Operadores invariantes bajo traslaciones en espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Egor Maximenko,

trabajo conjunto con

Crispin Herrera Yañez y Gerardo Ramos Vazquez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario de Análisis, UAM-I
2021-09-02

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \to \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \to \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z\in D} \in H^D$ es un núcleo reproductor de H si

$$\forall f \in H \qquad \forall z \in D \qquad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \to \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z\in D} \in H^D$ es un núcleo reproductor de H si

$$\forall f \in H \qquad \forall z \in D \qquad f(z) = \langle f, K_z\rangle.$$

Propiedad hermítica y fórmula para la norma:

$$K_z(w) = \overline{K_w(z)}, \qquad \|K_z\|^2 = K_z(z),$$

Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea D un conjunto y sea H un espacio de funciones $D \to \mathbb{C}$, con un producto interno, completo.

Una familia $(K_z)_{z\in D} \in H^D$ es un núcleo reproductor de H si

$$\forall f \in H \qquad \forall z \in D \qquad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Propiedad hermítica y fórmula para la norma:

$$K_z(w) = \overline{K_w(z)}, \qquad \|K_z\|^2 = K_z(z),$$

El conjunto $\{K_z\colon\ z \in D\}$ es total en H.

Ejemplos de EHNR

$L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{D})$, el espacio de Bergman de funciones analíticas en el disco.

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi\,(1 - \overline{z}\,w)^2}.$$

$L^2_{\mathrm{hol}}(\Pi)$, el espacio de Bergman de funciones analíticas en el semiplano superior Π,

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w - \overline{z})^2}.$$

$L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{C}, \mathrm{e}^{-|z|^2}\,\mathrm{d}\mu_2(z))$, el espacio de Bargman–Segal–Fock,

$$K_z(w) = \mathrm{e}^{\overline{z}\,w}.$$

Ejemplos de EHNR

$L^2_{\mathrm{arm}}(\Pi)$, el espacio de Bergman de funciones armónicas en Π,

$$K_z(w) = -\frac{1}{\pi(w-\overline{z})^2} - \frac{1}{\pi(z-\overline{w})^2}.$$

$L^2_{n\text{-hol}}(\Pi)$, funciones n-analíticas:

$$\frac{\partial^n f}{\partial \overline{z}^n} = 0.$$

$$K_z(w) = \frac{n\,(-1)^n}{\pi}\frac{(z-\overline{w})^{n-1}}{(w-\overline{z})^{n+1}}\,P^{(0,1)}_{n-1}\left(2\,\frac{|w-z|^2}{|w-\overline{z}|^2}-1\right).$$

Ejemplos de EHNR

Espacios de ondículas.

$$K_z(w) = \langle \psi_w, \psi_z \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \qquad (z, w \in \Pi).$$

Espacios asociados al núcleo de Gauss–Weierstrass (se usan en machine learning).

$$K_z(w) = \exp\left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^{n} (z_j - \overline{w_j})^2 \right) \qquad (z, w \in \mathbb{C}^n).$$

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$, con la medida de Lebesgue μ_1.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

$$\nu \text{ es invariante bajo traslaciones y regular.}$$

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$, con la medida de Lebesgue μ_1.
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} \colon \ |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

$$\nu \text{ es invariante bajo traslaciones y regular.}$$

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$, con la medida de Lebesgue μ_1.
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon\ |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, isomorfo a $\mathbb{T}$.

Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una medida de Haar ν:

ν es invariante bajo traslaciones y regular.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$, con la medida de Lebesgue μ_1.
- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} : \ |\tau| = 1\}$, con la longitud del arco normalizada.
- $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, isomorfo a $\mathbb{T}$.
- $\mathbb{Z}$, con la medida de conteo.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H.

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H.

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Una representación unitaria de G en H
es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathcal{U}(H)$ fuertemente continuo.

Representaciones unitarias

Sea H un espacio de Hilbert.
$\mathcal{U}(H) :=$ operadores unitarios en H.

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.

Una representación unitaria de G en H
es un homomorfismo $\rho\colon G \to \mathcal{U}(H)$ fuertemente continuo.

- $\forall a, b \in G \qquad \rho(a+b) = \rho(a)\rho(b)$.
- $\forall f \in H \qquad$ la función $a \mapsto \rho(a)f$ es continua.

