Función cuantil asociada a una medida de probabilidad

Estos apuntes están escritos por Egor Maximenko y Mario Alberto Moctezuma Salazar.

Denotamos por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Dada una medida de probabilidad $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$, denotamos por F_μ su función de distribución:

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

Recordemos algunas de las propiedades de F_μ. Hemos demostrado que F_μ es creciente (en el sentido no estricto), continua por la derecha en cada punto, tiene límite por la izquierda en cada punto, $F_\mu(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $F_\mu(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

Notemos que en general la función F_μ no es invertible. Sin embargo, se puede definir una función que en muchas situaciones sirve como "casi inversa" a la función F_μ.

Definición 1. Sea $\mu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ una medida de probabilidad. La función $Q_\mu\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ se define como

$$Q_\mu(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F_\mu(x) \geq p\}$$

y se llama la *función cuantil asociada a la medida de probabilidad* μ.

Vamos a demostrar algunas propiedades de Q_μ que se siguen fácilmente de la definición de Q_μ y de las propiedades de F_μ. En todas estas propiedades la medida μ es fija, y en vez de F_μ y Q_μ escribimos simplemente F y Q. Denotamos por A_p al conjunto que aparece en la definición de $Q(p)$:

$$A_p = \{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \geq p\}.$$

Proposición 1. *Q es creciente en $(0,1)$.*

Demostración. Sean $p, q \in (0,1)$ tales que $p < q$. Dado que $A_p \supset A_q$, tenemos

$$Q(p) = \inf A_p \leq \inf A_q = Q(q).$$ □

Proposición 2. *Para cualquier $x \in \mathbb{R}$,*

$$Q(F(x)) \leq x.$$

Demostración. $Q(F(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $p = F(x)$. Entonces $x \in A_p$ y por eso $Q(F(x)) = Q(p) = \inf A_p \leq x$. □

Proposición 3. *Para cualquier $p \in (0,1)$, $A_p = [\inf A_p, +\infty)$.*

Demostración. Denotemos $\inf A_p$ por u y demostremos que $u \in A_p$. Sea $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A_p tal que $v_n \downarrow u$. Como F es continua por arriba, $F(v_n) \downarrow F(u)$. Por la definición del conjunto A_p, para cada n se cumple la desigualdad $p \le F(v_n)$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ concluimos que $p \le F(u)$, esto es, $u \in A_p$.

La contención $A_p \subseteq [u, +\infty)$ se obtiene de la definición del ínfimo. Por otro lado, si $x \ge u$, entonces por la propiedad $u \in A_p$ y por la monotonía de F obtenemos que $F(x) \ge F(u) \ge p$, esto es, $x \in A_p$. □

Proposición 4. *Para cualquier $p \in (0,1)$,*

$$F(Q(p)) \ge p.$$

Demostración. Es otra forma de decir que $Q(p) \in A_p$. □

Proposición 5. *Para cualquier $p \in (0,1)$, la función Q es continua por la izquierda en el punto p.*

Demostración. Supongamos que $x \in (0,1)$ y $x_n \uparrow x$, pero $Q(x_n) \uparrow Q(x^-) < Q(x)$, entonces existe $\delta > 0$ y y tales que $Q(x_n) < y < Q(x) - \delta$ para todo n. De la primera desigualdad y usando que $F(Q(x_n)) \ge x_n$, $x_n \le F(y)$ para todo n, ahora, haciendo $n \to \infty$ tenemos que $x \le F(y)$. Usando el hecho que $Q(F(y)) \le y$, entonces $y \ge Q(x)$, pero $y \le Q(x) - \delta$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 6. *Para cada $p \in (0,1)$, Q tiene límite por la derecha en p.*

Demostración. De la monotonía de Q se sigue que $\lim\limits_{q \to p^+} Q(q) = \inf\limits_{q > p} Q(q)$. □

Proposición 7. *Sean $x \in \mathbb{R}$ y $p \in (0,1)$. Entonces $Q(p) \le x$ si y sólo si $p \le F(x)$.*

