los coeficientes de las potencias de x:

x^0:

x^1:

x^2:

x^3:

x^4: $\quad -\frac{1}{6} + \frac{1}{24} =$

x^5:

Respuesta: $\quad f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \mathcal{O}(x^6) \quad$ cuando $x \to 0$. $\square$

Expanda en potencias de x:

2. e^{2x-x^2} hasta x^5.

Indicación: $t = 2x - x^2$, $\mathcal{O}(t^6) = \mathcal{O}(x^6)$.

Respuesta:

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^6).$$

3. $\cos(\operatorname{sen}(x))$ hasta x^5.

Indicación: $t = \operatorname{sen}(x)$, $\mathcal{O}(t^6) = \mathcal{O}(x^6)$.

Respuesta:

$$\cos(\operatorname{sen}(x)) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

4. $e^{\cos(x)-1}$ hasta x^5.

Indicación:

$$t = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6).$$

De allí sigue que $t \sim -\dfrac{x^2}{2}$ cuando $x \to 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{O}(t^3) = \mathcal{O}(x^6)$, y es suficiente expandir e^t hasta t^2 con el residuo $\mathcal{O}(t^3)$.

Respuesta:

$$e^{\cos(x)-1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6).$$

5. Expandir $\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}$ en las potencias de x hasta x^5.

Solución. Para obtener la expansión de $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ hasta x^5, hay que escribir la expansión de $\operatorname{sen}(x)$ hasta x^6. En realidad el coeficiente de x^6 es nulo, pero el término residuo es $\mathcal{O}(x^7)$:

$$\operatorname{sen}(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^7)$$

De allí

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6).$$

Podemos escribir $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ como $1+t$, donde

$$t = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6).$$

Es importante que $t \to 0$ cuando $x \to 0$, así que este t podrá hacer papel de la variable t en la expansión de $\sqrt{1+t}$.

Notemos que la expansión de t empieza con $\underbrace{\qquad\qquad}_{?x^?}$, así que $t \sim \underbrace{\qquad\qquad}_{?x^?}$ cuando $x \to 0$.

Por lo tanto, $\mathcal{O}(t^3) = \mathcal{O}\Big(\underbrace{\qquad}_{x^?}\Big)$ cuando $x \to 0$,

y es suficiente escribir la expansión de $\sqrt{1+t}$ hasta t^2:

$$\sqrt{1+t} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(t^3). \tag{2}$$

Calculamos t^2:

$$\begin{aligned} t^2 = t \cdot t &= \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6) \Bigg) \Bigg(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^6) \Bigg) \\ &= \end{aligned}$$

Sustituimos t y t^2 por sus expansiones asintóticas en la fórmula (2):

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} =$$

Calculamos los coeficientes de las potencias de x:

x^0:

x^2:

x^4:

Respuesta:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + \mathcal{O}(x^6) \quad \text{cuando} \quad x \to 0. \qquad \square$$

Expanda en potencias de x:

6. $\ln \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ hasta x^5. Respuesta: $-\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} + \mathcal{O}(x^6)$

7. $\sqrt{\cos(x)}$ hasta x^5. Respuesta: $1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^4}{96} + \mathcal{O}(x^6)$.

8. $\ln(\cos(x))$ hasta x^7. Respuesta: $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + \mathcal{O}(x^8)$.