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \qquad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \qquad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Desplazamientos horizontales en $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(a)f)(z) := f(z-a) \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Ejemplos de representaciones unitarias de grupos

Rotaciones en $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{D})$:

$$(\rho(\tau)f)(z) := f(\tau^{-1}z) \qquad (\tau \in \mathbb{T}).$$

Desplazamientos horizontales en $L^2_{\mathrm{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(a)f)(z) := f(z-a) \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Dilataciones en $L^2_{\mathrm{hol}}(\Pi)$:

$$(\rho(b)f)(z) := b^{-1/2} f(b^{-1}z) \qquad (b > 0).$$

Problema: estudiar el centralizador

Dada una representación unitaria ρ de G en H,
queremos estudiar los operadores que conmutan con ρ:

$$\mathcal{V} \quad := \quad \rho' \quad = \quad \{S \in \mathcal{B}(H) \colon \quad \forall a \in G \qquad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

Problema: estudiar el centralizador

Dada una representación unitaria ρ de G en H,
queremos estudiar los operadores que conmutan con ρ:

$$\mathcal{V} \quad := \quad \rho' \quad = \quad \{S \in \mathcal{B}(H) \colon \quad \forall a \in G \qquad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

$\mathcal{V}$ es un álgebra de von Neumann = álgebra W*:

- subálgebra de $\mathcal{B}(H)$ con identidad,
- $\forall S \in \mathcal{V} \quad S^* \in \mathcal{V}$,
- cerrada en la topología débil de operadores.

Ejemplos de $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} := \rho' = \{S \in \mathcal{B}(H) : \quad \forall a \in G \qquad S\rho(a) = \rho(a)S\}.$$

- Operadores radiales: conmutan con las rotaciones.
- Operadores verticales: conmutan con los desplazamientos horizontales.
- Operadores angulares: conmutan con las dilataciones.

Antecedentes: más de 20 ejemplos de clases de operadores invariantes

Varios autores: Vasilevski, Grudsky, Karapetyants, Quiroga-Barranco, Hutník, Hutníková, Miśková, Loaiza-Leyva, Lozano-Arizmendi, Sánchez-Nungaray, Ramírez-Ortega, Ramírez-Mora, Morales-García, etc.

- Operadores radiales en $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathbb{D})$.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{\mathrm{hol}}(\Pi)$.
- Operadores radiales en $L^2_{\mathrm{arm}}(\mathbb{D})$.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{\mathrm{arm}}(\Pi)$.
- Operadores verticales en espacios de ondículas.
- Operadores verticales y angulares en $L^2_{n\text{-hol}}(\Pi)$.

Objetivo

Encontrar un esquema que abarque los resultados previos.

Objetivo

Encontrar un esquema que abarque los resultados previos.

¡Para gobernarlos a todos!

Operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita.

Operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita.

Dada $a \in L^\infty(X,\mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$,

$$M_a f := af.$$

Operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita.

Dada $a \in L^\infty(X,\mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$,

$$M_a f := af.$$

Los operadores de multiplicación tienen propiedades simples:

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty, \qquad M_a M_b = M_{ab} = M_b M_a, \qquad \mathrm{Sp}(M_a) = \mathrm{EssRange}(a).$$

Operadores de multiplicación en $L^2(X,\mu)$

Sea (X,μ) un espacio de medida σ-finita.

Dada $a \in L^\infty(X,\mu)$, definimos $M_a \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$,

$$M_a f := af.$$

Los operadores de multiplicación tienen propiedades simples:

$$\|M_a\| = \|a\|_\infty, \qquad M_a M_b = M_{ab} = M_b M_a, \qquad \mathrm{Sp}(M_a) = \mathrm{EssRange}(a).$$

Álgebra de operadores de multiplicación:

$$\mathcal{M}_X := \{M_a\colon\ a \in L^\infty(X,\mu)\}.$$

$\mathcal{M}_X$ es un álgebra W*, es conmutativa, $\mathcal{M}_X \cong L^\infty(X,\mu)$.