Demostración. Supongamos que $Q(p) \le x$. Aplicamos la Proposición 4 y el hecho que F es creciente:

$$p \le F(Q(p)) \le F(x).$$

Ahora supongamos que $p \le F(x)$. Aplicamos las Proposiciones 1 y 2:

$$Q(p) \le Q(F(x)) \le x.$$

□

Proposición 8. *Sean $x \in \mathbb{R}$ y $p \in (0,1)$. Entonces $Q(p) > x$ si y sólo si $p > F(x)$.*

Demostración. Es la forma contrapositiva de la Proposición 7. □

Dada una función f que actúa entre dos espacios topológicos, denotemos por $\mathcal{C}(f)$ el conjunto de sus *puntos de continuidad*. En particular,

$$\mathcal{C}(F) = \{x \in \mathbb{R} \colon\ F(x^-) = F(x)\}, \quad \mathcal{C}(Q) = \{p \in (0,1) \colon\ Q(p) = Q(p^+)\}.$$

Teorema 9 (criterio de convergencia en distribución, en términos de las funciones cuantil)**.** *Sean $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de medidas de probabilidad $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ y sea $\nu\colon \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$ una medida de probabilidad. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $F_{\mu_n}(x) \to F_\nu(x)$ *para todo* $x \in \mathcal{C}(F_\nu)$*;*

(b) $Q_{\mu_n}(p) \to Q_\nu(p)$ *para todo* $p \in \mathcal{C}(Q_\nu)$*.*

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Fijemos $p \in \mathcal{C}(Q_\nu)$ y $\varepsilon > 0$.

Como F_ν es creciente, el conjunto de sus discontinuidades (saltos) es a lo más numerable. Encontramos un $x \in \mathcal{C}(F_\nu)$ tal que $Q_\nu(p) - \varepsilon < x < Q_\nu(p)$. Como $x < Q_\nu(p)$, por la Proposición 8 obtenemos $F_\nu(x) < p$. Por otro lado, como $x \in \mathcal{C}(F_\nu)$, obtenemos $F_{\mu_n}(x) \to F_\nu(x)$. Entonces existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq k_1$ se tiene la desigualdad $F_{\mu_n}(x) < p$. Por la Proposición 8 esto implica que $x < Q_{\mu_n}(p)$, así que

$$Q_{\mu_n}(p) > Q_\nu(p) - \varepsilon. \tag{1}$$

Por otro lado, aplicamos la continuidad de la función Q_ν en el punto p y encontramos un $q > p$ tal que $Q_\nu(q) < Q_\nu(p) + \varepsilon$. Como el conjunto de las discontinuidades de F_ν es a lo más numerable, encontramos un punto $y \in \mathcal{C}(F_\nu)$ tal que $Q_\nu(q) < y < Q_\nu(p) + \varepsilon$. La Proposición 7 nos da la desigualdad inestricta $q \leq F_\nu(y)$, de la cual se sigue la desigualdad estricta $p < F_\nu(y)$.

La condición $y \in \mathcal{C}(F_\nu)$ y la hipótesis (a) implican que $F_{\mu_n}(y) \to F_\nu(y)$. Ahora la desigualdad estricta $F_\nu(y) > p$ nos permite concluir que existe un k_2 tal que para cualquier $n \geq k_2$ se tiene $F_{\mu_n}(y) > p$. Por la Proposición 7, $y \geq Q_{\mu_n}(p)$, así que

$$Q_{\mu_n}(p) < Q_\nu(p) + \varepsilon. \tag{2}$$

Pongamos $k = \max\{k_1, k_2\}$ y para cualquier $n \geq k$ obtenemos

$$Q_\nu(p) - \varepsilon < Q_{\mu_n}(p) < Q_\nu(p) + \varepsilon.$$

Hemos demostrado que $Q_{\mu_n}(p) \to Q_\nu(p)$.

De forma análoga podemos probar la implicación contraria. □