El grupo dual de un GALC

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.
Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$,

$$\psi_\xi(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a\xi},$$

El grupo dual de un GALC

Sea G un grupo abeliano localmente compacto.
Un caracter de G es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}$, $\widehat{G} = \mathbb{R}$,

$$\psi_\xi(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, a\xi},$$

- $G = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $\quad \widehat{G} = \mathbb{Z}$,

$$\psi_k(\theta + 2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, k\theta}.$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν.

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)}\, f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G}).$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν.

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)}\, f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G}).$$

Se puede elegir una medida de Haar $\widehat{\nu}$ en $\widehat{G}$ tal que

$$\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G) \qquad \|Ff\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

Transformada de Fourier

Sea G un GALC con una medida de Haar ν.

Para cada f en $L^1(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)}\, f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G}).$$

Se puede elegir una medida de Haar $\widehat{\nu}$ en $\widehat{G}$ tal que

$$\forall f \in L^1(G) \cap L^2(G) \qquad \|Ff\|_{L^2(\widehat{G})} = \|f\|_{L^2(G)}.$$

F se extiende a un isomorfismo isométrico $L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$,
que se conoce como la transformada de Fourier–Plancherel.

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

$\mu_1 :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}, \qquad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

$\mu_1 :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x\xi}, \qquad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$

$$\psi_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\, x\xi}, \qquad \nu = \widehat{\nu} = \mu_1.$$

Ejemplos de medidas de Haar en el grupo dual

$\mu_1 :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$
$$\psi_\xi(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}, \qquad \nu = \widehat{\nu} = \frac{\mu_1}{\sqrt{2\pi}}.$$
- $G = \mathbb{R}, \quad \widehat{G} = \mathbb{R},$
$$\psi_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}, \qquad \nu = \widehat{\nu} = \mu_1.$$
- $G = \mathbb{T} \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad \widehat{G} = \mathbb{Z},$
$$\psi_k(\tau) := \tau^k,$$

  $\nu_{\mathbb{T}}$ es la longitud del arco normalizada,
  $\widehat{\nu}$ es la medida de conteo en $\mathbb{Z}$.

Operadores en $L^2(G)$ invariantes bajo traslaciones

Dado a en G, definimos $\rho_G(a)\colon L^2(G) \to L^2(G)$,

$$(\rho_G(a)f)(x) := f(x-a).$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(G))$. Entonces son equivalentes:

- $S \in \rho_G'$,
- *existe σ en $L^\infty(\widehat{G})$ tal que $FSF^* = M_\sigma$.*

Operadores en $L^2(G)$ invariantes bajo traslaciones

Dado a en G, definimos $\rho_G(a)\colon L^2(G) \to L^2(G)$,

$$(\rho_G(a)f)(x) := f(x-a).$$

Proposición

Sea $S \in \mathcal{B}(L^2(G))$. Entonces son equivalentes:

- $S \in \rho_G'$,
- *existe σ en $L^\infty(\widehat{G})$ tal que $FSF^* = M_\sigma$.*

Álgebra de operadores invariantes bajo traslaciones:

$$\rho_G' \quad = \quad \{S \in \mathcal{B}(L^2(G)) \colon \quad \forall a \in G \quad \rho_G(a)S = S\rho_G(a)\} \quad \cong \quad L^\infty(\widehat{G}).$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ-compacto y metrizable,
(Y, λ) un espacio de medida σ-finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ-compacto y metrizable,
(Y, λ) un espacio de medida σ-finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G\times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G\times Y}(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ-compacto y metrizable,
(Y, λ) un espacio de medida σ-finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G\times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G\times Y}(a)f)(x, y) \coloneqq f(x - a, y).$$

En otras palabras,

$$\rho_{G\times Y}(a) = \rho_G(a) \otimes I_{L^2(Y)}.$$

Traslaciones horizontales en $L^2(G \times Y)$

Sean G un GALC σ-compacto y metrizable,
(Y, λ) un espacio de medida σ-finita.
Supongamos que $L^2(\widehat{G})$ y $L^2(Y)$ son separables.

Para cada a en G definimos $\rho_{G\times Y}(a) \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$,

$$(\rho_{G\times Y}(a)f)(x, y) \coloneqq f(x - a, y).$$

En otras palabras,

$$\rho_{G\times Y}(a) = \rho_G(a) \otimes I_{L^2(Y)}.$$

$\rho_{G\times Y}$ es una representación unitaria del grupo G en $L^2(G \times Y)$.

Transformada de Fourier respecto a la primera coordenada

$$F \otimes I \colon L^2(G \times Y) \to L^2(\widehat{G} \times Y),$$

esto es,

$$((F \otimes I)f)(\xi, y) := \int_G f(x, y)\overline{\xi(x)}\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G},\ y \in Y).$$

Descomposición del álgebra $\rho'_{G\times Y}$

Proposición

$$(F\otimes I)\,\rho'_{G\times Y}\,(F\otimes I)^* = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \mathcal{B}(L^2(Y))\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$

En otras palabras, para cada S en $\rho'_{G\times Y}$ existe una familia de operadores $(A_\xi)_{\xi\in\widehat{G}}$ en $\mathcal{B}(L^2(Y))$ tal que

$$(F\otimes I)\,S\,(F\otimes I)^* = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} A_\xi\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$

Esto significa que $\forall g\in L^2(\widehat{G}\times Y)$

$$((F\otimes I)\,S\,(F\otimes I)^* g)(\xi,\cdot) = A_\xi g(\xi,\cdot).$$

Suposiciones

Trabajamos en el siguiente contexto:

- G es un grupo abeliano localmente compacto G,
- (Y, λ) es un espacio de medida σ-finita,
- H es un EHNR sobre $G \times Y$,
- H está encajado en $L^2(G \times Y)$,
- H es invariante bajo $\rho_{G\times Y}$.

La invarianza de H bajo traslaciones horizontales

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal sobre H:

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\forall a \in G \qquad \rho_{G\times Y}(a)(H) \subseteq H;$

(b) $\forall a \in G \qquad \rho_{G\times Y}(a)P = P\rho_{G\times Y}(a);$

(c) $\forall a, x \in G \quad \forall y \in Y \qquad \rho_{G\times Y}(a)K_{x,y} = K_{x+a,y};$

(d) $\forall x, u \in G \quad \forall y, v \in Y \qquad K_{x,y}(u, v) = K_{0,y}(u - x, v).$

La invarianza de H bajo traslaciones horizontales

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal sobre H:

$$(Pf)(x,y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\forall a \in G \qquad \rho_{G\times Y}(a)(H) \subseteq H;$

(b) $\forall a \in G \qquad \rho_{G\times Y}(a)P = P\rho_{G\times Y}(a);$

(c) $\forall a, x \in G \quad \forall y \in Y \qquad \rho_{G\times Y}(a)K_{x,y} = K_{x+a,y};$

(d) $\forall x, u \in G \quad \forall y, v \in Y \qquad K_{x,y}(u,v) = K_{0,y}(u-x,v).$

En lo que sigue, suponemos que estas propiedades se cumplen.

Representación unitaria de G en H

$\rho_H(a) :=$ el operador $\rho_{G\times Y}(a)$ comprimido a H, i.e.

$$\rho_H(a)\colon H \to H, \qquad (\rho_H(a)f)(x,y) := f(x-a,y).$$

ρ_H es una representación unitaria del grupo G en H.

Representación unitaria de G en H

$\rho_H(a) :=$ el operador $\rho_{G\times Y}(a)$ comprimido a H, i.e.

$$\rho_H(a)\colon H \to H, \qquad (\rho_H(a)f)(x,y) := f(x-a,y).$$

ρ_H es una representación unitaria del grupo G en H.

El objetivo es estudiar el centralizador de ρ_H:

$$\mathcal{V} \quad := \quad \{S \in \mathcal{B}(H)\colon \quad \forall a \in G \quad \rho_H(a)S = S\rho_H(a)\}.$$

La proyección sobre H parece convolución

$$
\begin{aligned}
(Pf)(x,y) &= \int_G \int_Y f(u,v)\overline{K_{x,y}(u,v)}\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v) \\
&= \int_G \int_Y f(u,v)K_{0,v}(x-u,y)\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v).
\end{aligned}
$$

¡Tenemos una convolución sobre la primera coordenada!
Hay que aplicar $F \otimes I$.

$$
L_{\xi,y}(v) := \int_G \overline{\xi(u)}K_{0,y}(u,v)\,\mathrm{d}\nu(u).
$$

La proyección P en las imágenes de Fourier

Pongamos $\widehat{P} := (F \otimes I)P(F \otimes I)^*$.

$$\begin{tikzcd} L^2(G \times Y) \arrow[r, "F \otimes I"] \arrow[d, "P"'] & L^2(\widehat{G} \times Y) \arrow[d, "\widehat{P}"'] \\ L^2(G \times Y) \arrow[r, "F \otimes I"'] & L^2(\widehat{G} \times Y) \end{tikzcd}$$

Proposición

Bajo ciertas condiciones adicionales sobre K y L,

$$(\widehat{P}g)(\xi, y) = \int_Y g(\xi, v)\overline{L_{\xi,y}(v)}\, \mathrm{d}\lambda(v).$$

Propiedades de la función L

Propiedad hermítica:

$$\overline{L_{\xi,y}(v)} = L_{\xi,v}(y).$$

Propiedad reproductora para L:

$$L_{\xi,y}(v) = \langle L_{\xi,y}, L_{\xi,v} \rangle = \int_Y L_{\xi,y}(z) L_{\xi,z}(v) \, \mathrm{d}\lambda(z).$$

Asociamos una fibra a cada frecuencia

Definimos $\widehat{P}_\xi \in \mathcal{B}(L^2(Y))$,

$$(\widehat{P}_\xi h)(y) := \langle h, L_{\xi,y} \rangle = \int_Y h(v) \overline{L_{\xi,y}(v)} \, \mathrm{d}\lambda(v),$$

$$\widehat{H}_\xi := \widehat{P}_\xi(L^2(Y)).$$

Entonces para cada ξ en $\widehat{G}$

- $\widehat{P}_\xi$ es una proyección ortogonal,
- $\widehat{H}_\xi$ es un subespacio cerrado de $L^2(Y)$,
- $\widehat{H}_\xi$ tiene núcleo reproductor $(L_{\xi,y})_{y\in Y}$.

Descomposición de $\widehat{H}$ en fibras

Nos restringimos a las frecuencias no triviales:

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{\xi \in \widehat{G} : \quad \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\} \\ &= \left\{\xi \in \widehat{G} : \quad \int_Y L_{\xi,v}(v)\,\mathrm{d}\lambda(v) > 0\right\}.\end{aligned}$$

$$\widehat{H} := (F \otimes I)(H).$$

Proposición

$$\widehat{H} = \int_\Omega^\oplus \widehat{H}_\xi \,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$

Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

$\Phi\colon H \to \widehat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

$\Phi\colon H \to \widehat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Teorema 1

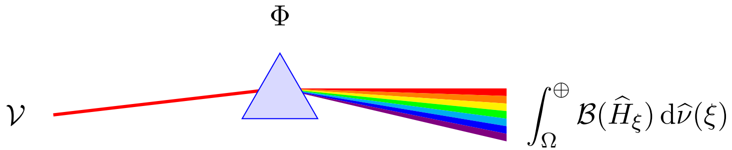
$$\Phi\mathcal{V}\Phi^* = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{B}(\widehat{H}_\xi)\,\mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$

Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

$\Phi\colon H \to \widehat{H}$ es la compresión de $F \otimes I$.

Teorema 1

$$\Phi \mathcal{V} \Phi^* = \int_\Omega^\oplus \mathcal{B}(\widehat{H}_\xi)\, \mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$



Criterio de conmutatividad de $\mathcal{V}$

Teorema 2

Las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\mathcal{V}$ *es conmutativa;*
- $\forall \xi \in \Omega \qquad \dim(\widehat{H}_\xi) = 1;$
- $\forall \xi \in \Omega \quad \forall y, v \in Y \qquad |L_{\xi,y}(v)|^2 = L_{\xi,y}(y) L_{\xi,v}(v);$
- *existe una función medible* $q \colon \Omega \times Y \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)} q_\xi(v).$$

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \qquad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C} q_\xi, \qquad \|q_\xi\| = 1.$$

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \qquad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C} q_\xi, \qquad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar $\widehat{H}_\xi$ con $\mathbb{C}$.

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \qquad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C} q_\xi, \qquad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar $\widehat{H}_\xi$ con $\mathbb{C}$.

Definimos $N\colon \widehat{H} \to L^2(\Omega)$,

$$(Ng)(\xi) := \langle g(\xi,\cdot), q_\xi \rangle.$$

Definimos $R\colon H \to L^2(\Omega)$,

$$R := N\Phi.$$

El caso conmutativo

Está dada una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ tal que

$$\forall \xi \in \Omega \qquad \widehat{H}_\xi = \mathbb{C} q_\xi, \qquad \|q_\xi\| = 1.$$

Entonces podremos identificar $\widehat{H}_\xi$ con $\mathbb{C}$.

Definimos $N \colon \widehat{H} \to L^2(\Omega)$,

$$(Ng)(\xi) := \langle g(\xi, \cdot), q_\xi \rangle.$$

Definimos $R \colon H \to L^2(\Omega)$,

$$R := N\Phi.$$

Proposición

Los operadores N y R son unitarios.

Tres mundos en el caso conmutativo

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
H < L^2(G \times Y) \arrow[r, shift left, "\Phi"] \arrow[rr, bend left, "R"] & \widehat{H} < L^2(\widehat{G} \times Y) \arrow[l, shift left, "\Phi^*"] \arrow[r, shift left, "N"] & L^2(\Omega) \arrow[l, shift left, "N^*"] \arrow[ll, bend left, "R^*"]
\end{tikzcd}
$$

Diagonalización de $\mathcal{V}$ en el caso conmutativo

Teorema 3

Supongamos que $\dim(\widehat{H}_\xi) = 1$ *para cada* ξ *en* Ω. *Entonces*

$$\mathcal{V} \cong L^\infty(\Omega),$$

y la siguiente función es un isomorfismo isométrico de W^**-algebras:*

$$\Lambda\colon L^\infty(\Omega) \to \mathcal{V}, \qquad \Lambda(\sigma) := R^* M_\sigma R.$$

Diagonalización de $\mathcal{V}$ en el caso conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
H < L^2(G \times Y) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "S \in \rho'_H"'] \arrow[rr, bend left, "R"] & \widehat{H} < L^2(\widehat{G} \times Y) \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\Phi S \Phi^*"'] & L^2(\Omega) \arrow[d, "M_\sigma"] \\
H < L^2(G \times Y) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[rr, bend right, "R"'] & \widehat{H} < L^2(\widehat{G} \times Y) \arrow[r, "N"'] & L^2(\Omega)
\end{tikzcd}
$$

Operadores de Toeplitz con símbolos invariantes

Para $g \in L^\infty(G \times Y)$,

$$T_g f := P(f\,g).$$

Proposición

Sea $g \in L^\infty(Y)$. *La extendemos a* $G \times Y$*:*

$$g(x, y) := g(y).$$

Entonces $T_g \in \mathcal{V}$ *y*

$$R^* T_g R = M_{\gamma_g},$$

donde

$$\gamma_g(\xi) = \int_Y g(y) L_{\xi,y}(y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\mathrm{hol}}(\Pi)$

$H :=$ el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u - x + \mathrm{i}(v+y))^2}.$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\mathrm{hol}}(\Pi)$

$H :=$ el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u-x+\mathrm{i}(v+y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,u\xi}\,\mathrm{d}u}{\pi(u+\mathrm{i}(v+y))^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi\,\mathrm{e}^{-\xi(y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \le 0. \end{cases}$$

Ejemplo: operadores verticales en $L_{\mathrm{hol}}(\Pi)$

H := el espacio de Bergman sobre $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

$$K_{(x,y)}(u,v) = -\frac{1}{(u - x + \mathrm{i}(v+y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, u\xi}\, \mathrm{d}u}{\pi(u + \mathrm{i}(v+y))^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \xi\, \mathrm{e}^{-\xi(y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Notamos que $L_{\xi,y}(v)$, con $\xi > 0$, se puede factorizar:

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)}\, q_\xi(v), \qquad q_\xi(v) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\xi}\, \mathrm{e}^{-\xi v}.$$

Conclusión: en este ejemplo $\Omega = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{V}$ es conmutativa,

$$\mathcal{V} \cong L^\infty(\Omega).$$